К.Куратовский

ТОПОЛОГИЯ

том 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» *Москва 1966*

Монография известного ученого, вице-президента Академии наук Польской Народной Республики, академика Казимира Куратовского — выдающееся явление в математической литературе. Она представляет собой наиболее полное и легко читаемое сочинение, охватывающее большинство разделов современной топологии.

Монография выдержала три издания на французском языке (третье издание — Варшава, 1961). Текст первого тома значительно переработан автором и подготовлен для одновременного издания на русском и английском языках. В настоящее время автор работает над рукописью второго тома.

Книга заинтересует всех математиков, начиная от студентов и кончая специалистами, так как в последние годы топологические методы проникли почти во все отрасли математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 5

Предисловие к первому тому 7

ВВЕДЕНИЕ 9

§ 1. Операции логики и теории множеств 9

I. Алгебра логики. II. Алгебра множеств. III. Функции высказываний. IV. Операция Е. V. Бесконечные операции на множествах. VI. Семейство всех подмножеств данного множества. VII. Идеалы. Фильтры.

§ 2. Прямое произведение множеств 14

I. Определение. II. Свойства прямого произведения. III. Оси, координаты, проекции. IV. Функции высказываний многих переменных. V. Связь между операторами Е и V VI. Умножение на ось. VII. Отношения. Факторсемейство. VIII. Конгруэнтность по модулю идеала.

§ 3. Отображения. Упорядочения. Кардинальные и порядковые числа 20

I. Терминология и обозначения. II. Образы и прообразы. III. Операции над образами и прообразами. IV. Коммутативные диаграммы. V. Многозначные отображения. VI. Множества одинаковой мощности. Кардинальные числа. VII. Характеристические функции. VIII. Обобщенное прямое произведение. IX. Примеры счетных произведений. X. Упорядочение. XI. Вполне упорядоченные множества. Порядковые числа. XII. Множество $X^{\aleph_\alpha}$. XIII. Обратные спектры и их пределы. XIV. ($\mathfrak{A}$)-операция. XV. Решето Лузина. XVI. Применение к канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$

ГЛАВА 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА 44

§ 4. Определения. Операция замыкания 44

I. Определения. II. Геометрическая интерпретация. III. Правила

топологического исчисления. IV. Относительное замыкание. V. Логический анализ системы аксиом.
§ 5. Замкнутые и открытые множества 49
I. Определения. II. Операции. III. Свойства. IV. Относительно замкнутые и относительно открытые множества. V. Множества типа F_σ и G_δ VI. Борелевские множества. VII. Покрытие пространства. Измельчение. VIII. Хаусдорфовы пространства. IX. $\mathfrak{T}_0$-пространства. X. Регулярные пространства. XI. База и подбаза.
§ 6. Граница и внутренность множества 60
I. Определения. II. Некоторые формулы. III. Связь с замкнутыми it открытыми множествами. IV. Теорема аддитивности. V. Отделимые множества. VI. Двойственность между операциями замыкания и взятия внутренности множества.
§ 7. Окрестность точки. Локализация свойств 66
I. Определение. II. Необходимые и достаточные условия. III. Сходящиеся фильтры. IV. Локализация. V. Локально замкнутые множества.
§ 8. Всюду плотные, граничные и нигде не плотные множества 71
I. Определения. II. Необходимые и достаточные условия. III. Операции. IV. Разложение границы. V. Множества, открытые по модулю нигде не плотных множеств. VI. Относительные свойства. VII. Локализация. VIII. Замкнутые области. IX. Открытые области.
§ 9. Точки накопления 81
I. Определения. П. Необходимые и достаточные условия. III. Некоторые формулы. IV. Дискретные множества. V. Множества, плотные в себе. VI. Разреженные множества.
§ 10. Множества первой категории 86
I. Определение. II. Свойства. III. Теорема единственности. IV. Относительные свойства. V. Локализация. VI. Формулы разложения.
§ 11. Множества, открытые относительно множеств первой категории. Свойства Бэра 92
I. Определение, II. Общие замечания. III. Операции. IV. Необходимые и достаточные условия. IV а. Теорема существования. V. Относительные свойства. VI. Свойство Бэра в узком смысле. VII. ($\mathfrak{A}$) - операция.
§ 12. Знакочередующиеся ряды замкнутых множеств 101
I. Формулы общей теории множеств. П. Определение. III. Теоремы отделимости. Разложение в знакочередующийся ряд. IV. Свойства остатка. V. Необходимые и достаточные условия. VI. Свойства разложимых множеств. VII. Вычеты. VIII. Вычеты трансфинитного порядка.
§ 13. Непрерывность. Гомеоморфизм 108
I. Определение. П. Необходимые и достаточные условия. III.

Множество $D(f)$ точек разрыва. IV. Непрерывные отображения. V. Относительные свойства. Сужение. Ретракция. VI. Вещественнозиачные функции. Характеристические функции. VII. Взаимно однозначные непрерывные отображения Сравнение топологий. VIII. Гомеоморфизм. IX. Топологические свойства. X. Топологический ранг. XI. Однородные множества. XII. Приложения к топологическим группам. XIII. Открытые отображения. Замкнутые отображения. XIV. Отображения, открытые и замкнутые в данной точке. XV. ВЗЛНУМ непрерывные отображения

§ 14. Вполне регулярные пространства. Нормальные пространства 126

I. Вполне регулярные пространства. II, Нормальные пространства. III. Системы множеств, подобные в комбинаторном смысле, в нормальных пространствах. IV. Действительные функции, определенные на нормальных пространствах. V. Наследственно нормальные пространства. VI. Совершенно нормальные пространства.

§ 15. Прямое произведение $\mathcal{X}$x$\mathcal{Y}$ топологических пространств 143

I. Определение. II. Проекции и непрерывные отображения. III. Действия над прямыми произведениями. IV. Диагональ. V. Свойства отображения f, рассматриваемого как подмножество пространства $\mathcal{X}$x$\mathcal{Y}$. VI. Горизонтальные и вертикальные сечения. Цилиндр на множестве $A\subset\mathcal{X}$. VII. Инварианты прямого произведения.

§ 16. Обобщенные прямые произведения 154

I. Определение. II. Проекции и непрерывные отображения. III. Действия над прямыми произведениями. IV. Диагональ. V. Инварианты прямого произведения. VI. Пределы обратных спектров.

§ 17. Пространство 2^x. Экспоненциальная топология 168

I. Определение. II. Основные свойства. III. Непрерывные многозначные отображения. IV. Случаи, когда пространство $\mathcal{X}$ регулярно. V. Случай, когда пространство $\mathcal{X}$ нормально. VI. Связь пространства 2^x со структурами и брауэровскими алгебрами.

§ 18. Полунепрерывные функции 181

I. Определения. II. Примеры. Связь с действительными полунепрерывными функциями. Замечания. III. Основные свойства. IV. Объединение полунепрерывных отображений. V. Пересечение полунепрерывных отображений. VI. Разность полунепрерывных отображений.

§ 19. Пространство разбиения. Фактортопология 192

I. Определение. II. Проекции. Связь с взаимно непрерывными отображениями. III. Примеры и замечания. IV. Связь фактортопологии с экспоненциальной топологией.

ГЛАВ А 2 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА 197

А. Связь с топологическими пространствами. $\mathcal{L}$*-пространства 147

§ 20. $\mathcal{L}$*-пространства (в которых определено понятие предела) 197

I. Определение. II. Связь с топологическими пространствами. III. Понятие непрерывности. IV. Прямое произведение $\mathscr{L}^*$-пространств. V. Счетно-компактные $\mathscr{L}^*$-пространства. VI. Непрерывная сходимость. Множество $\mathscr{Y}^x$ как $\mathscr{L}^*$-пространство. VII. Операции над пространствами $\mathscr{Y}^x$ с $\mathscr{L}^*$-топологией. VIII. Непрерывная сходимость в узком смысле. IX. Сходимость Мура — Смита (основные определения).

§ 21. Метрические пространства. Общие свойства 213

I. Определения. II. Топология в метрических пространствах. III. Диаметр. Непрерывность. Колебание. IV. Число ρ (A, B). Обобщенный шар. Нормальность метрических пространств. V. Ограничивающее отображение. VI. Метризация прямого произведения. VII. Расстояние между двумя множествами. Пространство $(2^{\mathscr{X}})_m$. VIII. Вполне ограниченные пространства. IX. Эквивалентность между счетно-компактными и компактными метрическими пространствами. X. Равномерная сходимость. Метризация пространства $\mathscr{Y}^x$. XI. Продолжение относительно замкнутых и относительно открытых множеств. XII. Измельчение бесконечных покрытий. XIII. G_δ -множества в метрических пространствах. XIV. Пространства близости. Равномерные пространства (основные определения). XV. Псевдометрические пространства. XVI. Паракомпактность метрических пространств. XVII. Проблемы метризации.

§ 22. Пространства со счетной базой 247

I. Общие свойства. II. Метризация и введение координат. III. Сепарабельность пространства $\mathscr{Y}^x$. IV. Отождествление замкнутых множеств. V. Произведение пространств со счетной базой. Множества первой категории, VI. Произведения пространств со счетной базой. Свойство Бэра.

Б. Проблемы мощности 259

§ 23. Мощность пространства. Точки конденсации 259

I. Мощность пространства. II. Плотное подмножество. III. Точки конденсации. IV. Основные свойства операции O. V. Разреженные множества. VI. Объединения разреженных множеств. VII. Точки порядка lit. VIII. Понятие эффективности.

§ 24. Мощность различных семейств множеств 263

I. Семейства открытых множеств. Семейства множеств, обладающих свойством Бэра. II. Вполне упорядоченные монотонные семейства. III. Разложимые множества. IV. Производные множества порядка α. V. Логический анализ. VI. Семейства непрерывных функций. VII. Структура монотонных семейств замкнутых множеств. VIII. Строго монотонные семейства. IX. Связь строго монотонных семейств с непрерывными функциями. X. Строго монотонные семейства замкнутого порядкового типа.

В. Проблемы размерности 282
§ 25. Определения. Общие свойства 282
I. Определение размерности. II. Размерность подмножеств. III. Множество $E_{(n)}$.
§ 26. Нульмерные пространства 286
I. База пространства. II. Теоремы редукции и отделимости. III. Теоремы об объединении нульмерных множеств. IV. Продолжение нульмерных множеств. V. Счетные пространства.
§ 27. Пространства размерности n 297
I. Теоремы об объединении. II. Отделимость замкнутых множеств. III. Разложение n-мерного пространства. Условие D_n. IV. Продолжение n-мерных множеств. V. Размерностное ядро. VI. Слабо n-мерное пространство. VII. Семейства, определяющие размерность. VIII. Размерность прямого произведения. IX. Непрерывные и взаимно однозначные отображения n-мерных пространств. X. Замечания по поводу теории размерности в применении к произвольным метрическим пространствам.
§ 28. Симплексы, комплексы, полиэдры 314
I. Определения. II. Топологическая размерность симплекса, III. Приложения к задаче о неподвижных точках. IV. Приложения к кубам $\mathcal{I}^n$ и $\mathcal{I}^{\aleph_0}$. Нерв системы множеств. VI. Отображения метрических пространств в полиэдры. VII. Аппроксимация непрерывных отображений отображениями к. VIII. Бесконечные комплексы и полиэдры. IX. Продолжение непрерывных функций.
Г. Счетные операции. Борелевские множества. B-измеримые функции 343
§ 29. Нижний и верхний пределы 343
I. Нижний предел. II. Правила действий. III. Верхний предел. IV. Правила действий. V. Связь между пределами Li и Ls. VI. Предел. VII. Относительные свойства. VIII. Обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса. IX. Пространство $(2^{\mathcal{X}})_L$.
§ 30. Борелевские множества 352
I. Эквивалентность. II. Классификация борелевских множеств. III. Свойства классов F_α и G_α. IV. Двусторонние борелевские множества. V. Разложение борелевских множеств на непересекающиеся множества. VI. Знакочередующиеся ряды борелевских множеств. VII. Теоремы редукции и отделимости. VIII. Относительно двусторонние множества. IX. Предельное множество двусторонних множеств. X. Локально борелевские множества. $\mathfrak{M}$-операция Монтгомери. XI. Вычисление классов с помощью логических символов. XII. Приложения. XIII. Универсальные функции. XIV. Существование множеств класса G_α не являющихся множествами класса F_α. XV. Проблема эффективности.

§ 31. *B*-измеримые отображения 382
I. Классификация. П. Необходимые и достаточные условия. III. Суперпозиция функций. IV. Сужения функций. V. Функции многих переменных. VI. Сложные функции. VII. График отображения $f:\ \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. VIII. Предел функций. IX. Аналитическое представление. X. Теоремы Бэра о функциях первого класса.
§ 32. Функции, обладающие свойством Бэра 408
I. Определение. II, Необходимые и достаточные условия. III. Операции над функциями, обладающими свойством Бэра. IV. Функции, обладающие свойством Бэра в узком смысле. V. Связь с мерой Лебега.
ГЛАВА 3. ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА 415
§ 33. Определения. Общие свойства 415
I. Определения. II. Сходимость и фундаментальные последовательности. III. Прямое произведение IV. Пространство $(2^{\mathcal{X}})_m$. V. Функциональное пространство. VI. Полная метризация G_δ-множеств. VII. Пополнение метрического пространства.
§ 34. Последовательности множеств. Теорема Бэра 422
I. Коэффициент $\alpha(A)$. II. Теорема Кантора. III. Приложение к непрерывным функциям. IV. Теорема Бэра [1]. V. Приложения к множествам типа G_δ. VI. Приложения к множествам типа F_σ и G_δ. VII. Приложения к функциям первого класса. VIII. Приложения к теоремам существования.
§ 35. Продолжение функций 432
I. Продолжение непрерывных функций. II. Продолжение гомеоморфизмов. III. Топологическая характеризация полных пространств. IV. Внутренняя инвариантность различных семейств множеств. V. Приложения к топологическим рангам. VI. Продолжение *B*-измеримых функций. VII. Продолжение гомеоморфизма класса (α, β).
§ 36. Связь полных сепарабельных пространств с пространством *Л*″ иррациональных чисел 448
I. $(\mathcal{A})$-операция. II. Отображения множества $\mathcal{N}$ в полные пространства. III. Взаимно однозначные отображения IV. Теоремы разложения. V. Связь с канторовским множеством $\mathcal{C}$.
§ 37. Борелевские множества в полных сепарабельных пространствах 458
I. Связь борелевских множеств с пространством $\mathcal{N}$. II. Характеризация борелевских классов множеств с помощью обобщенных гомеоморфизмов. III. Разложение двусторонних множеств в знакочередующиеся ряды. IV. Малые классы Бореля.
§ 38. Проективные множества 464
I. Определения. II. Соотношения между проективными классами. III. Свойства проективных множеств. IV. Проекции. V. Универсальные

функции. VI. Теорема существования. VII. Инвариантность. VIII. Проективные функции высказываний. IX. Инвариантность проективных классов относительно просеивания через решето и относительно ($\mathfrak{A}$) -операции. X. Трансфинитная индукция. XI. Операции Хаусдорфа.

§ 39. Аналитические множества 489

I. Общие теоремы. II. Аналитическое множество как результат ($\mathfrak{A}$) -операции. III. Первая теорема отделимости. IV. Приложения к борелевскпм множествам. V. Приложения к B-измеримым функциям. VI. Вторая теорема отделимости. VII. Порядок значения B -измеримой функции. VIII. Составляющие, или конституанты. CA-множества. IX. Проективные классы функций высказываний, включающих переменные порядковые типы. X. Теоремы редукции. XI. Функции классов A и CA.

§ 40. Вполне несовершенные и другие сингулярные пространства 523

I. Вполне несовершенные пространства. II. Пространства заведомо первой категории. III. λ-пространства. IV. Отображения. V. Свойство λ'. VI. σ-пространстпа. VII. ν-пространства, сосредоточенные пространства, свойство C. VIII. Связь со свойством Бэра в узком смысле. IX. Связь ν-пространств с общей теорией множеств.

ДОБАВЛЕНИЕ 543

I. Некоторые приложения топологии к математической логике. А. Мостовский 543

II. О приложениях топологии к функциональному анализу. Р. Сикорский 548

Литература 552

Предметный указатель 580

Именной указатель 584

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома выбора 34
— топологического пространства 44
Аналитические множества (***A***-множества) 464, 489
База пространства 58
Барицентрические координаты 314
Бесконечный комплекс 336
— полиэдр 337
Большая индуктивная размерность (Ind χ) 313
Борелевские множества 53, 352—381
Борелевский изоморфизм 462
Брауэровская алгебра 180
Верхний предел последовательности множеств (Ls A_n) 344
Взаимно непрерывное отображение 125
— однозначное отображение 20
Внутреннее отображение 122
Внутренний инвариант 118
Внутренность множества 60
Вполне несовершенное пространство 523
— нормальное (наследственно нормальное) пространство 136
— ограниченное пространство 224
— регулярное пространство 126
— упорядоченное множество 34
Всюду плотное множество 71
Выпуклое множество 314

Высказывание (предложение) 9
Вычет множества 70
— трансфинитного порядка 107
Геометрическая размерность симплекса 314
Гильбертов куб 32
Гипотеза континуума 35
Гомеоморфизм 116
— обобщенный класса (α, β) 382
Граница множества 60
Граничное множество 71
— — в точке 77
Грань симплекса 314
График отображения 148
Двойственность 10, 66
Двустороннее множество класса α 355
Диагональ 146
Диаграмма бикоммутативная (точная) 26
— коммутативная 25
Диаметр множества ($\delta(A)$) 216
Дизъюнкция 9
Дискретное множество 83
— семейство подмножеств топологического пространства 243
Дополнение множества 10
Закон двойного отрицания 9
— исключенного третьего 9
— ложного положения 9
— противоречия 9
Законы Моргана 9
Замкнутая область 79
Замкнутое множество 49
— отображение 122
Замыкание 44
— в метрическом пространстве 215
— комплекса 316
Идеал 14
— максимальный 14
— собственный 14
σ-идеал 19
Измельчение покрытия 54
B-измеримое отображение класса a 382
Изолированная точка 81
Индуктивная размерность пространства (ind χ) 313
Канторов дисконтинуум (канторово совершенное множество) $\mathcal{C}$ 32
Кардинальное число 28
Квазикомпактное отображение 125
Класс эквивалентности 19
Классы F_a и G_a борелевских множеств 353
Колебание функции 217
Комбинаторная размерность пространства (dim χ) 313
Компактное (бикомпактное) пространство 55
Комплекс 316
Композиция отображений 20
Конгруэнтность по модулю идеала 19
Конфинальпое множество 33
Конъюнкция 9
Лемма Урысона 132
— Цорна 34
Линейно упорядоченное множество 33
Линейное множество 473
Локализация свойства 68
Локальная база 59
Локально борелевское множество 366
— замкнутое множество 70
— конечное семейство 55
σ-локально конечное семейство 55
Малые классы Бореля 463
n-мерный комплекс 317
Метризационная теорема Бинга — Нагата — Смирнова 245
Метризуемое топологическое пространство 215
Метрическое пространство 213
Многозначная функция 27

Множество Лебега 483
— открытое (замкнутое) по модулю множеств первой категории 92
— — — — — нигде не плотных множеств 74
— первой категории 86
— типа F_σ (типа G_σ) 52
— $E_{(n)}$ 284
F_σ - и G_σ -множество 428
Монотонное семейство множеств 33, 261, 272
Направленное множество 33
Наследственно нормальное (вполне нормальное) пространство 136
Насыщенная последовательность множеств 87
Нерв системы множеств 326
Непрерывное разбиение 194
— отображение 108, 109
Непрерывное отображение $\mathscr{L}^*$ -пространств 200
Непрерывно сходящаяся последовательность 206
— — — в узком смысле 210
Несравнимые подмножества 444
Нигде не плотное множество 71, 77
Нижний предел последовательности множеств (Li A_n) 343
Нормальное топологическое пространство 128
Область определения отображения 20
Обобщенная теорема продолжения Титце 158
Обобщенное прямое произведение 30
Обобщенный гомеоморфизм класса (α, β) 382
— шар 219
Образ множества 21
Обратный спектр 36
Объединение множеств 10
Ограниченное множество 216
Однородное множество 119
Окрестность точки 66
Операция Хаусдорфа 486
— $\underset{x}{\mathbf{E}}$ 12
— $\mathbf{S}(\boldsymbol{R})$ 13
— $\mathbf{P}(\boldsymbol{R})$ 13
($\mathfrak{A}$)-операция 37
$\mathfrak{M}$-операция Монтгомери 367
Отделимые множества 64
B-отделимые множества 495
Открытая область 80
— окрестность точки 66
Открытое множество 49
— отображение 121
Относительная окрестность точки 66
Относительно борелевские множества 53
— замкнутое множество 51
— открытое множество 51
Относительное замыкание 47
Отношение множеств 10
— рефлексивное 18
— симметричное 18
— транзитивное 18
— эквивалентности 18
— $\prec$ 478
Отображение (функция) 20
— B-измеримое класса α, 382
— подобия 33
Отображение-произведение 24, 31
Отрицание 9
Паракомпактное пространство 56
Пересечение множеств 10
Плотное в себе множество 83
Подбаза топологического пространства 58
Подобные (в комбинаторном смысле) системы множеств 131
— упорядочения 33
Подпокрытие 54
Покрытие пространства 54
Полиэдр 317
Полное метрическое пространство 415

Полунепрерывная многозначная функция 181
Полунепрерывное разбиение 194
Пополнение метрического пространства 420
Порядковое число 34
Порядковый тип 34
— — четный (нечетный) 375
Порядок значения B-измеримой функции 504
Предел обратного спектра 36, 166
— последовательности множеств ($\mathrm{Lim}\, A_n$) 347
— фильтра 68
Предельный порядковый тип 34
Продолжение отображения 20
Проективные множества 464
— функции высказываний 473
Проекция 193
Производное множество 81, 270
Прообраз множества 21
Просеивание через решето 41
Простой (невырожденный) комплекс "317
— — симплекс 314
Пространство 9
— близости 239
— веса $\aleph_0$ 59
— заведомо первой категории 525
— Линделёфа 56
— Тихонова 126
— удовлетворяющее первой аксиоме счетностн 59
— Фреше 32
— $\Phi(\chi, \mathcal{Y})$ 228, 418
— 2^x 168
— (2^x) 349
$\mathfrak{L}^*$-пространство 197
$\mathfrak{T}_0$-пространство 57
$\mathfrak{T}_1$-пространство 44
$\mathfrak{T}_3$-пространство 58
λ-пространство 526
ν-пространство 534
σ-пространство 532
Прямое произведение множеств 14
Прямолинейно достижимая точка 475
Псевдометрика 241
Псевдометрическое пространство 241
Равномерная структура 240
Равномерно непрерывное отображение пространств близости 240
Разбиение 21
— пространства 192
Разложение границы 73, 74
Разложимое множество 102, 267
Размерностное ядро пространства 307
Размерность пространства 282, 313
Разность множеств 10
— — симметричная 10
Разреженное множество 84
Расстояние 213
— между множествами (dist (A, B)) 223
Регулярная система множеств 37
Регулярное пространство 57
Результат $(\mathfrak{A})$-операции 37
— $\mathfrak{M}$-операции 367
Ретракт 112
Ретракция 112
Решето Лузина 41, 476
Свойство Бэра в узком смысле 98
— — — — — для отображений 412
— — — широком смысле 93
— — отображения 408
— C 537
— C" 536
— L 534
— λ' 530
Семейство аналитически представимых функций 401
— определяющее размерность пространства 308

— подмножеств данного множества 13
— — — .— аддитивное 14
— — — — наследственное 14
Сепарабельное пространство 72
Сеть 212
Сечение прямого произведения 150
Сильно непрерывное отображение 125
Симплекс 314
Слабо n-мерное пространство 308
Совершенное множество 83
Сосредоточенное пространство 535
Составляющая высказывания 329
Составляющие (конституанты) (CA)-множества 509
Составное отображение 24, 31
Строго монотонное семейство множеств 274, 275
Структурно нормальная структура 180
— регулярная структура 180
Сужение отображения 20
Существование неборелевских множеств 355
Сходящийся фильтр 68
Счетно-компактное пространство 55
— $\mathfrak{L}$*-пространство 202
Теорема Александрова 419
— Александрова — Хаусдорфа 459
— Банаха — Куратовского 542
— Банаха — Мазура 250
— Бернштейна 524
— Больцано — Вейерштрасса обобщенная 348
— Бара 425
— Веденисова 141
— Егорова 542
— Кантора 424
— Кантора — Бендиксона 261, 271
— Лаврентьева 439
—— Лебега — Хаусдорфа 402
— Линделёфа 60
— Лузина 92
— — о покрытии 511
— Лузина — Серпинского 510
— Мазуркевича 453
— Никодпма — Урысона 476
— обобщенная Пеано 158
— о полной метризации 419
— отделимости 289, 358, 495, 502
— — обобщенной (первая и вторая) 520
— Понтрягина — Нёбелинга 431
— продолжение Титце 134, 339
— — — обобщенная 158
— редукции 288, 358
— Серпинского — Зигмунда 433
— А. Стоуна 245
— Улама 91
— Урысона 249
— Хаусдорфа 420, 496
— Цермело 34
Тип непрерывности 439
Тихоновская топология 154
Топологическая группа 121
— эквивалентность 118
Топологически полное пространство 415
Топологический автоморфизм 117
— ранг 119
Топологическое пространство 44
Топологическое свойство 117
к-топология 183
λ-топология 183
Точка конденсации множества 260
— накопления 81
— порядка m 262
Трансфгнитная индукция 34
Ультрафильтр 14
Универсальная функция 376, 471
Уолменовская структура 110
Упорядочение 33
Упорядоченное множество 33
Условие Хедрика 63
— D_n 304
Факторсемейство 19

Фактор-топология 193
Фильтр 14
— максимальный (ультрафильтр) 14
— собственный 14
Формулы Моргана 10
— — обобщенные 11, 13
Фундаментальная последовательность 415
Функции высказываний 11
— — многих переменных 15
— — класса F_α (G_α) 371
— классов A и CA 522
Характеристическая функция множества 29, 115
Хаусдорфово пространство 55
Центрированное семейство множеств 14
Частично упорядоченное множество 33
Число $\alpha(A)$ 422
— $\rho(A,B)$ 218
Шар в метрическом пространстве 213
Эквивалентные множества 28
Экспоненциальная топология 168
Элемент полунепрерывности разбиения 194
Элементарные функции высказываний 517
Эффективность 261, 380, 405, 427, 525
Ядро пространства 84

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адисон (Addison J. W.) 479, 490, 495, 544, 552
Александров П. С. 36, 50, 57, 72, 118, 125, 128, 136, 183, 194, 197, 245, 282, 313, 315, 316, 326, 327, 337, 419, 453, 459, 473, 552, 553
Алексевич (Alexiewicz A.) 549, 551, 553
Алексия (Alexits G.) 446, 553
Альбукерк (Albuquerque J.) 66. 553
Антоновский М. Я. 199, 553, 579
Арене (Arens R.) 56, 553
Ароншайн (Aronszajn N.) 439, 553
Архангельский А В. 122, 245, 553
Ауль (Aull C. E.) 57, 553
Ауэрбах (Auerbach) 431
Банах (Banach S.) 87, 119, 120, 250, 397, 403, 431, 443, 473, 501, 542, 548—554
Безикович С. 508, 535, 554
Бендиксон (Bendixson L.) 261, 554
Берж (Berge C.) 183, 554
Бернштейн (Bernstein F.) 262, 524, 525, 554
Бет (Beth W. E.) 545, 554
Бинг (Bing R. H.) 139, 245, 554
Биркгоф (Birkhoff G.) 80, 212, 554
Блейк (Blake A.) 545. 554
Бокштейн М. Ф. 264, 554
Болтянский В. Г. 311, 553
Борель (Borel E.) 53, 203, 262, 537, 554
Борсук (Borsuk K.) 112, 252, 431, 551, 555
Брасслер (Brassier D. W.) 489, 555
Браун М. (Brown M.) 186
Браун С. (Braun S.) 428, 439, 508, 555
Брауэр (Brouwer L. E. J.) 282, 320, 321, 453, 546, 555
Брюнс (Bruns G.) 212, 555
Булиган (Bouligand G.) 183, 555
Бурбаки (Bourbaki N.) 14, 30, 56, 57, 68, 193, 240, 549, 5i5
Бэр (Baire R.) 86, 93, 97, 183, 220, 266, 379, 401, 403, 409, 425, 430, 555
Важевский (Wazewski T.) 348, 555
Вайдинатхасвами (Vaidyanathaswamy R.) 555
Вайнштейн И. А. 434, 443, 555
Валле-Пуссен (Vallee-Poussin Ch. de la) 397, 405, 555

Варашкевич (Waraszkiewicz Z.) 434, 439, 556
Веденисов Н. 140, 313, 556
Вейерштрасс (Weierstrass K. F.) 228
Вейль (Well A.) 240, 556
Витали (Vital! G.) 96, 556
Вопенка (Vopenka P.) 313, 556
Вулих Б. З. 549, 559
Вьеторис (Vietoris L.) 57, 168, 556, 574
Гагаев (Gagaeff B.) 384, 396, 556
Галчинская-Карлович (Galczynska-Karlowicz) 71
Рейтинг (Heyting A.) 546, 556
Гельфанд И. М. 550, 556
Генба (Geba K.) 551, 556
Гёдель (Gb'del K.) 490, 556
Гжегорчик (Grzegorczyk A.) 544, 548, 556
Гилман (Gillman L.) 164, 556
Гильберт (Hilbert D.) 67, 214, 557
Гранас (Granas A.) 551, 556, 557
Гримайзен (Grimeiseri G.) 212, 557
де Гроот (de Groot J.) 248, 557
Гросс (Gross W.) 271, 557
Гуревич (Hurewicz W.) 131, 184, 282, 297, 299, 300, 302, 308, 309, 311, 313, 323—325, 327, 431, 457, 490, 557, 558
Данжуа (Denjoy A.) 85, 86, 557
Данциг (van Dantzig) 119, 558
Даукер (Dowker C. H.) 134, 313, 558
Дей (Day M. M.) 68, 558
Джерисон (Jerison M.) 164, 556
Диксмье (Dixmier J.) 76, 558
Дугундьи (Dugundji J.) 56, 134, 553, 558
Дьедонне (Diedonne J.) 152, 558
Дэвис (Davis Л1.) 544, 558
Дюбуа-Реймон (du Bois-Reymond P.) 71, 558
Ефимов Б. А. 262, 579
Ефремович В. А. 219, 239, 558
Жордан (Jordan C.) 60, 558
Завадовский (Zawadowski W.) 572
Зальцвассер (Zalcwasser Z.) 268, 527, 558
Заранкевич (Zarankiewicz K.) 348, 366, 558
Зарелуа А. 325, 558
Зарицкий (Zarycki M.) 61, 66, 81, 84, 558
Зейферт (Seifert H.) 559
Зигмунд (Sygmund A.) 433, 550, 559, 571 З
оргенфрей (Sorgenfrey R. H.) 152, 559
Зоретти (Zoretti L.) 343, 559, 569
Исбелл (Isbell J. R.) 239, 559
Исеки (Iseki K.) 44, 559
Ист (Van Eest) 128, 559
Кантор (Cantor G.) 32, 49, 60, 81, 83, 84, 158, 203, 261, 262, 270, 380, 424, 559
Канторович Л. В 464, 479, 486, 522, 549, 559
Картан (Cartan H.) 14
Катетов (Katetov M.) 131, 139, 152, 164, 313, 559
Качмаж (Kaczmarz) 431
Келдыш Л. В. 379, 443, 560
Келли (Kelley J. L.) 34, 58, 82, 86, 136, 152, 193, 195, 212, 560
Кемписти (Kempisty S.) 397, 560
Керне (Cairns S. S.) 560
Кли (Klee V.) 473, 560
Клинч (Kleene S. C.) 479, 543, 544, 548, 552, 560
Кнастер (Knaster B.) 64, 262, 309, 318, 321, 560
Ковальский (Kowalsky H. J.) 135, 212, 560
Колмогоров А. Н., 57, 486, 549, 560
Кондо (Kondo M.) 502, 560
Коэн (Cohen P. J.) 35, 579
Красносельский М. А., 551, 560
Кунугуи (Kunugui K.) 233, 309, 560
Куратовский (Kuratowski K.) 9, 17, 34, 44, 48, 63, 79, 94, 120, 131,

153, 180, 181, 183, 194, 229, 233, 239, 253—257, 259, 262, 270—273, 288, 318, 321, 327, 329, 339, 361, 363, 367, 371, 380, 382, 383, 387, 388, 393, 405, 408, 409, 419, 422, 431, 436, 443—447, 458, 461, 462, 471, 473, 476—480, 483, 486, 490, 506, 510, 513, 518, 521, 524, 526, 535, 542, 548, 554, 560—562, 566, 567, 571, 574, 578
Лаврентьев М. А 439, 441, 442, 464, 562
Лангфорд (Langford C. H.) 546, 563
Лебег (Lebesque H.) 79, 93, 96, 97, 158, 262, 323, 354, 373, 377, 382, 384, 387, 402, 483, 493, 500, 562
Левин (Levine N.) 76, 562
Левшенко Б. 325, 562
Лере (Leray J.) 551, 562
Лефшец (Lefschetz S.) 339, 562
Лпвенсон Е. М. 464', 479, 486, 559
Линделёф (Lindelof *E.*) 60, 260, 261, 562
Лииденбаум (Lindenbaum A.) 213, 434, 436, 563
Локуциевский О. 313, 563
Лузин Н. Н. 37, 41, 92, 99, 265, 356, 373, 379, 458, 464, 471, 476, 477, 479, 483, 493, 495, 500, 502, 504, 508—513, 528, 532 534, 539, 563, 573
Лунц А. 313, 563
Льюис (Lewis C. I.) 546, 563
Любек (Lubben R. G.) 348, 563
Люстерник Л. А. 551, 563
Ляпунов А. А. 486, 521, 563
Мазур (Mazur S.) 250, 549, 550, 564
Мазуркевич (Mazurkiewicz S.) 64, 318, 321, 431, 434, 441, 453, 455, 476 490, 491, 530, 532, 560, 564
Майкл (Michael E.) 152, 168, 169, 176, 180, 183, 245, 367, 564
Макки (Mackey G. W.) 462, 564
МакКинси (McKinsey J. C. C.) 44, 48 180, 546 547 564
МакШейн (McShane E. J.) 212, 564
Мало (Mahlo P.) 119, 524, 565
Мамузич (Mamuzic Z. P.) 565
Мартин (Martin A. V.) 245, 565
Марчевский (Marczewski E.) 164, 264, 565
Матоба (Matoba K.) 76, 577
Менгер (Menger K.) 138, 282, 285, 297, 299, 303, 307—311, 565
Минусинский (Mikusiriski J.) 549, 565
Монтгомери (Montgomery D.) 121, 127, 367, 388, 393, 565
Монтейро (Monteiro A.) 44, 50, 565
Морнта (Monta K.) 131, 152, 245, 313, 565
Мостовский (Moslowski A.) 544, 545, 566
Мрувка (Mrowka S.) 164, 212, 239, 241, 242, 566, 578
Мур Р. (Moore R. L.) 194, 415. 566
Мур Э. (Moore E. H.) 44, 183, 212, 566
Нагами (Nagami K.) 367, 566
Нагата (Nagata J.) 245. 566
Нейбауэр (Neubaucr M.) 523, 565
фон Нейман (von Neumann J.) 486, 549, 566
Нсыыцкий В. В. 128
Нёбеликг (Nobeling G.) 44, 58, 180, 566
Никодим (Nikodym O.) 99, 408, 476, 479, 566, 567
Нитка (Nitka W.I 253, 567
Новак (Novak J.) 127, 567
Новиков П. С. 490, 493, 495, 520, 521, 563, 567
Ньюман (Newman M. H. A.) 221, 567
Окстоби (Oxtoby J. C.) 86, 151, 567
Орей (Orey S.) 545, 567
Орлич (Orlicz) 431, 549, 564, 567
Отто (Otto E.) 301, 303, 567
Пасынков Б. А. 313, 567
Паттерсон (Patterson E. M.) 567

Пеано (Peano G.) 158, 567
Пенлеве (Painleve P.) 343, 567
Пинскер А. Г. 549, 559
Позамент (Posament T.) 361, 363, 567
Помпейю (Pompeju D.) 223, 568
Пондичери (Pondiczery E.) 164, 568
Пономарев В. И. 183, 568
Понтряпш Л. С. 121, 127, 311, 568
Попруженко (Poprougenko G.) 303, 535, 537, 568
Проскуряков Ю. М. 313, 568
Пуанкаре (Poincare H.) 116, 282, 326, 568
Расёва (Rasiowa H.) 44, 545, 547, 568
Ренни (Rennie В. С.) 180, 568
Рибейро (Ribeiro H.) 68, 568
Ригер (Rieger L.) 545, 568
Рисе (Riesz F.) 44, 569
Роберте (Roberts J. H.) 415, 569
Роджерс (Rogers С. А.) 489, 569
Розенталь (Rosenthal A.) 569, 576
Рои (Roy P.) 313, 569
Ротбергер (Rothberger F.) 531, 532, 536, 569
Рунге (Runge) 337, 569
Рыль-Нардзевский; (Ryil-Nardzewski С.) 480, 545, 569
Сакс (Saks S.) 204, 259, 431, 506, 507, 534, 55i, 569
Сампеи (Sampei I.) 493, 502, 513, 569
Саръшсаков Т. А. 553
Себаштиан-и-Сильва (Sebastiao-e-Silva) 56, 569
Селивановский (Selivanowski E.) 264, 569
Ссмаденн (Semadeni Z.) 84, 569
Серпинский (Sierpiriski W.) 37, 39, 50, 63, 72, 86, 92, 94, 99, 239, 248, 250, 262, 264, 265, 270, 271, 274, 290 292, 296, 352, 354, 356, 358, 364, 373, 376, 380, 382, 390, 393, 397, 413, 415, 428, 433, 434, 436, 438, 439, 441, 443, 444, 446, 458, 464, 466, 477, 490, 491, 493, 495, 501, 506, 510, 513, 519, 524, 527, 528, 530, 531, 532, 535, 537, 539, 542, 563, 564, 569—572
Сикорский (Sikorski R.) 44, 124, 256, 545, 547, 568, 572
Симмонс (Simmons G. F.) 572
Сион (Sion M.) 489, 555, 572
Сирота (Shirota T.) 164, 572
Скляренко Е. 325, 572
Скотт (Scott D.) 480, 572
Словиковский (Slowikowski W.) 572
Смирнов Ю. М. 239, 241, 2-15. 313, 325, 572
Смит (Smith H. L.) 183, 212, 566
Соболев С. Л. 549, 572
Спенсер (Spencer G. L.) 576
Стинрод (Steenrod N.) 36, 573
Стоилов (Stoilow S.) 122, 573
Стоун А. (Stone A. H.) 61, 245, 458, 501, 573
Стоун М. (Stone M. H.) 80, 545, 546, 573
Стразер (Strother W. L.) 183, 573
Судзуки (Suzuki J.) 502, 573
Суслин М. 37, 464, 490, 497, 500, 573
Тайманов А. Д. 443, 573
Такки (Tukey V. W.) 212, 573
Тан Цяо-чен (Tang Tsao-Chen) 547, 573
Тарский (Tarski A.) 17. 44. 48, 80, 84. 160, 371, 473, 546. 547, 564, 573, 574
Тптце (Tietze H.) 57, 128, 134, 136, 574
Тихонов А. Н. 126. 129, 154, 183, 551, 574
Трелъфадль (Threlfall \V.) 559
Трон (Thron W. J.) 57. 553
Тугуе (Tugue T.) 486, 574
Тулмин (Tonlniin С. Н.) 325, 574
Тумаркин Л. А 285, 297, 299, 300, 307, 308, 441, 574
Уайберн (Whyburn G. T.) 122, 125, 194, 195, 309, 574

Уилсон (Wilson W. A.) 213, 574
Улам (Ulam S) 86, 91, 92, 153, 255—257, 542, 567, 574
Уоллес (Wallace A. D.) 72, 122, 124, 574
Уолмен (Wallman H.) 180. 282, 311, 557, 575
Урысон П. С. 72, 126, 132, 134, 136, 139, 140, 197, 199, 245, 249, 250, 282, 285, 295, 207, 300, 303, 308, 3-18, 453, 476, 553, 575
Успенский В. А. 544, 548, 576
Ферecc (Veress P.) 334, 575
Флаксмайер (Flachsmeyer J.) 212, 575
Фокс (Fox R. H.) 209, 575
Франц (Franz W.) 575
Фрейденталь (Freudenthal H.) 128, 559
Фреше (Frechet M.) 44, 63, 67, 72, 85, 119, 197, 198. 213. 222, 228, 245, 415, 575
Фринк (Frink O.) 168, 176, 180, 575
Фролик (Frolik Z.) 212, 489, 575
Халмош (Halmos P. *R.*) 80, 575
Хан (Hahn H.) 93. 1S3, 206. 220, 229, 396, 417, 509, 575, 576
Ханаи (Hanai S.) 245. 565. 576
Ханнер (Manner O.) 134, 576
Хартман (Hartman S.) 480, 576
Хаусдорф (Hanscdorff F.) 37, 53, 59, 67, 101, 106, 108, 213, 218, 220, 223, 224, 253, 263, 268, 342, 343, 345, 348, 353, 393, 394, 402, 405, 415, 419, 420, 424, 428, 443, 445, 454, 457, 459, 464, 486, 495, 522, 527, 576
Хедрик (Hedrick E. R.) 63, 576
Хелмберг (Helmberg G.) 212, 576
Хеммер (Hammer P. C) 44, 48, 49, 61, 576
Хилгерс (Hilgers A.) 311, 576
Хилтон (Hilton P. J.) 28, 576
Хокинг (Hocking- J. D.) 576
Холл (Hall D. W.) 576
Хопф (Hopf H.) 57, 125, 128 315, 316, 337, 553
Хыопт (Hcwitt E.) 127, 164. 576
Циппин (Zinpin L.) 121, 127 565 577
Чассар (Csaszar A.) 240, 577
Чепмен (Chapman T. A.) 48, 76 577
Чех (Chech E.) 47. 130, 139. 140, 313, 577
Читтснден (Chittenden) 245, 577
Чода (Choda H.) 76, 577
Шаудер (Schauder J.) 501, 551, 562, 577
Шварц (Schwartz L.) 549, 577
Шенфлис (Schonflies A.) 524, 577
Шеффер (Scheeffer L.) 524, 577
Шмидт (Schmidt J.) 212, 555, 577
Шнейдер В. Е. 489, 577
Шнирельман Л. Г. 551, 563
Шоке (Choquet G.) 168, 212, 489, 578
Шпернер (Sperner E.) 318, 578
Шпильрайн-Марчевский (Szpilrajn-Marczewski E.) 33, 86, 94, 95, 99, 101, 264, 370, 390, 471, 530, 532, 535, 537, 538, 541, 542, 564, 568, 578
Шрёаср (Schroder E.) 17, 578
Штейнгауз (Steinhaus H.) 431, 550, 554, 578
Эйленберг (Eilsnberg S.) 36, 301, 567, 573
Энгелькинг (Engelkinpr R.) 164. 190, 345, 379, 578
Эрдёш (Erdos P.) 311, 578
Юнг (Young W. H.) 52, 60, 82, 260, 267, 353, 455, 576, 578
Янишевскйй (Janiszcwski S.) 73, 578
Янковский (Jankowski A.) 551, 556

К. КУРАТОВСКИЙ

Топология

TOPOLOGY

VOLUME I

K. KURATOWSKI

Professor of Mathematics,
University of Warsaw

New edition, revised and augmented

1966
ACADEMIC PRESS
NEW YORK AND LONDON
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

К. КУРАТОВСКИЙ

ТОПОЛОГИЯ

том 1

Перевод
М. Я. Антоновского

С предисловием
П. С. Александрова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1966

УДК 513.83

Монография известного ученого, вице-президента Академии наук Польской Народной Республики, академика Казимира Куратовского — выдающееся явление в математической литературе. Она представляет собой наиболее полное и легко читаемое сочинение, охватывающее большинство разделов современной топологии.

Монография выдержала три издания на французском языке (третье издание — Варшава, 1961). Текст первого тома значительно переработан автором и подготовлен для одновременного издания на русском и английском языках. В настоящее время автор работает над рукописью второго тома.

Книга заинтересует всех математиков, начиная от студентов и кончая специалистами, так как в последние годы топологические методы проникли почти во все отрасли математики.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Двухтомная книга выдающегося польского математика К. Куратовского „Топология“ занимает в математической литературе особое положение. Это — исключительный по богатству материала трактат по теоретико-множественной топологии, включающий в себя и дескриптивную теорию множеств, написанный одним из крупнейших мировых специалистов в этой области, написанный с исключительной тщательностью, точностью и безукоризненной обработкой всех деталей, словом, со всеми теми особенностями изложения, которые так характерны для работ, вышедших из польской теоретико-множественной школы, особенностей, которые делают книгу, вышедшую из этой школы, я бы сказал, верным другом ее читателя.

Замечательная книга Куратовского и является таким именно другом, на которого можно положиться, который никогда не подведет и всегда поможет и начинающему математику, пожелающему, не испугавшись ее объема, перейти от начального знакомства с предметом к систематическому доскональному изучению всех его разветвлений, и математику, уже давно работающему в данной области, которому необходима какая-нибудь справка или который нуждается в самом отшлифованном доказательстве какой-нибудь даже довольно специальной теоремы, — каждый найдет в этой книге то, что он в ней ищет.

Топология Куратовского — это книга, имеющая большую историю. Первое издание ее первого тома вышло более тридцати лет тому назад. Первый том состоит из трех больших частей (автор скромно называет их главами). Первая глава содержит изложение теории топологических пространств на основе давно уже ставшей классической аксиоматики операции замыкания, предложенной Куратовским еще в 1922 году. Во второй главе автор строит топологию метрических пространств преимущественно со второй аксиомой счетности. Третья глава первого тома посвящена полным метрическим пространствам; она, в частности, содержит чрезвычайно полное изложение дескриптивной теории множеств (начатое уже в конце второй главы). Рукопись второго тома была закончена (в первом издании) непосредственно перед началом войны — в 1939 году и, к счастью, уцелела от ужасов войны. Невозможно без волнения читать относящиеся сюда строки предисловия автора ко второму тому.

Первая глава второго тома посвящена компактным метрическим пространствам. Вторая и третья главы второго тома (связные и локально связные пространства) посвящены вопросам, так или иначе группирующимся вокруг понятия связности. Эти вопросы составляют центральную часть той топологической дисциплины, которая обычно не совсем правильно называется „топологией континуумов“. Польская математика может гордиться тонкими и глубокими результатами, полученными в этой области польскими учеными, среди которых результаты автора данной книги занимают одно из самых первых мест. Изложение всего этого круга вопросов с той полнотой, с которой оно сделано в „Топологии" Куратовского, совершенно уникально.

Следующие две главы второго тома посвящены гомотопическим вопросам общей топологии (ретракты, отображения в сферу, стягиваемые и уникогерентные пространства, когомотопические группы и др.).

Наконец, последняя глава занимается топологией плоскости. Заметим, что вопросы теории размерности трактуются как в первом, так и во втором томе — во второй главе первого и в первой главе второго тома.

Двухтомная книга Куратовского пережила несколько изданий. Настоящее издание является пятым для первого и четвертым для второго тома. Оно одновременно выходит на русском языке и на английском. Во всех изданиях общий план и дух книги остались неизменными, но произошло большое пополнение ее содержания, приведенного в соответствие с современным развитием той области математики, которой книга посвящена. В частности, значительно расширена трактовка вопросов теории топологических пространств. Однако при этом расширении содержания книга Куратовского сохранила свое лицо: это лицо польской топологической школы. Традиции этой школы, заложенные еще ее основателями — Янишевским, Мазуркевичем и Серпинским, затем так глубоко и блестяще продолженные крупнейшими польскими учеными следующих поколений — Куратовским, Кнастером, Борсуком и, наконец, современными молодыми польскими математиками, живы в трактате Куратовского.

Этот трактат, при всей своей полноте, не является энциклопедией, регистрирующей без пропуска все, что сделано в теоретико-множественной топологии, — напротив, он отражает вкус автора и вкус школы, из которой он вышел и которую он так блестяще представляет. Разные направления теоретико-множественной топологии отражены с неодинаковой полнотой, но это разнообразие всегда является внутренне мотивированным и творчески оправданным. В частности, ни в одной книге по топологии, кроме этой, мы не найдем дескриптивной теории множеств, рассматриваемой как часть топологии, и это составляет одну из очень ценных особенностей замечательного труда, предлагаемого ныне вниманию советского читателя. Можно не сомневаться в том, что эта книга будет иметь такой же огромный успех, как тот, который она имеет у себя на родине и среди математиков других стран. Несомненно, для очень многих советских ученых, работающих в самых различных областях математики, „Топология" Куратовского в ее русском переводе станет настольной книгой.

П. Александров

Болшево — Комаровка,
4 октября 1965 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ТОМУ

Этот том состоит из трех глав.

Первая глава посвящена в основном общим топологическим пространствам. Однако в ней рассматриваются также более специальные топологические пространства, такие, как $\mathcal{T}_1$-пространства, регулярные пространства, вполне регулярные и нормальные пространства. Кроме того, в этой главе рассмотрен ряд фундаментальных понятий, таких, как база, подбаза, покрытие, непрерывное отображение, и ряд операций, таких, как прямое произведение $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, операции $2^{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}/\rho$ (фактортопология).

В этой и следующих главах мы существенно используем алгебру с замыканием. А именно мы старались выразить — там, где это было возможно и удобно, — наши определения, теоремы и доказательства в терминах алгебры Буля с операцией замыкания. Таким образом, в частности, выражены аксиомы топологического пространства.

Вторая глава посвящена изучению метрических пространств. Она начинается с изучения более общих пространств, в основе определения которых лежит понятие предела. В разделах Б и В пространство предполагается сепарабельным метрическим. Здесь же изучаются проблемы мощности и размерности. Часть раздела, посвященного теории размерности, имеет комбинаторный характер (с такими понятиями, как симплекс, комплекс, полиэдр и т. д.). Однако мы не используем алгебраических методов (группы гомологий и когомологий и т. д.), которые потребовали бы специальных рассмотрений, выходящих за рамки этой книги.

Последний параграф второй главы посвящен теории борелевских множеств, функциям Бэра и связанным с ними вопросам. Их изучение мотивируется необходимостью построения общей теории отображений, которые не предполагаются непрерывными. Поэтому этот раздел весьма отличается от предыдущих, которые носят более геометрический характер. Читатель, не интересующийся общей теорией функций, может опустить этот раздел.

В главе 3 изучаются полные пространства. Значительная часть этой главы посвящена проблемам общей теории функций, которые можно сформулировать в топологических терминах. Здесь мы рассматриваем аналитические и проективные множества, а также связанные с ними вопросы. Стоит заметить, что недавно эти понятия получили интересные приложения в математической логике.

В конце тома имеется добавление, состоящее из двух частей. Первая часть, посвященная приложениям топологии в математической логике, любезно написана профессором Мостовским. Вторая часть, написанная профессором Сикорским, посвящена приложениям топологии к функциональному анализу.

Второй том этой книги будет посвящен (как и во французском издании) понятиям компактности, связности, локальной связности, а также некоторым проблемам ретракции, теории гомотопий и когомотопий, проблемам n-мерных евклидовых пространств, особенно в применении к комплексной числовой плоскости.

Читатель, знакомый с французским изданием этой книги, безусловно заметит, что значительная часть материала, касающегося метрических пространств, обобщена на случай топологических пространств и помещена в первой главе (поэтому первая глава выросла до 153 стр.).

Автор понимает, что этот процесс обобщения теорем о метрических пространствах на случай топологических пространств не закончен. Однако, чтобы полностью завершить такое обобщение, пришлось бы отложить опубликование этой монографии на неопределенное время, а это неудобно как для автора, так и для издателей.

Заметим, что значительная часть материала главы 1 не содержится во французском издании этой книги. Многие теоремы § 17 и 18 были получены совсем недавно (некоторые из них — самим автором).

В конце книги приводится обширный список литературы, содержащий наиболее известные монографии и учебники по топологии. На некоторые из них автор часто ссылается в тексте.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность издательству „Мир“ и профессору М. Я. Антоновскому за помощь в подготовке нового издания этого тома на русском языке, а также доктору Энгелькингу и пани Карлович за многочисленные ценные замечания.

Выражаю свою признательность многим коллегам, которые помогли мне в подготовке прежних французских изданий этой книги, впервые изданной в 1933 году. Особенно я обязан Чеху, Гуревичу, Кнастеру, Отто, Позаменту, Марчевскому, Зигмунду, Сикорскому, Расёвой, Чассару, Катетову, Мазуру и Мрувке.

К. Куратовский

Варшава,

декабрь, 1963 г.

ВВЕДЕНИЕ

Здесь мы напомним некоторые обозначения и элементарные теоремы общей теории множеств и алгебры логики (см. Куратовский [45]).

Понятия теории множеств постоянно используются в этой книге (за исключением $(\mathcal{A})$-операции, которая является более специальной), а обозначения алгебры логики применяются там, где это ведет к упрощению рассуждений (например, в § 31 и в § 37—40).

§ 1. Операции логики и теории множеств

I. Алгебра логики. Пусть α и β — два *высказывания* (*предложения*). Обозначим через $\neg\alpha$, или α', *отрицание* α (т. е. „не α“), через $\alpha \vee \beta$ — *дизъюнкцию* („α или β“), через $\alpha \wedge \beta$ — *конъюнкцию* („α и β“). Отношение $\alpha \Rightarrow \beta$ означает, что α *влечет за собой* β, а отношение $\alpha \equiv \beta$ означает, что α *эквивалентно* β.

Справедливы следующие теоремы:

$$\neg\neg\alpha \equiv \alpha \quad \text{(закон двойного отрицания);}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv [(\neg\beta) \Rightarrow (\neg\alpha)] \quad \text{(закон ложного положения);}$$

$$\left.\begin{aligned} \neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta), \\ \neg(\alpha \vee \beta) &\equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta) \end{aligned}\right\} \quad \text{(законы Моргана);}$$

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv [(\neg\alpha) \vee \beta], \quad [\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)] \equiv [(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)].$$

Каждое высказывание имеет или значение 1 („истинное“), или значение 0 („ложное“). Мы имеем

$$\alpha \wedge (\neg\alpha) \equiv 0 \quad \text{(закон противоречия);}$$

$$\alpha \vee (\neg\alpha) \equiv 1 \quad \text{(закон исключенного третьего).}$$

II. Алгебра множеств. Обозначим через 1 некоторое заданное множество (рассматриваемое далее как *пространство*). Элементы этого множества обозначаются строчными буквами a, b, x, y, ..., подмножества — заглавными буквами A, B, X, ..., семейства множеств — жирным шрифтом: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}, \ldots$. Запись $x \in A$ означает, что x есть элемент множества A (принадлежит множеству A); $A \cup B$ обозначает *объединение* множеств A и B, т. е. множество элементов, принадлежащих либо множеству A, либо множеству B; $A \cap B$ — *пересечение* множеств A и B, т. е. множество элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B; $A - B$ *есть разность* множеств A и B, т. е. множество элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B. *Пустое* множество обозначается через 0. Запись $A \subset B$ означает, что множество A есть *подмножество* множества B (*содержится* в множестве B). *Дополнением* к множеству A называется множество $-A = 1 - A$ (обозначаемое также через A^c). *Отношение* $A : B$, по определению, равно $A \cup (-B)$. Наконец, *симметричная разность* определяется равенством $A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A)$[1]).

Имеют место следующие тождества (устанавливающие *двойственность* между алгеброй логики и алгеброй множеств):

$$x \in (-A) \equiv \neg(x \in A); \qquad x \in (A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B);$$
$$x \in (A \cap B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B); \qquad (x \in 1) \equiv 1; \quad (x \in 0) \equiv 0;$$
$$(A \subset B) \equiv [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)]; \quad (A = B) \equiv [(x \in A) \equiv (x \in B)].$$

Отметим следующие формулы:

$$A \cup (-A) = 1, \quad A \cap (-A) = 0, \quad -(-A) = A,$$
$$A = (A \cap B) \cup (A - B), \quad (A \cap B) \subset A \subset (A \cup B),$$
$$\left.\begin{aligned} -(A \cup B) &= (-A) \cap (-B) \\ -(A \cap B) &= (-A) \cup (-B) \end{aligned}\right\} \text{— формулы Моргана,}$$
$$-(A : B) = B - A, \qquad A : 1 = A, \qquad A : 0 = 1,$$
$$(A - B) \cup B = A \cup B, \qquad (A : B) \cap B = A \cap B,$$
$$A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C, \qquad A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C),$$
$$(A \subset B) \equiv [(A \cup B) = B] \equiv [(A \cap B) = A] \equiv (A - B = 0),$$
$$(A \subset C) \wedge (B \subset D) \Rightarrow [(A \cup B) \subset (C \cup D)] \wedge [(A \cap B) \subset (C \cap D)],$$
$$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \equiv (A \cup B) \subset C,$$
$$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \equiv C \subset (A \cap B).$$

Множества A и B называются *непересекающимися*, если $A \cap B = 0$. Множество, состоящее из одного элемента a, обозначается (a).

---

[1]) В советской математической литературе употребляются следующие обозначения: вместо $A - B$ пишут $A \setminus B$, вместо $-A$ пишут CA и вместо $A \dot{-} B$ пишут $A \Delta B$. — *Прим. перев.*

III. Функции высказываний. Пусть $\varphi(x)$ — *функция высказываний*, переменная которой x изменяется на пространстве 1 (непустом). Выражение $\varphi(x)$ обозначает некоторое условие: если x удовлетворяет этому условию, то $\varphi(x)$ становится истинным высказыванием; в противном случае оно становится ложным высказыванием. Так, например, $x > 0$ есть функция высказывания (в пространстве действительных чисел).

Запись $\bigvee\limits_x \varphi(x)$ означает: существует элемент x, такой, что $\varphi(x)$ (т. е. элемент x, удовлетворяющий рассматриваемому условию).

Запись $\bigwedge\limits_x \varphi(x)$ означает: для каждого элемента x мы имеем $\varphi(x)$ (т. е. каждый элемент x удовлетворяет рассматриваемому условию)[1].

Например: $\bigwedge\limits_x (x+1 > x)$, $\bigvee\limits_x (x^2 = 1)$.

Легко доказать следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \neg\Big[\bigvee_x \varphi(x)\Big] &\equiv \bigwedge_x [\neg\varphi(x)], \\ \neg\Big[\bigwedge_x \varphi(x)\Big] &\equiv \bigvee_x [\neg\varphi(x)] \end{aligned}\right\} \text{(обобщенные формулы Моргана),}$$

$$\Big[\bigwedge_x \varphi(x)\Big] \Rightarrow \Big[\bigvee_x \varphi(x)\Big], \qquad \Big[\bigvee_x \varphi(x)\Big] \vee \Big[\bigvee_x \psi(x)\Big] \equiv \bigvee_x [\varphi(x) \vee \psi(x)],$$

$$\Big[\bigwedge_x \varphi(x)\Big] \wedge \Big[\bigwedge_x \psi(x)\Big] \equiv \bigwedge_x [\varphi(x) \wedge \psi(x)],$$

$$\bigvee_x [\varphi(x) \wedge \psi(x)] \Rightarrow \Big[\bigvee_x \varphi(x)\Big] \wedge \Big[\bigvee_x \psi(x)\Big],$$

$$\Big[\bigwedge_x \varphi(x) \vee \bigwedge_x \psi(x)\Big] \Rightarrow \bigwedge_x [\varphi(x) \vee \psi(x)].$$

Кванторы $\bigvee$ и $\bigwedge$ являются обобщениями связок $\vee$ и $\wedge$. А именно, если пространство 1 конечно, скажем $1 = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, то

$$\bigvee_x \varphi(x) \equiv \varphi(a_0) \vee \varphi(a_1) \vee \ldots \vee \varphi(a_n),$$

$$\bigwedge_x \varphi(x) \equiv \varphi(a_0) \wedge \varphi(a_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(a_n).$$

Очевидно, любое высказывание α можно рассматривать как функцию высказывания (которая тождественно истинна или тождественно ложна). Таким образом, мы имеем

$$\bigvee_x \alpha \equiv \alpha \equiv \bigwedge_x \alpha, \qquad \bigvee_x [\alpha \wedge \varphi(x)] \equiv \alpha \wedge \bigvee_x \varphi(x),$$

$$\alpha \vee \bigwedge_x \varphi(x) \equiv \bigwedge_x [\alpha \vee \varphi(x)].$$

---

[1]) Вместо символов $\bigvee\limits_x$ и $\bigwedge\limits_x$ употребляются также символы $\exists^x$ и $\forall^x$.

IV. Операция $\underset{x}{\mathsf{E}}$. Символ $\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)$ означает множество всех x, таких, что $\varphi(x)$[1]). Например, множество $\underset{x}{\mathsf{E}}\,(x>0)$ есть множество положительных чисел. Множество $\underset{x}{\mathsf{E}}\,(x^2=x)$ состоит из двух чисел 0 и 1.

Легко доказать следующие формулы:

$$t\in\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)\equiv\varphi(t), \tag{1}$$

$$\underset{x}{\mathsf{E}}\,[\neg\,\varphi(x)]\equiv-\left[\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)\right], \tag{2}$$

$$\underset{x}{\mathsf{E}}\,[\varphi(x)\vee\psi(x)]=\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)\cup\underset{x}{\mathsf{E}}\,\psi(x), \tag{3}$$

$$\underset{x}{\mathsf{E}}\,[\varphi(x)\wedge\psi(x)]=\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)\cap\underset{x}{\mathsf{E}}\,\psi(x). \tag{4}$$

V. Бесконечные операции на множествах. Пусть задано множество T. Поставим в соответствие каждому $t\in T$ множество A_t (подмножество пространства 1). Множества $\bigcup\limits_t A_t$ и $\bigcap\limits_t A_t$ определяются следующим образом:

$$\left(x\in\bigcup_t A_t\right)\equiv\bigvee_t\left(x\in A_t\right),\qquad\left(x\in\bigcap_t A_t\right)\equiv\bigwedge_t\left(x\in A_t\right). \tag{1}$$

Очевидно, что если множество T — конечное, скажем $T=(1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$, то мы имеем

$$\bigcup_t A_t=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n,\qquad\bigcap_t A_t=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n.$$

В случае, когда T — множество положительных целых чисел, вместо t можно использовать переменную n и писать

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\ \text{ вместо }\ \bigcup_t A_t\ \text{ и }\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\ \text{ вместо }\ \bigcap_t A_t.$$

Существуют две важные счетные операции:

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\ \bigcap_{k=0}^{\infty}A_{n+k}\quad\text{и}\quad\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\ \bigcup_{k=0}^{\infty}A_{n+k}.$$

Если $\operatorname*{Lim\,inf}\limits_{n\to\infty}A_n=\operatorname*{Lim\,sup}\limits_{n\to\infty}A_n$, то последовательность $A_0, A_1, \ldots$ называют *сходящейся* и пишут

$$\operatorname*{Limes}_{n\to\infty}A_n=\operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty}A_n=\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty}A_n.$$

---

[1]) Вместо символа $\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)$ часто употребляется символ $\{x:\varphi(x)\}$.

В силу соотношений (1), мы получаем двойственные формулы к формулам п. III, заменяя $\varphi(x)$ на A_t, символ $\bigvee_x$ — на символ $\bigcup_t$ и т. д. Например, обобщенные формулы Моргана приобретают следующий вид:

(2) $$-\bigcup_t A_t = \bigcap_t (-A_t),$$

(3) $$-\bigcap_t A_t = \bigcup_t (-A_t).$$

Добавим еще следующие формулы:

(4) $$\bigwedge_t (A_t \subset B) \equiv \left[\left(\bigcup_t A_t\right) \subset B\right],$$

(5) $$\bigwedge_t (B \subset A_t) = \left[B \subset \bigcap_t A_t\right].$$

Наряду с операциями $\bigcup_t A_t$ и $\bigcap_t A_t$ рассмотрим операции $\mathsf{S}(R)$ и $\mathsf{P}(R)$ на семействах подмножеств данного множества 1. А именно $\mathsf{S}(R)$ есть объединение и $\mathsf{P}(R)$ — пересечение всех множеств, принадлежащих семейству R, т. е.

$$[x \in \mathsf{S}(R)] \equiv \bigvee_X (x \in X \in R);$$

$$[x \in \mathsf{P}(R)] \equiv \left[\bigwedge_X (X \in R) \Rightarrow (x \in X)\right].$$

Итак, если семейство R конечное: $R = (A_1, \ldots, A_n)$, то

$$\mathsf{S}(R) = A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(R) = A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Если семейство R пустое, то

$$\mathsf{S}(R) = 0 \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(R) = 1.$$

Если элементами семейства R являются множества A_t, где $t \in T$, то $\mathsf{S}(R) = \bigcup_t A_t$ и $\mathsf{P}(R) = \bigcap_t A_t$.

VI. Семейство всех подмножеств данного множества. Это семейство будет обозначаться через $(2^X)_{\text{set}}$ или просто через 2^X там, где не может возникнуть путаницы (индекс используется для того, чтобы отличить это семейство от пространства всех замкнутых подмножеств множества X, которое будет изучено позже). Таким образом,

(1) $$A \in 2^X \equiv A \subset X.$$

Из V(4) следует, что

(2) $$\left(\bigcup_t A_t\right) \in 2^B \equiv \bigwedge_t (A_t \in 2^B).$$

Согласно V(5), имеем

(3) $$2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B \quad \text{и вообще} \quad 2^{\bigcap A_t} = \bigcap 2^{A_t},$$

где $t \in T$. Очевидно, что $\mathsf{S}(2^X) = X$.

VII. Идеалы. Фильтры. Непустое семейство $\boldsymbol{R}$ подмножеств данного множества X называется *идеалом*, если оно *наследственное* и *аддитивное*, т. е. если

(1) *из* $A \in \boldsymbol{R}$ *и* $B \subset A$ *следует, что* $B \in \boldsymbol{R}$;

(2) *из* $A \in \boldsymbol{R}$ *и* $B \in \boldsymbol{R}$ *следует, что* $(A \cup B) \in \boldsymbol{R}$.

Идеал называется *собственным*, если $X \notin \boldsymbol{R}$. Собственный идеал называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале; это эквивалентно тому, что

(3) *либо* $A \in \boldsymbol{R}$, *либо* $(-A) \in \boldsymbol{R}$ *для каждого множества* $A \subset X$.

Можно показать (с помощью аксиомы выбора), что *каждый собственный идеал содержится в некотором максимальном идеале.*

Понятие фильтра двойственно понятию идеала. А именно (непустое) семейство $\boldsymbol{S}$ подмножеств из X называется *фильтром*[1]) (см. Бурбаки [1], гл. I, § 6, n° 1), если

(4) *из* $A \in \boldsymbol{S}$ *и* $A \subset B$ *следует, что* $B \in \boldsymbol{S}$;

(5) *из* $A \in \boldsymbol{S}$ *и* $B \in \boldsymbol{S}$ *следует, что* $(A \cap B) \in \boldsymbol{S}$.

Фильтр называется *собственным*, если $0 \notin \boldsymbol{S}$. Собственный фильтр называется *максимальным* (или *ультрафильтром*), если он не содержится ни в каком другом собственном фильтре; это эквивалентно тому, что

(6) *либо* $A \in \boldsymbol{S}$, *либо* $(-A) \in \boldsymbol{S}$ *для каждого множества* $A \subset X$.

Очевидно, что *семейство* $\boldsymbol{S}$ *является фильтром тогда и только тогда, когда семейство* $\boldsymbol{R}$ *множеств* $(-A)$, *где* $A \in \boldsymbol{S}$, *является идеалом.*

Семейство множеств $\boldsymbol{B}$ называется *центрированным*, если

$$\boldsymbol{B}_1 \subset \boldsymbol{B} \Rightarrow \mathsf{P}(\boldsymbol{B}_1) \neq 0$$

для любого конечного подсемейства $\boldsymbol{B}_1$.

Двойственное понятие можно ввести для идеалов.

§ 2. Прямое произведение множеств

I. Определение. *Прямое произведение* множеств X и Y есть множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Это множество обозначается через $X \times Y$. Таким образом, мы имеем

(1) $$[(x, y) \in (X \times Y)] \equiv (x \in X) \wedge (y \in Y).$$

[1]) Это понятие ввел А. Картан.

Более общо, пусть задана конечная система множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Их прямое произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ есть множество всех последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_k \in X_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Если все множества $X_1, \ldots, X_n$ совпадают, т. е. $X_k = X$, то их прямое произведение обозначим через X^n.

Примеры [1]). Множество $\mathcal{I}^2$ есть квадрат, множество $\mathcal{I}^3$ — куб. Множество $\mathcal{E}^2$ — плоскость, множество $\mathcal{E}^n$ есть n-мерное евклидово пространство.

Цилиндр можно рассматривать как прямое произведение окружности (основания) на замкнутый интервал (высоту). Поверхность тора есть прямое произведение двух окружностей.

II. Свойства прямого произведения. Следующие формулы легко доказываются с помощью I(1):

(1) $(X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2) =$
$$= (X_1 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2),$$

(2) $$(X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2),$$

(3) $$(X_1 - X_2) \times Y = (X_1 \times Y) - (X_2 \times Y),$$

(4) $$(X_1 \subset X_2 \text{ и } Y_1 \subset Y_2) \equiv (X_1 \times Y_1 \subset X_2 \times Y_2) \quad (\text{если } X_1 \neq 0 \neq Y_1),$$

(5) $$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \quad (\text{где } A \subset X \text{ и } B \subset Y),$$

(6) $$-(A \times B) = ((-A) \times Y) \cup (X \times (-B)),$$

(7) $$[(X_1 \times Y_1) = (X_2 \times Y_2)] \Rightarrow [X_1 = X_2 \text{ и } Y_1 = Y_2],$$

если все множители непустые.

Отметим следующие свойства бесконечных объединений и пересечений:

(8) $$\bigcup_s A_s \times \bigcup_t B_t = \bigcup_{s,t} A_s \times B_t,$$

(9) $$\bigcap_s A_s \times \bigcap_t B_t = \bigcap_{s,t} A_s \times B_t.$$

III. Оси, координаты, проекции. Пусть заданы два пространства X и Y; мы называем их, как в аналитической геометрии, *осями* произведения $X \times Y$. Каждый элемент z множества $X \times Y$ имеет вид $z = (x, y)$; элементы x и y называются *координатами* элемента z (абсцисса и ордината); элементы x и y также называются *проекциями* элемента z на оси. Более общо, *проекцией множества $A \subset X \times Y$ на ось X* является множество абсцисс элементов множества A, т. е. множество

$$\mathop{\mathsf{E}}_{x} \mathop{\mathsf{V}}_{y} [(x, y) \in A].$$

IV. Функции высказываний многих переменных. Функцию высказываний $\varphi(x, y)$ двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$ можно рас-

[1]) Через $\mathcal{I}$ обозначается отрезок $[0, 1]$ действительной прямой $\mathcal{E}$. — *Прим. перев.*

сматривать как функцию высказываний одной переменной $z = (x, y) \in (X \times Y)$. Формулы § 1, III остаются верными для функций двух (или более) переменных, если x заменить на (x, y) (или на (x, y, z) и т. д.). Кроме того,

$$\bigvee_{x,\,y} \varphi(x, y) \equiv \bigvee_x \bigvee_y \varphi(x, y) \equiv \bigvee_y \bigvee_x \varphi(x, y),$$

$$\bigwedge_{x,\,y} \varphi(x, y) \equiv \bigwedge_x \bigwedge_y \varphi(x, y) \equiv \bigwedge_y \bigwedge_x \varphi(x, y),$$

$$\bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigvee_x \psi(x) \equiv \bigvee_{x,\,x^*} [\varphi(x) \wedge \psi(x^*)],$$

$$\bigwedge_x \varphi(x) \vee \bigwedge_x \psi(x) \equiv \bigwedge_{x,\,x^*} [\varphi(x) \vee \psi(x^*)],$$

$$\bigvee_x \varphi(x) \vee \bigwedge_x \psi(x) \equiv \bigvee_x \bigwedge_{x^*} [\varphi(x) \vee \psi(x^*)] \equiv \bigwedge_{x^*} \bigvee_x [\varphi(x) \vee \psi(x^*)],$$

$$\bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigwedge_x \psi(x) \equiv \bigvee_x \bigwedge_{x^*} [\varphi(x) \wedge \psi(x^*)] \equiv \bigwedge_{x^*} \bigvee_x [\varphi(x) \wedge \psi(x^*)],$$

$$\bigvee_x \bigwedge_y \varphi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x \varphi(x, y).$$

Если x и y пробегают одно и то же пространство $X = Y$, то мы имеем

$$\begin{tikzcd}
 & \bigvee\limits_x \bigwedge\limits_y \varphi(x,y) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \bigwedge\limits_y \bigvee\limits_x \varphi(x,y) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\bigwedge\limits_{x,y} \varphi(x,y) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \bigwedge\limits_x \varphi(x,x) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \bigvee\limits_x \varphi(x,x) \arrow[r, Rightarrow] & \bigvee\limits_{x,y} \varphi(x,y) \\
 & \bigvee\limits_y \bigwedge\limits_x \varphi(x,y) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \bigwedge\limits_x \bigvee\limits_y \varphi(x,y) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Пример. *Непрерывность* функции в каждой точке x выражается следующим условием:

$$\bigwedge_\varepsilon \bigwedge_x \bigvee_\delta \bigwedge_h (|h| < \delta) \Rightarrow (|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon),$$

где область изменения ε и δ — множество положительных чисел, а область изменения x и h — множество $\mathscr{E}$ (прямая).

Поменяв местами кванторы $\bigwedge\limits_x$ и $\bigvee\limits_\delta$, мы получим условие *равномерной непрерывности* функции f.

Замечание. Легко видеть, что знак импликации в формуле

$$\bigvee_y \bigwedge_x \varphi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_x \bigvee_y \varphi(x, y)$$

нельзя заменить знаком эквивалентности.

Однако имеет место следующая формула:

$$\bigwedge_x \bigvee_y \varphi(x, y) \equiv \bigvee_f \bigwedge_x \varphi[x, f(x)],$$

где f есть отображение множества X в множество Y (см. § 3, I).

V. Связь между операторами E и $\bigvee$.

(1) $$\mathop{\mathsf{E}}_x \bigvee_y \varphi(x, y) = \bigcup_y \mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x, y).$$

Доказательство. Согласно § 1, IV (1), мы имеем

$$t \in \mathop{\mathsf{E}}_x \bigvee_y \varphi(x, y) \equiv \bigvee_y \varphi(t, y).$$

Положим $A_y = \mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x, y)$. Тогда $\varphi(t, y) \equiv t \in \mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x, y) \equiv t \in A_y$. Согласно § 1, V (1), отсюда следует, что

$$\bigvee_y \varphi(t, y) \equiv \bigvee_y (t \in A_y) \equiv t \in \bigcup_y A_y \equiv t \in \bigcup_y \mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x, y).$$

Аналогично имеем

(2) $$\mathop{\mathsf{E}}_x \bigwedge_y \varphi(x, y) = \bigcap_y \mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x, y).$$

Теорема [1]). *Множество* $\mathop{\mathsf{E}}_x \bigvee_y \varphi(x, y)$ *является проекцией множества* $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} \varphi(x, y)$ *на ось* X.

Пусть $A = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} \varphi(x, y)$. Тогда

$$\varphi(x, y) \equiv ((x, y) \in A) \quad \text{и} \quad \mathop{\mathsf{E}}_x \bigvee_y \varphi(x, y) = \mathop{\mathsf{E}}_x \bigvee_y ((x, y) \in A).$$

Это завершает доказательство (см. III).

VI. Умножение на ось. Отметим следующие формулы:

(1) $$\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} \varphi(y) = X \times \mathop{\mathsf{E}}_y \varphi(y),$$

(2) $$\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} [\varphi(x) \vee \psi(y)] = \left[\mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x) \times Y\right] \cup \left[X \times \mathop{\mathsf{E}}_y \psi(y)\right]$$

(ср. § 1, IV (3)),

3) $$\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} [\varphi(x) \wedge \psi(y)] = \left[\mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x) \times Y\right] \cap \left[X \times \mathop{\mathsf{E}}_y \psi(y)\right] = \mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x) \times \mathop{\mathsf{E}}_y \psi(y)$$

(ср. II (5)).

[1]) См. Шрёдер [1], стр. 52, а также Тарский и Куратовский [1], стр. 243.

Пример 1. Пусть $\mathcal{J}$ — множество целых чисел и $\mathcal{R}$ — множество рациональных чисел. Тогда мы имеем

$$\mathcal{R}=\mathop{\mathsf{E}}_{x}\bigvee_{y}\bigvee_{z}[(y\in\mathcal{J})\wedge(z\in\mathcal{J})\wedge(xz=y)\wedge(z\neq 0)].$$

Положим

$$A=\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y,\,z}[(y\in\mathcal{J})\wedge(z\in\mathcal{J})\wedge(xz=y)\wedge(z\neq 0)].$$

На основании § 1, IV (4) множество A представляет собой пересечение следующих четырех множеств:

1° множества $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,y,\,z}(y\in\mathcal{J})=X\times\mathop{\mathsf{E}}\limits_{y}(y\in\mathcal{J})\times Z$, являющегося объединением плоскостей, параллельных множеству $X\times Z$ и пересекающих ось Y в целочисленных точках;

2° множества $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,y,\,z}(z\in\mathcal{J})$, являющегося объединением плоскостей, параллельных множеству $X\times Y$ и пересекающих ось Z в целочисленных точках;

3° гиперболического параболоида $y=xz$;

4° пространства $X\times Y\times Z$ без плоскости $z=0$.

Согласно теореме п. V, мы получим множество $\mathcal{R}$, проектируя сначала множество A на плоскость $X\times Y$, а затем проектируя полученное в результате множество на ось X.

Пример 2. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность непрерывных функций действительного переменного x. *Множество C точек сходимости* этой последовательности есть, по определению,

$$C=\mathop{\mathsf{E}}_{x}\bigwedge_{k}\bigvee_{n}\bigwedge_{m}\left[|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{k}\right].$$

Положим

$$A_{n,\,m,\,k}=\mathop{\mathsf{E}}_{x}\left[|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{k}\right];$$

тогда

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}A_{n,\,m,\,k}.$$

Из этой последней формулы следует, что C — множество типа $F_{\sigma\delta}$ (ср. § 30, XII).

VII. Отношения. Факторсемейство. Функция высказываний двух переменных $\varphi(x, y)$ называется также *отношением*; она часто записывается в виде $x\rho y$.

Если множество X есть область изменения переменной x и множество Y есть область изменения переменной y, то отношение ρ можно отождествить с подмножеством $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,y}x\rho y$ множества $X\times Y$.

Отношение ρ называется *рефлексивным*, если $x\rho x$ для каждого $x\in X$; отношение ρ *симметрично*, если $x\rho y$ влечет за собой $y\rho x$; отношение ρ *транзитивно*, если $x\rho y$ и $y\rho z$ влекут за собой $x\rho z$. Отношение, которое является рефлексивным, симметричным и транзитивным, называется *отношением эквивалентности*.

Пусть ρ — отношение эквивалентности между переменными x и y, имеющими одну и ту же область изменения $X=Y$. Легко видеть, что отношение ρ приводит к разбиению множества X („индуцированному отношением ρ“) на непересекающиеся множества (называемые *классами эквивалентности*), такие, что два элемента x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $x_1 \rho x_2$. Семейство всех классов эквивалентности называется *факторсемейством* X/ρ.

Обратно, каждое разбиение $\boldsymbol{D}$ множества X (т. е. каждое семейство $\boldsymbol{D}$ непересекающихся множеств, такое, что $\mathbf{S}(\boldsymbol{D})=X$) приводит к некоторому отношению эквивалентности ρ („индуцированному разбиением $\boldsymbol{D}$“). А именно

$$x\rho y \equiv \bigvee_D (D \in \boldsymbol{D}) \wedge (x \in D) \wedge (y \in D).$$

VIII. Конгруэнтность по модулю идеала. Пусть $\boldsymbol{I}$ — некоторый идеал. Мы скажем, что множество A конгруэнтно B по модулю $\boldsymbol{I}$ ($A \sim B \bmod \boldsymbol{I}$), если $(A \dotminus B) \in \boldsymbol{I}$, т. е. если $(A-B) \in \boldsymbol{I}$ и $(B-A) \in \boldsymbol{I}$.

Легко доказать следующие два утверждения (см. Сикорский [7], стр. 27);

(1) *отношение* $A \sim B \bmod \boldsymbol{I}$ *является отношением эквивалентности*;

(2) *если* $A_1 \sim B_1$ *и* $A_2 \sim B_2$, *то* $(A_1 \cup A_2) \sim (B_1 \cup B_2)$, $(A_1 \cap A_2) \sim (B_1 \cap B_2)$ *и* $(A_1 - A_2) \sim (B_1 - B_2)$.

Докажем еще два предложения.

(3) $A \sim B \bmod \boldsymbol{I}$ *тогда и только тогда, когда* A *имеет вид*

(α) $$A=(B-P)\cup Q, \text{ где } P \in \boldsymbol{I} \text{ и } Q \in \boldsymbol{I}.$$

Предположим сначала, что условие (α) выполнено. Тогда $A-B \subset Q$ и $B-A \subset P$. Отсюда следует, что $A \sim B \bmod \boldsymbol{I}$.

С другой стороны, пусть $(A-B) \in \boldsymbol{I}$ и $(B-A) \in \boldsymbol{I}$. Положим $P=B-A$ и $Q=A-B$. Тогда выполняется условие (α).

(4) *Пусть* $\boldsymbol{I}$ *является* σ-*идеалом* (*т. е. объединение любого счетного семейства множеств, принадлежащих* $\boldsymbol{I}$, *принадлежит* $\boldsymbol{I}$). *Тогда*

(β) *если* $A_n \sim B_n \bmod \boldsymbol{I}$, *то* $\left(\bigcup_n A_n\right) \sim \left(\bigcup_n B_n\right) \bmod \boldsymbol{I}$.

Это следует из очевидных формул

$$\bigcup_n A_n - \bigcup_n B_n \subset \left[\bigcup_n (A_n - B_n)\right] \in \boldsymbol{I},$$

$$\bigcup_n B_n - \bigcup_n A_n \subset \left[\bigcup_n (B_n - A_n)\right] \in \boldsymbol{I}.$$

§ 3. Отображения. Упорядочения. Кардинальные и порядковые числа

1. Терминология и обозначения. Пусть f — *отображение* (*функция*), определенное отношением $y = f(x)$, где переменная x изменяется на множестве X (*область определения* отображения f) и $y \in Y$. Таким образом,

$$(1) \qquad f = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\, y}[y = f(x)] \subset X \times Y,$$

и мы говорим, что f есть *отображение* X *в* Y, и записываем это так:

$$(2) \qquad f : X \to Y \quad \text{или} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Множество всех отображений X в Y обозначается через $(Y)^X_{\text{set}}$, или просто Y^X в тех случаях, когда исключается путаница (индекс используется для того, чтобы отличать это множество от множества непрерывных отображений, которое будет рассмотрено позже).

Очевидно, что

$$Y^X \subset 2^{X \times Y}.$$

Если каждый элемент множества Y есть значение отображения f, то говорят, что f есть отображение множества X *на* множество Y.

Если для данного отображения $f : X \to Y$ мы ограничим область изменения переменной x множеством $E \subset X$, то мы получим *суженную* функцию $g = f \mid E$. Таким образом,

$$(3) \qquad g(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in E \ \text{и} \ g \subset f.$$

Ввиду последнего включения мы называем отображение f *продолжением* отображения g.

Пусть X, Y и Z — три множества и f, g — два отображения, такие, что $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Тогда *композиция* этих отображений $h : X \to Z$ записывается в виде $h = g \circ f$ (или сокращенно $h = gf$) и определяется формулой

$$(4) \qquad h(x) = g[f(x)] \quad \text{для} \quad x \in X.$$

Композиция отображений *ассоциативна*, т. е.

$$(5) \qquad (f_2 \circ f_1) \circ f_0 = f_2 \circ (f_1 \circ f_0).$$

Таким образом, композиция $f_2 f_1 f_0$ определяется корректно при условии, что $f_n : X_n \to X_{n+1}$ для $n = 0, 1, 2$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *взаимно однозначным*, если

$$[f(x_1) = f(x_2)] \Rightarrow (x_1 = x_2),$$

т. е. если

$$(x_1 = x_2) \equiv [f(x_1) = f(x_2)].$$

Очевидно, что если отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ взаимно однозначны, то и отображение $h = g \circ f$ взаимно однозначно.

II. Образы и прообразы. Пусть $f: X \to Y$. Назовем *образом множества* $A \subset X$ множество

(1) $$f^1(A) = \underset{y}{\mathsf{E}} \underset{x}{\bigvee} [(x \in A) \wedge (y = f(x))]$$

(если невозможна путаница, мы пишем $f(A)$ вместо $f^1(A)$).

Обратно, если множество $B \subset Y$, то *прообразом множества* B назовем множество

(2) $$f^{-1}(B) = \underset{x}{\mathsf{E}} [f(x) \in B].$$

Итак (см. § 2, III), $f(A)$ есть проекция на ось Y множества

$$\underset{x,\, y}{\mathsf{E}} [(x \in A) \wedge (y = f(x))]$$

и $f^{-1}(B)$ есть проекция на ось X множества

$$\underset{x,\, y}{\mathsf{E}} [(f(x) \in B) \wedge (y = f(x))] = \underset{x,\, y}{\mathsf{E}} [(y \in B) \wedge (y = f(x))].$$

Легко видеть, что

(3) $$f(A) = \underset{y}{\mathsf{E}} \left[A \cap f^{-1}(y) \neq 0\right].$$

По определению, имеем

(4) $$f^1: 2^X \to 2^Y \quad \text{и} \quad f^{-1}: 2^Y \to 2^X.$$

В частности, f^{-1} определено для любого одноэлементного множества (y), где $y \in Y$.

В дальнейшем мы условимся писать $\overset{-1}{f}(y) = f^{-1}((y))$. Тогда

(5) $$\overset{-1}{f}: Y \to 2^X \quad \text{и} \quad [x \in \overset{-1}{f}(y)] \equiv [y = f(x)].$$

Очевидно, что если $y \in Y - f(X)$, то $\overset{-1}{f}(y) = 0$.

Рассмотрим теперь *разбиение* $\boldsymbol{D}_f$ (или сокращенно $\boldsymbol{D}$), индуцированное отображением f; $\boldsymbol{D}_f$ есть семейство всех множеств $\overset{-1}{f}(y)$, где y пробегает множество $f(X)$. Тогда

(6) $$X = \bigcup_y \overset{-1}{f}(y) \quad \text{и} \quad \overset{-1}{f}(y) \cap \overset{-1}{f}(y') = 0 \quad \text{для} \quad y \neq y'.$$

Определим $\overset{1}{f}$ для $D \in \boldsymbol{D}$ формулой

(7) $$(\overset{1}{f}(D)) = f^1(D); \quad \text{следовательно,} \quad \overset{1}{f}: \boldsymbol{D} \to Y.$$

Очевидно, что $\overset{1}{f}$ — взаимно однозначное отображение, и если $Y = f(X)$, то отображение $\overset{-1}{f}$ является обратным к $\overset{1}{f}$:

(8) $\overset{1}{f}\overset{-1}{f} =$ тождественное $= \overset{-1}{f}\overset{1}{f}$ и $\overset{-1}{f}: Y \to \boldsymbol{D}$.

III. Операции над образами и прообразами. Пусть $f: X \to Y$, $A_t \subset X$ и $B_t \subset Y$, где $t \in T$. Легко установить следующие 12 формул:

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(1a) $f\left(\bigcup_t A_t\right) = \bigcup_t f(A_t)$,

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,

(2a) $f\left(\bigcap_t A_t\right) \subset \bigcap_t f(A_t)$,

(3) $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$,

(4) $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$,

(5) $(f(A) = 0) \equiv (A = 0)$,

(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(6a) $f^{-1}\left(\bigcup_t B_t\right) = \bigcup_t f^{-1}(B_t)$,

(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(7a) $f^{-1}\left(\bigcap_t B_t\right) = \bigcap_t f^{-1}(B_t)$,

(8) $f^{-1}(B_1 - B_2) = \left(f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)\right)$,

(9) $(B_1 \subset B_2) \Rightarrow \left(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\right)$,

(10) $\left(f^{-1}(B) = 0\right) \equiv (B \cap f(X) = 0)$,

(11) $A \subset f^{-1}f(A)$,

(12) $ff^{-1}(B) = B \cap f(X)$.

(13) $f(A) \cap B = f\left[A \cap f^{-1}(B)\right]$,

откуда

(13′) $[f(A) \cap B = 0] \equiv [A \cap f^{-1}(B) = 0]$

и (что эквивалентно)

(13″) $[f(A) \subset B] \equiv [A \subset f^{-1}(B)]$;

следовательно,

(13‴) $(f^{-1})^{-1}(2^A) = 2^{-f(-A)}$.

Для того чтобы доказать формулу (13), предположим, что $y \in f(A) \cap B$. Тогда существует элемент $x \in A$, такой, что $y = f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(B)$ и $y \in f[A \cap f^{-1}(B)]$. Обратно, согласно формулам (2) и (12),

$$f[A \cap f^{-1}(B)] \subset f(A) \cap ff^{-1}(B) = f(A) \cap B.$$

Формулы (14) и (15) относятся к сужениям:

(14) *пусть* $g = f | A$, *тогда* $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$,

(15) *пусть* $X = \bigcup_t A_t$ *и* $g_t = f | A_t$, *тогда* $f^{-1}(B) = \bigcup_t g_t^{-1}(B)$.

Эти формулы могут быть установлены следующим образом:

$$[x \in g^{-1}(B)] \equiv [g(x) \in B] \equiv [x \in A \text{ и } f(x) \in B] \equiv [x \in A \cap f^{-1}(B)],$$
$$f^{-1}(B) = \bigcup_t f^{-1}(B) \cap A_t = \bigcup_t g_t^{-1}(B).$$

Далее, имеем

$$\mathbf{S}\left[\overset{-1}{f}(B)\right] = f^{-1}(B). \tag{16}$$

В самом деле,

$$X \in \overset{-1}{f}(B) \equiv \bigvee_{y \in B} \left[X = \overset{-1}{f}(y)\right] \equiv \bigvee_{y \in B} [X = f^{-1}((y))];$$

отсюда следует, что

$$\mathbf{S}\left[\overset{-1}{f}(B)\right] = \bigcup_{y \in B} f^{-1}((y)) = f^{-1}\left[\bigcup_{y \in B}(y)\right] = f^{-1}(B).$$

Имеет место формула

$$\overset{-1}{f}(B) = \boldsymbol{D}_f \cap \mathop{\mathsf{E}}_{A}[A \subset f^{-1}(B)]. \tag{17}$$

Действительно,

$$[(A \in \boldsymbol{D}_f) \wedge (A \subset f^{-1}(B))] \equiv \bigvee_y \left[(y \in B) \wedge \left(A = \overset{-1}{f}(y)\right)\right] \equiv \left[A \in \overset{-1}{f}(B)\right].$$

Заметим, что если f — взаимно однозначное отображение, то включения (2), (2а) и (3) превращаются в равенства. А именно в этом случае мы имеем

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2), \tag{2$'$}$$

$$f\left(\bigcap_t A_t\right) = \bigcap_t f(A_t), \tag{2$'$а}$$

$$f(A_1 - A_2) = f(A_1) - f(A_2). \tag{3$'$}$$

Кроме того, если f — взаимно однозначное отображение, то

(18) $$(x \in A) \equiv [f(x) \in f(A)].$$

Легко могут быть установлены следующие правила *алгебры функций*:

(18′) $$(f = g) \Rightarrow (f^1 = g^1),$$

т. е. если $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in X$, то $f(A) = g(A)$ для каждого $A \subset X$.

Обозначим через id тождественное отображение (для соответствующей области изменения переменной); тогда (см. (11) и п. V)

(19) $$\mathrm{id} \subset f^{-1}f^1,$$
$$(f^{-1}f^1 = \mathrm{id}) \equiv (f \text{ — взаимно однозначное отображение}).$$

Согласно формуле (12), мы имеем

(20) $$f^1 f^{-1} \subset \mathrm{id},$$

(21) $$(f^1 f^{-1} = \mathrm{id}) \equiv (f \textit{ есть отображение на}).$$

Рассмотрим теперь *составное* отображение $f = (f_0, f_1)$, где $f_0 : X \to Y_0$ и $f_1 : X \to Y_1$; отображение f определяется условием:
$$f(x) = (f_0(x), f_1(x)), \text{ следовательно, } f : X \to Y_0 \times Y_1.$$

Имеют место следующие формулы:

(22) $$f(A) \subset f_0(A) \times f_1(A), \quad \text{где} \quad A \subset X,$$

(23) $$f^{-1}(B_0 \times B_1) = f_0^{-1}(B_0) \cap f_1^{-1}(B_1), \text{ где } B_0 \subset Y_0 \text{ и } B_1 \subset Y_1.$$

Действительно,
$$(y_0, y_1) \in f(A) \equiv \bigvee_x (x \in A) \wedge (y_0 = f_0(x)) \wedge (y_1 = f_1(x)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [y_0 \in f_0(A)] \wedge [y_1 \in f_1(A)];$$
$$[x \in f^{-1}(B_0 \times B_1)] \equiv [f(x) \in (B_0 \times B_1)] \equiv$$
$$\equiv [f_0(x) \in B_0] \wedge [f_1(x) \in B_1] \equiv [x \in f_0^{-1}(B_0) \cap f_1^{-1}(B_1)].$$

Рассмотрим, наконец, *отображение-произведение* $g = f_0 \times f_1$, где $f_0 : X_0 \to Y_0$ и $f_1 : X_1 \to Y_1$; отображение g определяется следующим образом:
$$g(x_0, x_1) = (f_0(x_0), f_1(x_1)),$$
таким образом,
$$g : (X_0 \times X_1) \to (Y_0 \times Y_1).$$

Легко видеть, что

(24) $g(A_0 \times A_1) = f_0(A_0) \times f_1(A_1)$, где $A_j \subset X_j$;

(25) $g^{-1}(B_0 \times B_1) = f_0^{-1}(B_0) \times f_1^{-1}(B_1)$, где $B_j \subset Y_j$.

IV. Коммутативные диаграммы. Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ и $h: X \to Z$. Если $h = g \circ f$, то говорят, что (треугольная) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Очевидно, что

(1) $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, т. е. $h^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$ для $C \subset Z$.

Здесь $g^{-1}: 2^Z \to 2^Y$ и $f^{-1}: 2^Y \to 2^X$. Более общо, (прямоугольная) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

называется *коммутативной*, если

(2) $g \circ f = k \circ h$, т. е. $g[f(x)] = k[h(x)]$.

Треугольная диаграмма, очевидно, есть частный случай прямоугольной, а именно когда $T = Z$ и отображение k тождественно.

Из соотношения (1) следует, что

(3) $$f^{-1}g^{-1} = h^{-1}k^{-1}.$$

Теорема 1. *Формула* (2) *эквивалентна формуле*

(4) $$fh^{-1} \subset g^{-1}k$$

и формуле

(5) $$hf^{-1} \subset k^{-1}g.$$

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (4). Действительно (см. I(5), III(19), (20)),

$$fh^{-1} \subset g^{-1}gfh^{-1} = g^{-1}khh^{-1} \subset g^{-1}k.$$

(4) $\Rightarrow$ (2). В самом деле,

$$gf \subset gfh^{-1}h \subset gg^{-1}kh \subset kh,$$

следовательно, $gf(x) \subset kh(x)$, и поэтому $gf(x) = kh(x)$. Так как формулы (4) и (5) симметричны (относительно диагонали XZ), то доказательство эквивалентности $(2) \equiv (5)$ аналогично.

Определение. Диаграмма называется *бикоммутативной*[1]), если

$$(6) \qquad fh^{-1} = g^{-1}k$$

или (симметрично) если

$$(7) \qquad hf^{-1} = k^{-1}g.$$

Другими словами (в соответствии с теоремой 1), *диаграмма бикоммутативна, если она коммутативна и удовлетворяет включению, обратному включению* (4) (*или* (5)), т. е.

$$(8) \qquad g^{-1}k \subset fh^{-1} \text{ или, симметрично, } k^{-1}g \subset hf^{-1}.$$

Теорема 2. *Коммутативная диаграмма является бикоммутативной тогда и только тогда, когда выполняется следующая импликация:*

(9) *если* $g(y) = k(t)$, *то существует элемент* x, *такой, что* $y = f(x)$ *и* $t = h(x)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $(8) \equiv (9)$.

$(8) \Rightarrow (9)$. Предположим, что $g(y) = k(t)$. Тогда $y \in \overset{-1}{g}k(t)$, и поэтому, согласно формуле (8), $y \in f\overset{-1}{h}(t)$. Следовательно, существует элемент x, такой, что $y = f(x)$ и $h(x) = t$.

$(9) \Rightarrow (8)$. Пусть $y \in \overset{-1}{g}k(t)$. Тогда $g(y) = k(t)$. Из утверждения (9) следует, что $(x) \in \overset{-1}{h}(t)$ и $(y) = f(x) \in f\overset{-1}{h}(t)$; это завершает доказательство.

Замечание 1. Коммутативная диаграмма не всегда является бикоммутативной. Пример: $X = Y = T = (a, b)$, $Z = (a)$, $f = h$ — тождественные отображения и $g = k = \mathrm{const}$.

Замечание 2. Если $f = \mathrm{id}$, то бикоммутативность (треугольной) диаграммы означает, что

$$(10) \qquad h^{-1} = g^{-1}k;$$

следовательно, в случае, *когда h есть отображение на, k есть взаимно однозначное отображение*. В самом деле, согласно равенству (10), $hh^{-1} = hg^{-1}k$, но $hh^{-1} = \mathrm{id}$ и $g^{-1} = h^{-1}k^{-1}$. Следовательно, $k^{-1}k = \mathrm{id}$, а это означает, что k есть взаимно однозначное отображение (см. III (19)).

[1]) Или *точной*, см. Хилтон [1], § 6, стр. 32.

V. Многозначные отображения. Мы называем функцию *многозначной*, если ее значениями являются множества (подмножества данного множества). Так, например, отображения $f^1: 2^X \to 2^Y$ и f^{-1}: $2^Y \to 2^X$, рассмотренные в п. II, являются многозначными.

Пусть F_t: $Y \to 2^X$ — многозначные отображения, причем $t \in T$; таким образом, $F_t(y) \subset X$.

Мы условимся писать

$$F_0 \subset^* F_1, \quad \text{если} \quad F_0(y) \subset F_1(y) \quad \text{для любого} \quad y \in Y,$$

(или просто $F_0 \subset F_1$, если исключается путаница в связи с обозначением $g \subset f$, использованным в I(3));

$$F = F_0 \cup F_1, \quad \text{если} \quad F(y) = F_0(y) \cup F_1(y) \quad \text{для любого} \ y \in Y;$$

$$F = F_0 \cap F_1, \quad \text{если} \quad F(y) = F_0(y) \cap F_1(y) \quad \text{для любого} \quad y \in Y$$

и т. д.

Таким образом, множество $(2^X)^Y$ можно рассматривать как алгебру Буля.

Теорема 1. *Пусть $A \subset X$; имеют место следующие формулы*:

(1) $$(F_0 \subset F_1) \Rightarrow \left(F_1^{-1}(2^A) \subset F_0^{-1}(2^A)\right);$$

(2) *если* $F = F_0 \cup F_1$, *то* $F^{-1}(2^A) = F_0^{-1}(2^A) \cap F_1^{-1}(2^A)$,

и вообще

(2a) $$\left(\bigcup_t F_t\right)^{-1}(2^A) = \bigcap_t F_t^{-1}(2^A);$$

(3) *если* $F = F_0 \cap F_1$, *то* $\left[F_0^{-1}(2^A) \cup F_1^{-1}(2^A)\right] \subset F^{-1}(2^A)$,

и вообще

(3a) $$\bigcup_t F_t^{-1}(2^A) \subset \left(\bigcap_t F_t\right)^{-1}(2^A).$$

Доказательство. Чтобы доказать справедливость соотношения (1), предположим, что $y \in F_1^{-1}(2^A)$. Тогда $F_1(y) \in 2^A$, т. е. $F_1(y) \subset A$. Так как $F_0 \subset F_1$, то отсюда следует, что $F_0(y) \subset F_1(y) \subset A$, и поэтому $y \in F_0^{-1}(2^A)$.

Равенство (2a) следует из соотношений (см. § 1, VI (2))

$$y \in \left(\bigcup_t F_t\right)^{-1}(2^A) \equiv \left(\bigcup_t F_t(y)\right) \in 2^A \equiv \bigwedge_t [F_t(y) \in 2^A] \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_t \left[y \in F_t^{-1}(2^A)\right] \equiv y \in \bigcap_t F_t^{-1}(2^A).$$

Соотношение (3а) следует из соотношения (1) в силу включения

$$\left(\bigcap_t F_t\right) \subset F_t$$

и § 1, V (4).

Теорема 2. *Пусть* $f: X \to Y$. *Положим* $F = \overset{-1}{f}$. *Тогда мы имеем*

$$F^{-1}\left(2^{X-A}\right) = Y - f(A)$$

для любого $A \subset X$.

В самом деле, согласно II (3), мы имеем

$$[y \in Y - f(A)] \equiv [A \cap F(y) = 0]$$

и

$$[A \cap F(y) = 0] \equiv [F(y) \subset X - A] \equiv \left[F(y) \in 2^{X-A}\right] \equiv \left[y \in F^{-1}\left(2^{X-A}\right)\right].$$

VI. Множества одинаковой мощности. Кардинальные числа. Два множества X и Y называются множествами *одинаковой мощности* (или *эквивалентными* в смысле теории множеств), если существует взаимно однозначное отображение множества X на множество Y. В этом случае пишут $X \sim Y$.

Легко видеть, что отношение $X \sim Y$ является отношением эквивалентности. Это приводит к введению понятия кардинального числа. А именно каждому множеству X мы ставим в соответствие объект, называемый *кардинальным числом* и обозначаемый $\overline{\overline{X}}$, причем двум множествам X и Y сопоставляется одно и то же кардинальное число тогда и только тогда, когда $X \sim Y$. Заметим, что класс эквивалентности, соответствующий этому отношению, не есть множество в смысле теории множеств; однако если переменные множества X и Y являются подмножествами данного множества A — как в большинстве проблем топологии, то классы эквивалентности — множества и могут рассматриваться, по определению, как кардинальные числа (относительно A).

Как обычно, через $\aleph_0$ обозначается кардинальное число множества целых чисел, а через $\mathfrak{c}$ — кардинальное число множества действительных чисел.

Имеют место следующие соотношения, аналогичные хорошо известным арифметическим правилам:

(1) $\quad Y^{X \cup T} \sim Y^X \times Y^T$ *при условии, что* $X \cap T = 0$,

(2) $\quad (Y \times Z)^X \sim (Y^X) \times (Z^X)$,

(3) $\quad Y^{X \times T} \sim (Y^X)^T$.

Докажем соотношение (1). Положим $\alpha(f) = (f \mid X, f \mid T)$ для $f \in Y^{X \cup T}$. Легко видеть, что α есть взаимно однозначное отображение левой части соотношения (1) на правую.

Аналогично мы поступаем в случае соотношений (2) и (3).

Докажем соотношение (2). Пусть $f(x)=(f_1(x), f_2(x))$ для $f\in(Y\times Z)^X$. Положим $\beta(f)=(f_1, f_2)$.

Докажем соотношение (3). Пусть $f\in Y^{X\times T}$. Положим

$$g_t(x)=f(x, t). \tag{4}$$

Следовательно, $g_t\in Y^X$, и поэтому $g\in(Y^X)^T$. Наконец, положим $\gamma(f)=g$. Отображение γ и есть требуемое отображение.

VII. Характеристические функции. *Характеристической функцией* множества A (содержащегося в данном пространстве X) мы называем функцию f_A, определенную следующим образом:

$$f_A(x)=\begin{cases} 1 & \text{для} \quad x\in A, \\ 0 & \text{для} \quad x\in X-A. \end{cases}$$

Таким образом, определено отображение $f:2^X\to\{0, 1\}^X$. Легко видеть, что отображение f взаимно однозначно и является отображением на. Итак,

$$2^X\sim\{0, 1\}^X$$

(это показывает, что обозначения Y^X и 2^X согласованы).

Имеют место следующие формулы:

(1) $f_X\equiv 1$,

(2) $f_0\equiv 0$,

(3) $f_{-A}(x)=1-f_A(x)$,

(4) $f_{A\cap B}=f_A\cdot f_B$,

(5) $f_{A-B}=f_A-f_{A\cap B}$,

(6) *если* $A=\bigcup_t A_t$, *то* $f_A(x)=\max_t f_{A_t}(x)$,

(7) *если* $A=\bigcap_t A_t$, *то* $f_A(x)=\min_t f_{A_t}(x)$,

(8) $(A=\operatorname{Limes}_{n\to\infty} A_n)\equiv(f_A(x)=\lim_{n\to\infty} f_{A_n}(x))$.

Понятие характеристической функции множества можно распространить на последовательность множеств, или, более общим образом, на многозначную функцию. А именно пусть $F:T\to 2^X$, т. е. $F(t)\subset X$ при $t\in T$. Тогда характеристическая функция f_F отображения F ставит в соответствие каждому $x\in X$ функцию $f_F(x)\in\{0, 1\}^T$, определенную следующим образом:

$$f_F^t(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x\in F_t, \\ 0, \text{ если } x\in X-F_t. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, характеристическая функция последовательности $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ принимает в качестве значений последовательности чисел $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, такие, что $x^{(n)} = 1$, если $x \in F_n$, и $x^{(n)} = 0$, если $x \in (-F_n)$.

VIII. Обобщенное прямое произведение. Понятие многозначной функции приводит к обобщению прямого произведения. А именно пусть $F: T \to 2^X$, т. е. $F(t) \subset X$. Тогда прямое произведение

$$\prod_{t \in T} F(t)$$

есть, по определению, множество всех функций $z \in X^T$, таких, что $z(t) \in F(t)$ при $t \in T$. Таким образом, мы имеем

$$(0) \qquad \left(z \in \prod_t F(t)\right) \equiv \bigwedge_t (z(t) \in F(t)).$$

Заметим, что если $F(t) = X$ для любого $t \in T$, то $\prod\limits_t F(t) = X^T$.

Приведенное выше определение обобщенного прямого произведения совпадает в случае конечного T с определением, данным в § 2, I.

Мы будем часто писать X_t вместо $F(t)$ и z^t вместо $z(t)$. Как и в конечном случае, мы будем называть множества X_t *осями* произведения $\prod\limits_t X_t$; $z(t)$ будем называть t-й *координатой* точки z (или ее *проекцией* на множество X_t; мы также будем писать $\mathrm{pr}_t\, z$ вместо z^t).

Пусть множество $A_t \subset X_t$. Следующие формулы являются обобщениями формул § 2, II (5), § 2, II (6), § 2, II (2), VI (1) и VI (2) (см. Бурбаки [3]):

$$(1) \qquad \prod_t A_t = \bigcap_t \prod_{t'} A_{t,t'}, \text{ где } A_{t,t} = A_t \text{ и } A_{t,t'} = X_{t'} \text{ для } t' \neq t;$$

$$(2) \qquad -\prod_t A_t = \bigcup_t \prod_{t'} B_{t,t'}, \text{ где } B_{t,t} = -A_t \text{ и } B_{t,t'} = X_{t'} \text{ для } t' \neq t;$$

$$(2') \qquad \bigcap_s \prod_t A_{s,t} = \prod_t \bigcap_s A_{s,t};$$

$$(3) \qquad Y^{\bigcup X_t} \sim \prod_t Y^{X_t} \text{ при условии, что } X_t \cap X_{t'} = 0 \text{ для } t' \neq t;$$

$$(4) \qquad \left(\prod_t Y_t\right)^X \sim \prod_t \left(Y_t^X\right).$$

Следующая формула выражает ассоциативность прямого произведения:

(5) *если* $T = T' \cup T''$, $T' \cap T'' = 0$,

$$\text{то } \prod_{t \in T} Y_t \sim \left[\prod_{t' \in T'} Y_{t'} \times \prod_{t'' \in T''} Y_{t''}\right].$$

Отметим теперь следующее обобщение формулы, данной в замечании в § 2, IV.

Пусть $\varphi_t(x)$ — функция высказываний, где $t \in T$ и $x \in X_t$. Тогда

(6) $$\bigwedge_t \bigvee_{x \in X_t} \varphi_t(x) \equiv \bigvee_z \bigwedge_t \varphi_t(z^t),$$

где переменная z изменяется на множестве $\prod_t X_t$.

Рассмотрим теперь *составное* отображение $f: X \to \prod_t Y_t$, где $f = \{f_t\}$ и $f_t: X \to Y_t$. Тогда имеем

(7) $$[y = f(x)] \equiv \bigwedge_t [y^t = f_t(x)].$$

Формулы III (22) и III (23) легко могут быть обобщены следующим образом:

(8) $$f(A) \subset \prod_t f_t(A), \quad \text{где } A \subset X;$$

(9) $$f^{-1}\left(\prod_t B_t\right) = \bigcap_t f_t^{-1}(B_t), \quad \text{где } B_t \subset Y_t;$$

в частности, если $B_t = Y_t$ для всех t, кроме t_0, то

(10) $$f^{-1}\left(\prod_t B_t\right) = f_{t_0}^{-1}(B_{t_0}).$$

Наконец, рассмотрим *отображение-произведение* $g = \prod_t f_t$, где $f_t: X_t \to Y_t$. Это означает, что

(11) $$[y = g(z)] \equiv \bigwedge_t [y^t = f_t(z^t)].$$

Имеют место следующие обобщения формул III (24) и III (25):

(12) $$g\left(\prod_t A_t\right) = \prod_t f_t(A_t), \quad \text{где } A_t \subset X_t,$$

(13) $$g^{-1}\left(\prod_t B_t\right) = \prod_t f_t^{-1}(B_t), \quad \text{где } B_t \subset Y_t,$$

и, в частности,

(14) $$g^{-1}(y) = \prod_t f_t^{-1}(y^t), \quad \text{где} \quad y \in \prod_t Y_t.$$

Доказательство. Применяя соотношения (11), (0) и (6), мы получаем

$$y \in g\left(\prod_t A_t\right) \equiv \bigvee_z [y = g(z)]\left(z \in \prod_t A_t\right) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_z \bigwedge_t [y^t = f_t(z^t)](z^t \in A_t) \equiv \bigwedge_t \bigvee_x [y^t = f_t(x)](x \in A_t) \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_t y^t \in f_t(A_t) \equiv y \in \prod_t f_t(A_t);$$

$$z \in g^{-1}\left(\prod_t B_t\right) \equiv g(z) \in \prod_t B_t \equiv \bigwedge_t f_t(z^t) \in B_t \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_t z^t \in f_t^{-1}(B_t) \equiv z \in \prod_t f_t^{-1}(B_t).$$

IX. Примеры счетных произведений. Обозначим через $\mathscr{D}$ множество всех положительных целых чисел; тогда произведение $X^{\mathscr{D}}$ есть множество всех бесконечных последовательностей

(1) $z=[z^1, z^2, \ldots, z^n, \ldots]$, где $z^n \in X$ для $n=1, 2, \ldots$.

В этом случае удобнее писать $X^{\aleph_0}$ вместо $X^{\mathscr{D}}$ (подобно тому как мы писали X^n вместо $X^{(0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)}$; это обозначение будет расширено в п. XII до $X^{\aleph_\alpha}$ для произвольного α).

Следующие примеры стали классическими.

1. Элементами множества $\mathscr{E}^{\aleph_0}$ (так называемого *пространства Фреше*) являются бесконечные последовательности действительных чисел. Если эти действительные числа лежат в интервале $\mathscr{J}$: $0 \leqslant x \leqslant 1$, то мы получаем *гильбертов куб* $\mathscr{J}^{\aleph_0}$.

2. Множество $\mathscr{D}^{\aleph_0}$ может быть отождествлено с множеством $\mathscr{N}$ всех иррациональных чисел между 0 и 1. А именно каждый элемент $z \in \mathscr{D}^{\aleph_0}$ определяет единственным образом иррациональное число (разложенное в непрерывную дробь)

(2) $$\frac{1|}{|z^1} + \frac{1|}{|z^2} + \ldots + \frac{1|}{|z^n} + \ldots .$$

3. Если множество A состоит из двух элементов, то множество $A^{\aleph_0}$ может быть отождествлено с *канторовым дисконтинуумом* $\mathscr{C}$, определенным следующим образом (здесь мы положим $A=\{0, 2\}$, см. Кантор [5], стр. 590): оно состоит из чисел вида

(3) $$z=\frac{z^1}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots+\frac{z^n}{3^n}+\ldots,$$

где z^n равно 0 либо 2, т. е. $\mathscr{C}$ есть множество всех чисел интервала $\mathscr{J}$, которые могут быть записаны в троичной системе счисления без использования цифры 1.

Другое (геометрическое) определение $\mathscr{C}$ заключается в следующем. Разделим интервал $[0, 1]$ на три равных интервала и выбросим средний открытый интервал. Далее, разделим каждый из оставшихся двух интервалов $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ на три равных интервала и выбросим (открытые) средние интервалы. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную последовательность вычеркнутых открытых интервалов. Выбрасывая из интервала $(0, 1)$ их объединение, мы получим множество $\mathscr{C}$ (которое было получено выше арифметически).

Канторов дисконтинуум применяется во многих рассуждениях. Здесь мы отметим следующий факт. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — бесконечная последовательность подмножеств множества X и f —

характеристическая функция этой последовательности (см. п. VII); тогда $2f$ есть отображение множества X в множество $\mathscr{C}$ и [1])

$$2f^n(x) = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad x \in A_n, \\ 0, & \text{если} \quad x \in X - A_n. \end{cases}$$

X. Упорядочение. Пусть задано множество X и некоторое отношение между его элементами, записанное в виде $x \leqslant y$. Рассмотрим следующие четыре условия (рефлексивности, антисимметрии, транзитивности и связности):

1. *Для всех x имеем $x \leqslant x$.*
2. *Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.*
3. *Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.*
4. *Для каждой пары x, y либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$.*

Если выполняются условия 1—3, то мы говорим, что отношение $x \leqslant y$ есть *упорядочение* множества X (или что множество X *упорядочено*); отношение $x \leqslant y$ называется *частичным упорядочением*, если оно удовлетворяет только условиям 1 и 3. Если выполняются все условия 1—4, то говорят, что множество X *линейно упорядочено.*

Например, множество 2^X упорядочено отношением включения $X \subset Y \neq X$. Если семейство $\boldsymbol{R} \subset 2^X$ линейно упорядочено отношением включения, то мы говорим, что оно *монотонно.*

Частично упорядоченное множество называется *направленным*, если для любой пары его элементов x, y существует такой элемент z, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$. Таково, например, множество 2^X (так как $A \subset A \cup B$ и $B \subset A \cup B$).

Упорядоченное множество X называется *конфинальным* с множеством $Y \subset X$, если каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$, такой, что $x \leqslant y$.

Например, множество всех действительных чисел конфинально с множеством положительных целых чисел.

Очевидно, что если множество X содержит *последний* элемент a, то оно конфинально с (a).

Мы говорим, что отношение $\leqslant$, которое упорядочивает множество X, и отношение $\leqslant^*$, которое упорядочивает множество Y, устанавливают *подобные упорядочения*, если существует взаимно однозначное отображение f (называемое *отображением подобия*) множества X на множество Y, такое, что

$$(x_1 \leqslant x_2) \equiv (f(x_1) \leqslant^* f(x_2)).$$

Отношение подобия двух упорядоченных множеств является отношением эквивалентности. Следовательно, упорядоченным множествам можно поставить в соответствие *порядковые типы* так, чтобы два

[1]) См. Шпильрайн-Марчевский [6], стр. 302, и [8], стр. 207.

упорядоченных множества имели один и тот же порядковый тип тогда и только тогда, когда они подобны (этот процесс вполне аналогичен процессу сопоставления множествам их кардинальных чисел).

XI. Вполне упорядоченные множества. Порядковые числа. Линейно упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*, если любое непустое подмножество в X имеет первый элемент. Порядковые типы вполне упорядоченных множеств называются *порядковыми числами* (таковы, в частности, $0, 1, \ldots, n, \ldots$; ω есть порядковое число множества всех неотрицательных целых чисел в их естественном порядке).

Согласно *теореме Цермело*, любое множество может быть вполне упорядочено. Эта теорема является следствием *аксиомы выбора*, которая может быть сформулирована следующим образом:

Для каждого множества X существует отображение $f: 2^X \to X$, такое, что $f(A) \in A$, каково бы ни было $A \neq 0$.

Для дальнейших приложений отметим следующее утверждение (называемое *леммой Цорна*):

Пусть X — упорядоченное множество, такое, что для каждого линейно упорядоченного множества $A \subset X$ в множестве X существует элемент, следующий за всеми элементами множества A (или равный последнему элементу из A, если он имеется); тогда в множестве X существует максимальный элемент[1]).

Порядковые числа находят различные приложения в построениях, где используется *трансфинитная индукция*. Эти построения связаны со следующей теоремой.

Обозначим через $\Gamma(\alpha)$ множество всех $\xi < \alpha$. Пусть X — данное множество, α — некоторое порядковое число и $h: 2^X \to X$ — некоторое отображение. Тогда существует отображение $f: \Gamma(\alpha+1) \to X$, такое, что

$$f(\xi) = h[f(\Gamma(\xi))] \text{ для любого } \xi \leqslant \alpha.$$

Напомним, наконец, следующее понятие. Порядковый тип α вполне упорядоченного множества Z называется *предельным*, если он является наименьшим порядковым числом среди всех порядковых чисел, соответствующих всем возможным упорядочениям множества Z, превращающим его во вполне упорядоченное множество. Так, ω (обозначаемое также ω_0) есть предельное порядковое число. Следующее предельное число есть $\Omega\,(=\omega_1)$ — наименьшее порядковое число, соответствующее несчетным множествам. Вообще можно рассматривать ω_α для произвольного α.

По определению $\aleph_\alpha = \overline{\overline{\Gamma(\omega_\alpha)}}$. Так, $\aleph_1$ есть наименьшее кардинальное число несчетных множеств; это следующее кардинальное

---

[1]) По поводу других подобных утверждений см. Келли [1], стр. 33, а также Куратовский [6], стр. 89.

число, большее чем $\aleph_0$. Гипотеза, что $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, называется *гипотезой континуума*. Она не противоречит обычной системе аксиом теории множеств [1]).

XII. Множество $X^{\aleph_\alpha}$. Мы условимся писать (как мы это делали в п. IX для $\alpha = 0$)

(1) $$X^{\aleph_\alpha} = X^{\Gamma(\omega_\alpha)}.$$

Хорошо известная формула

(2) $$2\mathfrak{m} = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 \quad \text{(для бесконечного } \mathfrak{m}\text{)},$$

которую можно выразить в виде

(3) $$\Gamma(\omega_\alpha) \times [0,\ 1] \sim \Gamma(\omega_\alpha) \sim \Gamma(\omega_\alpha) \times \Gamma(\omega_\alpha),$$

приводит к соотношению

(4) $$X^{\aleph_\alpha} \times X^{\aleph_\alpha} \sim X^{\aleph_\alpha} \sim \left(X^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\alpha}.$$

Более того, если $\varphi : \Gamma(\omega_\alpha) \times [0,\ 1] \to \Gamma(\omega_\alpha)$ есть взаимно однозначное отображение на, то отображение χ, определенное условием

$$\chi(f) = f \circ \varphi \quad \text{для каждого } f \in X^{\aleph_\alpha},$$

есть требуемое взаимно однозначное отображение множества $X^{\aleph_\alpha}$ на множество $X^{\aleph_\alpha} \times X^{\aleph_\alpha}$.

Аналогично, обозначая через ψ взаимно однозначное отображение множества $\Gamma(\omega_\alpha) \times \Gamma(\omega_\alpha)$ на множество $\Gamma(\omega_\alpha)$, получаем, что $f \circ \psi$ определяет взаимно однозначное отображение множества $X^{\aleph_\alpha}$ на множество $\left(X^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\alpha}$.

Доказательство легко получается из формул (см. VI (1) и (3))

(5) $$X^{\aleph_\alpha} \times X^{\aleph_\alpha} \sim X^{\Gamma(\omega_\alpha) \times [0,\ 1]} \quad \text{и} \quad \left(X^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\alpha} \sim X^{\Gamma(\omega_\alpha) \times \Gamma(\omega_\alpha)}.$$

XIII. Обратные спектры и их пределы. Пусть T — некоторое направленное множество, и пусть X — многозначная функция, $X : T \to 2^A$; таким образом, $X_t \subset A$ для каждого $t \in T$. Пусть f — некоторая функция, определенная на множестве $T \times T$ для пар $(t_0,\ t_1)$, где $t_0 \leqslant t_1$, такая, что

(1) $$f_{t_0 t_1} : X_{t_1} \to X_{t_0}.$$

[1]) В связи с аксиомой выбора и гипотезой континуума отметим недавние замечательные работы П. Дж. Коэна [1*], [2*]. (Номера со звездочкой относятся к списку литературы, добавленному при корректуре.) — *Прим. перев.*

Допустим, далее, что

(2) $\qquad f_{t_0t_1} \circ f_{t_1t_2} = f_{t_0t_2}$ при $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ (транзитивность)

и

(3) $\qquad f_{tt}$ — тождественное отображение.

Тогда тройка (T, X, f) называется *обратным спектром* (см. Стинрод и Эйленберг [1], гл. VIII, и Александров [12]).

Предел обратного спектра (T, X, f), который обозначается

$$X_\infty, \quad \text{или} \quad \varprojlim (T, X, f), \quad \text{или} \quad \operatorname*{Lim}_{t,\, t_0 \leqslant t_1} \{X_t, f_{t_0t_1}\},$$

есть подмножество прямого произведения $\prod\limits_{t \in T} X_t$, составленное из элементов $z = \{z^t\}$, таких, что

(4) $$f_{t_0t_1}(z^{t_1}) = z^{t_0}.$$

Другими словами, для $z \in X_\infty$ мы имеем

(5) $$f_{t_0t_1} \circ \mathrm{pr}_{t_1} = \mathrm{pr}_{t_0}.$$

Условимся далее писать

(6) $$f_t = \mathrm{pr}_t \,|\, X_\infty, \quad \text{т. е.} \quad f_t(z) = z^t.$$

Следовательно,

(7) $$f_{t_0t_1} \circ f_{t_1} = f_{t_0}, \quad \text{откуда} \quad f_{t_0}^{-1} = f_{t_1}^{-1} \circ f_{t_0t_1}^{-1}.$$

Рассмотрим два обратных спектра (T, X, f) и (T, Y, g). Предположим, что h ставит в соответствие каждому t отображение

$$h_t : X_t \to Y_t,$$

такое, что диаграмма

(8) $$\begin{tikzcd} X_{t_0} \arrow[d, "h_{t_0}"'] & X_{t_1} \arrow[l, "f_{t_0t_1}"'] \arrow[d, "h_{t_1}"] \\ Y_{t_0} & Y_{t_1} \arrow[l, "g_{t_0t_1}"] \end{tikzcd}$$

коммутативна (при $t_0 \leqslant t_1$), т. е.

(9) $$h_{t_0} \circ f_{t_0t_1} = g_{t_0t_1} \circ h_{t_1}.$$

Тогда можно определить отображение

$$h_\infty : X_\infty \to Y_\infty$$

так, чтобы была коммутативна (при каждом $t \in T$) следующая диаграмма:

(10) $$\begin{tikzcd} X_t \arrow[d, "h_t"'] & X_\infty \arrow[l, "f_t"'] \arrow[d, "h_\infty"] \\ Y_t & Y_\infty \arrow[l, "g_t"] \end{tikzcd}$$

Мы считаем, что $y=h_\infty(z)$ для $z\in X_\infty$, где

(11) $$h_t(z^t)=y^t, \quad \text{т. е.} \quad h^t_\infty(z)=h_t(z^t).$$

Легко видеть, что

(12) *если каждое h_t — взаимно однозначное отображение* **на**, *то таким же является и отображение h_∞.*

***XIV. ($\mathcal{A}$)-операция** [1]. Пусть $\{A_{k_1\ldots k_n}\}$ — система множеств, определенная для каждой конечной последовательности $k_1, \ldots, k_n$ положительных целых чисел. Множество

$$R=\bigcup_{k_1\ldots k_n\ldots}\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_{k_1\ldots k_n}$$

называется *результатом* ($\mathcal{A}$)-*операции*, примененной к системе $\{A_{k_1\ldots k_n}\}$.

В частности, если $A_{k_1\ldots k_n}=B_{k_1}$ или $A_{k_1\ldots k_n}=B_n$, то мы имеем $R=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$ или $R=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ соответственно.

Обозначим через $z=[z^1, z^2, \ldots, z^n, \ldots]$ произвольное иррациональное число между 0 и 1 (z^n — положительное целое число, см. IX (2)); тогда мы имеем

(0) $$R=\bigcup_{z\in\mathcal{N}}\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_{z^1\ldots z^n},$$

где $\mathcal{N}$ — множество всех иррациональных чисел между 0 и 1.

Система множеств $\{A_{z^1\ldots z^n}\}$ называется *регулярной*, если

$$A_{z^1\ldots z^nz^{n+1}}\subset A_{z^1\ldots z^n}.$$

Любая система может быть *регуляризована* без изменения результата ($\mathcal{A}$)-операции. А именно, положим

(1) $$A^*_{z^1\ldots z^n}=A_{z^1}\cap A_{z^1z^2}\cap\ \ldots\ \cap A_{z^1z^2\ldots z^n}.$$

Отметим следующие формулы, относящиеся к регулярным системам (см. Лузин и Серпинский [1], стр. 35):

(2) $$\bigcup_m\bigcup_z\bigcap_k A_{mz^1\ldots z^k}=\bigcup_z\bigcap_k A_{z^1\ldots z^k}$$

и, более общо,

(3) $$\bigcup_m\bigcup_z\bigcap_k A_{y^1\ldots y^lmz^1\ldots z^k}=\bigcup_z\bigcap_k A_{y^1\ldots y^lz^1\ldots z^k};$$

[1]) См. Суслин и Лузин [1], стр. 88, и Хаусдорф [5], § 19. Существуют важные свойства, такие, как измеримость или свойство Бэра, инвариантные по отношению к ($\mathcal{A}$)-операции (см. § 11). ($\mathcal{A}$)-операция, так же как и A-множества, названы Суслиным в честь открывшего их П. С. Александрова.

(4) из включения $A_{z^1 \dots z^k} \subset B_{z^1 \dots z^k}$ вытекает, что

$$\bigcup_z \bigcap_k A_{z^1 \dots z^k} \subset \bigcup_z \bigcap_k B_{z^1 \dots z^k};$$

(5) множество членов в объединении $\bigcup_z \bigcup_k A_{z^1 \dots z^k}$ счетно.

Теорема 1. *Если система регулярна, то*

(6) $$A - \bigcup_z \bigcap_k A_{z^1 \dots z^k} \subset \bigcup_z \bigcup_k \left(A_{z^1 \dots z^k} - \bigcup_m A_{z^1 \dots z^k m}\right),$$

где при $k = 0$ *мы положили* $A_{z^1 \dots z^k} = A$.

Доказательство. Пусть $p \in A$. Предположим, что p не принадлежит правой части соотношения (6); тогда

$$\bigwedge_z \bigwedge_k \left[(p \in A_{z^1 \dots z^k}) \Rightarrow \bigvee_m (p \in A_{z^1 \dots z^k m})\right];$$

это означает, что для каждой системы индексов $m_1, \dots, m_k$ $(k \geqslant 0)$, такой, что $p \in A_{m_1 \dots m_k}$, существует индекс m, такой, что $p \in A_{m_1 \dots m_k m}$. Так как $p \in A$, то существует индекс m_1, такой, что $p \in A_{m_1}$, откуда подобным же образом вытекает, что $p \in A_{m_1 m_2}$, и т. д. Следовательно, существует бесконечная последовательность индексов $m_1, m_2, \dots$, такая, что

$$p \in \bigcap_k A_{m_1 \dots m_k} \quad \text{и} \quad p \in \bigcup_z \bigcap_k A_{z^1 \dots z^k}.$$

Это доказывает, что p не принадлежит левой части соотношения (6).

Теорема 2. *Если система регулярна и*

(7) $$[(z^1 \dots z^n) \neq (y^1 \dots y^n)] \Rightarrow \left(A_{z^1 \dots z^n} \cap A_{y^1 \dots y^n} = 0\right),$$

то

(7') $$\bigcup_z \bigcap_n A_{z^1 \dots z^n} = \bigcap_n \bigcup_z A_{z^1 \dots z^n}.$$

Доказательство. Включение, получаемое из соотношения (7') заменой $=$ на $\subset$, верно всегда (даже для нерегулярных систем; см. § 2, IV).

Предположим теперь, что элемент p принадлежит правой части равенства (7'). Следовательно, существует один и только один индекс m_1, такой, что $p \in A_{m_1}$. Подобным же образом существует пара q_1, m_2, такая, что $p \in A_{q_1 m_2}$. Так как $A_{q_1 m_2} \subset A_{q_1}$, то $p \in A_{q_1}$ и, следовательно, $q_1 = m_1$. Аналогичным образом мы докажем, что существует индекс m_3, такой, что $p \in A_{m_1 m_2 m_3}$, и т. д. Положим $z = (m_1, m_2, m_3, \dots)$. Следовательно, $p \in A_{z^1 \dots z^n}$ для каждого n. Это значит, что элемент p принадлежит левой части равенства (7').

Теорема 3[1]. *Пусть R удовлетворяет условию* (0). *Для любого* $\alpha < \Omega$ *положим*

(8) $$A^0_{z^1 \ldots z^n} = A_{z^1 \ldots z^n},$$

(9) $$A^{\alpha+1}_{z^1 \ldots z^n} = A^{\alpha}_{z^1 \ldots z^n} \cap \bigcup_k A^{\alpha}_{z^1 \ldots z^{n_k}},$$

(10) $$A^{\lambda}_{z^1 \ldots z^n} = \bigcap_{\xi < \lambda} A^{\xi}_{z^1 \ldots z^n} \text{ для предельного } \lambda.$$

Далее, положим

(11) $$E_\alpha = \bigcup_k A^{\alpha}_k,$$

(12) $$T_\alpha = \bigcup_z \bigcup_n \left(A^{\alpha}_{z^1 \ldots z^n} - A^{\alpha+1}_{z^1 \ldots z^n}\right),$$

(13) $$K_\alpha = E_\alpha - T_\alpha.$$

Тогда

(14) $$\bigcup_{\alpha < \Omega} K_\alpha = R = \bigcap_{\alpha < \Omega} E_\alpha.$$

Доказательство. Пусть $x \in K_\alpha$; тогда $x \in E_\alpha$ и $x \notin T_\alpha$. Из первого включения следует, в силу (11), что существует целое число k_1, такое, что $x \in A^{\alpha}_{k_1}$. Из второго соотношения, в силу (12), при $z = [k_1, 1, 1, \ldots]$ и $n = 1$ мы получаем $x \notin \left(A^{\alpha}_{k_1} - A^{\alpha+1}_{k_1}\right)$. Отсюда $x \in A^{\alpha+1}_{k_1}$. Из равенства (9) следует, что существует натуральное число k_2, такое, что $x \in A^{\alpha}_{k_1 k_2}$. Поэтому, подставляя в (12) $z = [k_1, k_2, 1, 1, \ldots]$ и $n = 2$, мы получим $x \notin \left(A^{\alpha}_{k_1 k_2} - A^{\alpha+1}_{k_1 k_2}\right)$ и, следовательно, $x \in A^{\alpha+1}_{k_1 k_2}$.

Таким образом мы придем к бесконечной последовательности натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots$, такой, что $x \in A^{\alpha}_{k_1 \ldots k_n}$ для каждого n, т. е.

(15) $$x \in \bigcap_n A^{\alpha}_{z^1 \ldots z^n}, \quad \text{где} \quad z = [k_1, k_2, \ldots].$$

С другой стороны, применяя трансфинитную индукцию, легко показать, что

(16) $$A^{\alpha}_{z^1 \ldots z^n} \supset A^{\beta}_{z^1 \ldots z^n} \quad \text{при} \quad \alpha < \beta.$$

Итак, $x \in \bigcap_n A^0_{z^1 \ldots z^n} = \bigcap_n A_{z^1 \ldots z^n}$, откуда $x \in R$. Поэтому

(17) $$\bigcup_{\alpha < \Omega} K_\alpha \subset R.$$

[1] См. Серпинский [26], стр. 362; в этой работе можно найти также дальнейшие ссылки.

Чтобы получить соотношение (14), мы покажем, что

$$R \subset \bigcap_{\alpha < \Omega} E_\alpha \tag{18}$$

и

$$\bigcap_{\alpha < \Omega} T_\alpha = 0. \tag{19}$$

Для каждого α и m мы имеем

$$\bigcap_n A_{z^1 \ldots z^n} \subset A^\alpha_{z^1 \ldots z^m}. \tag{20}$$

Это включение можно легко доказать при помощи трансфинитной индукции, используя соотношения (8), (10) и формулу

$$A^\alpha_{z^1 \ldots z^n} \cap A^\alpha_{z^1 \ldots z^n z^{n+1}} \subset A^\alpha_{z^1 \ldots z^n} \cap \bigcup_k A^\alpha_{z^1 \ldots z^n k} = A^{\alpha+1}_{z^1 \ldots z^n},$$

которая показывает, что если включение (20) верно для α (и для каждого m), то оно верно для $\alpha + 1$.

Подставляя $m = 1$ в (20), мы получаем

$$\bigcap_n A_{z^1 \ldots z^n} \subset A^\alpha_{z^1} \subset \bigcup_k A^\alpha_k = E_\alpha, \tag{21}$$

откуда следует включение (18).

Для доказательства соотношения (19) предположим, что $x \in T_\alpha$ для каждого $\alpha < \Omega$. Следовательно, каждому α соответствует система индексов $k_1, \ldots, k_n$, такая, что

$$x \in \left(A^\alpha_{k_1 \ldots k_n} - A^{\alpha+1}_{k_1 \ldots k_n}\right). \tag{22}$$

Отсюда непосредственно следует, что существуют два различных α и β, которым соответствует одна и та же система индексов. Итак, кроме соотношения (22), мы имеем

$$x \in \left(A^\beta_{k_1 \ldots k_n} - A^{\beta+1}_{k_1 \ldots k_n}\right). \tag{23}$$

Пусть $\alpha < \beta$. Из соотношений (23) и (16) следует, что $x \in A^{\alpha+1}_{k_1 \ldots k_n}$, а это противоречит соотношению (22).

Итак, соотношения (18) и (19) установлены. Остается показать, что выполнено соотношение (14). Для этого, в силу (18) и (17), мы должны показать, что

$$\bigcap_\alpha E_\alpha \subset \bigcup_\alpha K_\alpha.$$

Но это следует из соотношения (19), так как если $x \in E_\alpha$ для каждого α, то существует α, такое, что

$$x \in (E_\alpha - T_\alpha) = K_\alpha \subset \bigcup_{\alpha < \Omega} K_\alpha.$$

***XV. Решето Лузина** [1]). Пусть $\mathscr{R}_0$ — множество двоичных дробей

$$(1)\qquad r=\frac{1}{2^{m_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{m_n}},\quad \text{где}\quad 1\leqslant m_1<\ldots<m_n.$$

Отображение W, которое каждому $r\in\mathscr{R}_0$ ставит в соответствие множество $W_r\subset X$ (где X — некоторое фиксированное множество), называется *решетом*. Множество A, состоящее из всех таких элементов x, для которых существует бесконечная последовательность $r_1, r_2, \ldots$, удовлетворяющая условиям

$$(2)\qquad r_1<r_2<\ldots\quad \text{и}\quad x\in W_{r_1}\cap W_{r_2}\cap\ldots,$$

называется *просеянным через решето* W.

Другими словами, если

$$(3)\qquad M_x=\mathop{\mathrm{E}}_{r}(x\in W_r)$$

или эквивалентно

$$(4)\qquad W_r=\mathop{\mathrm{E}}_{x}(r\in M_x),$$

то

$$(5)\qquad A=\mathop{\mathrm{E}}_{x}(M_x \text{ не вполне упорядочено отношением } r\geqslant s).$$

Замечание. Если $X=\mathscr{E}$, то W_r можно рассматривать как подмножество горизонтальной линии $y=r$. Тогда M_{x_0} является пересечением множества $\bigcup\limits_r W_r$ с вертикальной линией $x=x_0$.

Назовем *составляющими* множества $-A$ (относительно решета W) совокупность множеств A_α, определенных для $\alpha<\Omega$ следующим образом:

$$(6)\qquad A_\alpha=\mathop{\mathrm{E}}_{x}(M_x \text{ имеет порядковый тип } \alpha),$$

следовательно,

$$(-A)=\bigcup_\alpha A_\alpha.$$

Чтобы установить некоторые полезные соотношения между $(\mathscr{A})$-операцией и операцией просеивания, положим

$$(7)\qquad I(r)=[m_1,\ m_2-m_1,\ \ldots,\ m_n-m_{n-1}],$$

где двоичная дробь r задается формулой (1).

Отображение I есть взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{R}_0$ и множеством всех конечных систем положительных

---

[1]) См. Лузин [7], стр. 9.

целых чисел: каждая система $k_1, \ldots, k_n$ соответствует числу

$$(8) \qquad r = \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}.$$

Теорема[1]). *Пусть* $\{A_{k_1 \ldots k_n}\}$ — *регулярная система множеств, и пусть* $W_r = A_{I(r)}$. *Пусть* R *определяется формулой* XIV (0) *и* A — *формулой* XV (5). *Тогда* $R = A$, *а это означает, что результат* ($\mathcal{A}$)-*операции просеивается через решето* W.

Доказательство. Пусть $x \in R$. Тогда существует последовательность $k_1, k_2, \ldots$, такая, что $x \in A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots$. Определим r_n по формуле (8). Тогда выполняются условия (2), т. е. $x \in A$.

Обратно, предположим, что $x \in A$, т. е. что условия (2) выполнены. Положим

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots.$$

Положим $k_1 = m_1$ и $k_n = m_n - m_{n-1}$ для $n > 1$.

Для фиксированного n обозначим через j_n такой индекс, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{m_i}} < r_{j_n} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_i}}.$$

Положим $r_{j_n} = \frac{1}{2^{q_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q_s}}$, где $1 \leqslant q_1 < \ldots < q_s$. Следовательно, $q_1 = m_1, \ldots, q_n = m_n$. Отсюда вытекает, что первые n членов системы $I(r_{j_n})$ совпадают соответственно с числами $k_1, \ldots, k_n$. Так как система множеств $\{A_{k_1 \ldots k_n}\}$ регулярна, мы приходим к заключению, что $A_{I(r_{j_n})} \subset A_{k_1 \ldots k_n}$, откуда $x \in A_{k_1 \ldots k_n}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому $x \in R$.

***XVI. Применение к канторову дисконтинууму $\mathscr{C}$.** Пусть $\mathscr{R}_0 = [r_1, r_2, \ldots]$. Так как каждый элемент $z \in \mathscr{C}$ представим в виде (см. IX (3)) $z = \frac{z^1}{3} + \frac{z^2}{9} + \ldots$, где $z^n = 0$ или 2, то можно определить множество R_z соотношением

$$(1) \qquad (r_n \in R_z) \equiv (z^n = 2).$$

Обозначим через $\bar{z}$ порядковый тип множества R_z (по отношению $r \geqslant s$).

---

[1]) См. Лузин и Серпинский [3], стр. 65—68; Серпинский [31], стр. 16; Лузин [7], стр. 20; Селивановский [1], стр. 1311.

Все порядковые типы счетных множеств исчерпываются порядковыми типами $\bar{z}$, когда z пробегает множество $\mathscr{C}$.

Это следует из того, что $\mathscr{R}_0$ имеет *плотный* порядковый тип, т. е. содержит подмножества, подобные любому наперед заданному счетному упорядоченному множеству.

Итак, если мы положим

$$(2) \qquad L_\tau = \underset{z}{\mathsf{E}}\,(\bar{z} = \tau), \quad \text{то} \quad L_\tau \neq 0.$$

В частности, если α — порядковое число и

$$(3) \qquad L = \underset{z}{\mathsf{E}}\,(\bar{z} < \Omega), \quad \text{то} \quad L = \bigcup_{\alpha < \Omega} L_\alpha,$$

т. е. мы получаем разложение множества L на непустые множества.

Множества L_α являются составляющими множества L относительно решета C, определенного тождеством

$$C_r = \underset{z}{\mathsf{E}}\,(r \in R_z),$$

ибо множество $\mathscr{C} - L$ просеяно решетом C согласно формуле

$$(4) \qquad (z \in C_{r_n}) \equiv (r_n \in R_z) \equiv (z^n = 2).$$

ГЛАВА 1

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 4. Определения. Операция замыкания

I. Определения. *Топологическое пространство* — это множество 1 (элементы которого называются *точками*) и функция (называемая *замыканием*), ставящая в соответствие каждому множеству $X \subset 1$ множество $\overline{X} \subset 1$ и удовлетворяющая следующим четырем аксиомам:

Аксиома 1. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

Аксиома 2. $X \subset \overline{X}$;

Аксиома 3. $\overline{0} = 0$;

Аксиома 4. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Если, кроме того, выполняется еще следующая аксиома:

Аксиома 5. $\overline{(p)} = (p)$ *для любой точки* $p \in 1$,

то пространство называется $\mathcal{T}_1$-пространством [1]) (или *топологическим в сильном смысле* в противоположность общим топологическим пространствам, удовлетворяющим аксиомам 1—4).

В дальнейшем, если не указано противное, под „пространством" мы всегда будем понимать $\mathcal{T}_1$-пространство.

II. Геометрическая интерпретация[2]). В случае когда 1 является *евклидовым* пространством (n измерений), $\overline{X}$ есть множество X вместе с его предельными точками. Покажем, что все аксиомы выполняются.

---

[1]) Аналогичные аксиомы были введены Ф. Риссом [1]. См. также Куратовский [7]; $\mathcal{T}_1$-пространства рассматривались также М. Фреше [5], стр. 185, который использовал термин „accessibles". См. также Мур Э. [1].

Значительная часть топологии может быть развита в терминах алгебры Буля с операцией замыкания без привлечения понятия точки, т. е. в терминах алгебр с замыканиями, см. Сикорский [4], Расёва и Сикорский [5], Нёбелинг [1], МакКинси и Тарский [1].

Дальнейший анализ этой системы аксиом можно найти в работах Монтейро [1] и Исеки [1]. См. также (некоторые обобщения) Хеммер [2], [3].

[2]) Об одной интерпретации в математической логике см. работу А. Тарского [3], стр. 103.

Пусть $p \in \overline{X \cup Y}$, т. е. $p = \lim\limits_{n} p_n$, где $p_n \in X \cup Y$. Тогда в множестве $\{p_n\}$ существует бесконечное подмножество, все элементы которого принадлежат множеству X или множеству Y; в первом случае $p \in \overline{X}$, а во втором $p \in \overline{Y}$. Таким образом, в обоих случаях $p \in \overline{X} \cup \overline{Y}$, следовательно, $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$.

С другой стороны, если точка p принадлежит замыканию множества X, то она, очевидно, принадлежит и всякому множеству, содержащему X, например множеству $\overline{X \cup Y}$. Следовательно, $\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$, откуда вытекает справедливость аксиомы 1.

Справедливость аксиом 2 и 3 очевидна, остается проверить аксиому 4. По определению, имеем $\overline{X} \subset \overline{\overline{X}}$. Для доказательства обратного включения $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$ предположим, что $p \in \overline{\overline{X}}$, и пусть S есть n-мерный шар, содержащий внутри точку p. Так как точка p принадлежит замыканию множества $\overline{X}$, то внутри S существует точка $r \in \overline{X}$, что в свою очередь влечет за собой существование точки $s \in S \cap X$.

Таким образом, всякий шар, который содержит точку p внутри, содержит также некоторую точку множества X. Но это означает, что $p \in \overline{X}$.

III. Правила топологического исчисления.

(1) $\quad (X \subset Y) \Rightarrow (\overline{X} \subset \overline{Y})$;

(2) $\quad \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$;

(3) $\quad \overline{X} - \overline{Y} \subset \overline{X - Y}$;

(3a) $\quad \overline{X} : \overline{Y} \subset \overline{X : Y}$;

(4) $\quad \overline{\bigcap\limits_{\iota} X_{\iota}} \subset \bigcap\limits_{\iota} \overline{X}_{\iota}$;

(5) $\quad \bigcup\limits_{\iota} \overline{X}_{\iota} \subset \overline{\bigcup\limits_{\iota} X_{\iota}}$;

(6) $\quad (X$ — конечное множество$) \Rightarrow (\overline{X} = X)$;

(7) $\quad \overline{1} = 1$.

Первые пять правил следуют из аксиомы 1. Действительно, для доказательства формулы (1) заметим, что (см. § 1, II) включение $X \subset Y$ эквивалентно равенству $Y = X \cup Y$, из которого следует, что $\overline{Y} = \overline{X \cup Y}$, но, в силу аксиомы 1, имеет место равенство $\overline{Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, что в свою очередь эквивалентно включению $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Соотношение (2) вытекает из соотношения (1), так как включения $X \cap Y \subset X$ и $X \cap Y \subset Y$ влекут за собой включения $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X}$ и $\overline{X \cap Y} \subset \overline{Y}$, откуда $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Тождество $X \cup Y = (X - Y) \cup Y$, в силу аксиомы 1, влечет за собой соотношение $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X - Y} \cup \overline{Y}$; взяв пересечение обеих частей этого равенства с множеством $1-\overline{Y}$, получим соотношение $\overline{X}-\overline{Y}=\overline{X-Y}-\overline{Y}\subset\overline{X-Y}$, откуда и следует правило (3). (Правило (3а) легко вывести из правила (3).)

Соотношение (4) является обобщением соотношения (2) (на произвольное (счетное или несчетное) множество сомножителей); оно доказывается аналогичным образом. Действительно, для любого индекса $\varkappa$ имеем $\bigcap\limits_{\iota} X_\iota\subset X_\varkappa$, откуда $\overline{\bigcap\limits_{\iota} X_\iota}\subset\overline{X}_\varkappa$, и, следовательно, $\overline{\bigcap\limits_{\iota} X_\iota}\subset\bigcap\limits_{\varkappa}\overline{X}_\varkappa$.

Аналогично включение $X_\varkappa\subset\bigcup\limits_{\iota} X_\iota$ влечет за собой включение $\overline{X}_\varkappa\subset\overline{\bigcup\limits_{\iota} X_\iota}$, откуда $\bigcup\limits_{\varkappa}\overline{X}_\varkappa\subset\overline{\bigcup\limits_{\iota} X_\iota}$. Таким образом, соотношение (5) также доказано.

Соотношение (6) непосредственно следует из аксиом 1 и 5. Правило (7) вытекает из аксиомы 2. Формулу (5) можно заменить более точной формулой

(8) $$\overline{\bigcup_{\iota} X_\iota}=\bigcup_{\iota}\overline{X}_\iota\cup\bigcap_{\iota_1\ldots\iota_k}\overline{\bigcup_{\varkappa} X_\varkappa},\text{ где } \varkappa\neq\iota_j \text{ при } j\leqslant k$$

(оператор $\bigcap$ распространяется на все конечные системы значений индексов ι).

Согласно правилам (5) и (1), правая часть формулы (8) является подмножеством ее левой части. Для доказательства противоположного включения рассмотрим систему индексов $\iota_1, \ldots, \iota_k$. В силу аксиомы 1, мы имеем

$$\overline{X}_{\iota_1}\cup\ldots\cup\overline{X}_{\iota_k}\cup\overline{\bigcup_{\varkappa} X_\varkappa}=\overline{\bigcup_{\iota} X_\iota},$$

следовательно,

$$\overline{\bigcup_{\iota} X_\iota}\subset\bigcup_{\iota}\overline{X}_\iota\cup\overline{\bigcup_{\varkappa} X_\varkappa}.$$

Так как эта формула справедлива для каждой системы индексов $\iota_1, \ldots, \iota_k$, отсюда следует включение левой части формулы (8) в ее правую часть.

Частным случаем формулы (8) является формула

(9) $$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{X}_n\cup\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{(X_n\cup X_{n+1}\cup\ldots)}.$$

Замечание. Легко видеть, что все предыдущие формулы, за исключением (6), имеют место в произвольном топологическом пространстве (не обязательно $\mathcal{T}_1$-пространстве).

Отметим также, что в определении $\mathcal{T}_1$-пространства аксиома 2 может быть опущена (она следует из аксиом 1 и 5, так как пространство X является объединением одноэлементных множеств); аксиому 3 также можно опустить, если предполагать, что пространство состоит более чем из одной точки.

IV. Относительное замыкание. Пусть E — некоторое заданное множество точек и X — произвольное подмножество множества E $(1 \supset E \supset X)$. Назовем множество $E \cap \overline{X}$ *замыканием* X *относительно* E (*относительным замыканием*). Такое замыкание удовлетворяет аксиомам 1 — 5 *относительно* множества E, т. е. если X и Y — произвольные подмножества множества E, то

1_E) $E \cap \overline{X \cup Y} = (E \cap \overline{X}) \cup (E \cap \overline{Y})$;

4_E) $E \cap \overline{E \cap \overline{X}} = E \cap \overline{X}$;

5_E) *если* X *пусто или состоит из одной точки, то* $E \cap \overline{X} = X$.

Доказательство. Предложения 1_E и 5_E — прямые следствия аксиом 1, 3 и 5. Что касается предложения 4_E, то из правила (2) и аксиомы 4 вытекает, что

$$\overline{E \cap \overline{X}} \subset \overline{E} \cap \overline{\overline{X}} \subset \overline{\overline{X}} = \overline{X},$$

следовательно,

$$E \cap \overline{E \cap \overline{X}} \subset E \cap \overline{X}.$$

Обратное включение следует из аксиомы 2, поэтому имеет место тождество 4_E.

Таким образом, установлено, что аксиомы 1 — 5 справедливы, если рассматривать их *относительно* произвольного множества $E \subset 1$; то же можно сказать о всех теоремах, которые следуют из аксиом 1 — 5: они сохраняются, если произвольное подмножество E пространства 1 рассматривается как пространство (с относительным замыканием).

Мы видели в п. II, что аксиомы 1 — 5 выполняются в евклидовом пространстве. Из изложенного следует, что эти аксиомы справедливы, если рассматривать их относительно любого подмножества евклидова пространства.

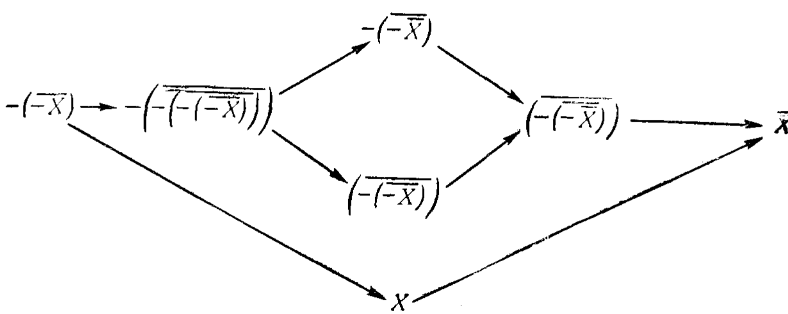
V. Логический анализ системы аксиом. Аксиомы 1, 4, 5 *независимы*. Действительно, если в качестве пространства взять множество, состоящее из двух элементов a и b, и положить $\overline{0} = 0$, $\overline{(a)} = (a)$, $\overline{(b)} = (b)$ и $\overline{(a, b)} = 0$, то аксиомы 4 и 5 выполняются, тогда как аксиома 1 не имеет места. Если в непустом пространстве 1 положить $\overline{X} = 0$ для всякого $X \subset 1$, то аксиомы 1 и 4 будут выполнены, но аксиома 5 не выполняется. Наконец, чтобы доказать независимость аксиомы 4, рассмотрим следующий очень поучительный пример [1]) (см. Фреше [1], стр. 15): пусть пространство 1 состоит

[1]) Исследование пространств, не удовлетворяющих аксиоме 4, можно найти в работе Чеха [4].

из всех вещественных функций вещественного переменного, X — некоторое множество из этого пространства. Элементом множества $\bar{X}$ является, по определению, всякая предельная функция последовательности функций, принадлежащих множеству X. Построенное таким образом пространство функций удовлетворяет аксиомам 1 и 5, но не удовлетворяет аксиоме 4. Действительно, обозначим через A множество непрерывных функций; тогда $\bar{\bar{A}} \neq \bar{A}$, так как функция Дирихле, равная 1 в рациональных точках и нулю в иррациональных, принадлежит множеству $\bar{\bar{A}}$, но не принадлежит множеству $\bar{A}$.

Каждая из аксиом 1 — 4 может быть выражена в виде $F(X_1, \ldots, X_k) = 0$, где функция F представляет собой суперпозицию операций в алгебре Буля и операции замыкания. Весьма примечательно, что не существует никакой другой аксиомы такого вида, которая была бы независима от рассмотренной системы и имела бы место в n-мерном евклидовом пространстве (теорема МакКинси и Тарского [1]).

Решение частного случая этой проблемы поясняется на следующей схеме (где знак $\subset$ заменен стрелкой):



Действительно, допустим, что к множеству X применяются две операции (отображения): $\bar{X}$ и $(1 - X)$. Сколько различных множеств можно получить таким образом? Доказано, что всего 14 различных множеств (см. Куратовский [7], стр. 196) [1]). Все эти 14 множеств и всевозможные их включения содержатся в приведенной выше схеме.

[1]) По поводу некоторых связанных с этой проблем см. Хеммер [1], Чепмен [1].

Замечание. Упомянутая выше теорема является частным случаем следующей теоремы об упорядоченных множествах:

Пусть A — некоторое упорядоченное множество (см. § 3, X), *и пусть* $f: A \to A$ *и* $g: A \to A$ — *такие отображения, что*

$$(x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y) \quad \text{и} \quad g(y) \leqslant g(x)),$$

$$x \leqslant f(x), \quad ff(x) = f(x), \quad gg(x) = x.$$

Тогда полугруппа, порожденная отображениями f и g, состоит (самое большее) из 14 элементов, а именно (мы полагаем $gfg = i$): тождественное отображение, $g, f, fg, gf, i, fgf, fi, if, gfi, fif, fgfi, gfif, ifi$.

Все отношения порядка между элементами рассматриваемой полугруппы можно представить при помощи схемы, аналогичной приведенной выше.

Доказательство совершенно элементарно (см. Хеммер [1]). Сначала доказывают, что отображение i обладает теми же свойствами, что Int. Затем показывают, что отображения fi и if совпадают со своим квадратом, и это завершает доказательство.

§ 5. Замкнутые и открытые множества

I. Определения. Множество $X \subset 1$ называется *замкнутым* [1]), если $\overline{X} = X$. Множество X *открыто*, если его дополнение замкнуто, т. е. $\overline{1 - X} = 1 - X$, или $X = 1 - (\overline{1 - X})$.

Примеры. В пространстве вещественных чисел целые числа образуют замкнутое множество; отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ замкнут; интервал $a < x < b$ открыт (не замкнут); на плоскости последнее множество не является открытым.

В множестве целых чисел каждое подмножество одновременно открыто и замкнуто.

Пусть f — некоторая ограниченная функция, определенная на интервале $a \leqslant x \leqslant b$; ее график, т. е. множество $\underset{x, y}{E}[y = f(x)]$, замкнут (на плоскости) тогда и только тогда, когда функция f непрерывна (ср. § 20, V, теорема 8).

II. Операции.

Теорема 1. *Объединение двух замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Это следует из аксиомы 1, если положить $\overline{X} = X$ и $\overline{Y} = Y$.

Теорема 2. *Пересечение* (конечного или бесконечного числа) *замкнутых множеств замкнуто.*

Действительно, полагая $\overline{X}_\iota = X_\iota$, по правилу (4) получаем включение $\overline{\bigcap_\iota X_\iota} \subset \bigcap_\iota X_\iota$, а так как $\bigcap_\iota X_\iota \subset \overline{\bigcap_\iota X_\iota}$, согласно аксиоме 2, то мы имеем $\overline{\bigcap_\iota X_\iota} = \bigcap_\iota X_\iota$.

[1]) Это понятие принадлежит Кантору [5], стр. 51.

При помощи формулы Моргана (см. § 1, II и V), согласно которой имеет место соотношение $1-(X \cap Y)=(1-X) \cup (1-Y)$ и вообще $1-\bigcap_{\iota} X_{\iota}=\bigcup_{\iota}(1-X_{\iota})$, из двух предыдущих предложений можно вывести, что *пересечение двух открытых множеств открыто* и что *объединение произвольного семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Согласно аксиоме 3 и правилу (7), множества 0 и 1 одновременно замкнуты и открыты.

Из аксиомы 4 следует, что множество $\overline{X}$ замкнуто. Более того, $\overline{X}$ *есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество* X, т. е. $\overline{X}$ является пересечением всех замкнутых множеств, содержащих X, ибо включение $X \subset F$, где $F=\overline{F}$, влечет за собой включение $\overline{X} \subset F$ (см. § 4, III (1)).

Замечание 1. Определение *топологического пространства* (см. § 4, I) можно сформулировать эквивалентным образом, рассматривая в качестве первоначальных понятий *замкнутые множества* (вместо замыкания), удовлетворяющие следующим аксиомам:

Аксиома 1'. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Аксиома 2'. *Пересечение произвольного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Случай пустого семейства множеств не исключается, поэтому (см. § 1, V) пустое множество, а также все пространство замкнуты.

Определяя в этом пространстве замыкание $\overline{X}$ множества X как пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество X, можно легко проверить, что выполняются аксиомы 1 — 4, § 4, I.

Обратно, как мы показали, аксиомы 1' и 2' выполняются в любом топологическом пространстве.

Замечание 2. Другая эквивалентная форма определения топологических пространств (двойственная предыдущей) состоит в следующем. В основу определения топологического пространства положим понятие *открытого* множества (см. Александров [4], Серпинский [24], стр. 335, и [29], а также § 7, II ниже; ср. Монтейро [2]), удовлетворяющего следующим аксиомам:

Аксиома 1''. *Пересечение конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Аксиома 2''. *Объединение произвольного семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Замкнутое множество определяется как дополнение к открытому. Рассуждая подобно тому, как в предыдущем замечании, легко установить эквивалентность этого определения топологического пространства с определением, данным в п. I, основанным на аксиомах 1 — 4.

III. Свойства. Замкнутые множества можно определить как множества вида $\overline{X}$. Аналогично открытые множества совпадают с множествами вида $1-\overline{X}$.

Теорема. *Если множество G открыто, то для любого множества X имеет место включение $G \cap \overline{X} \subset \overline{G \cap X}$.*

Действительно, по определению открытого множества, $G = 1 - (\overline{1-G})$, откуда

$$G \cap \overline{X} = \overline{X} - (\overline{1-G}) \subset \overline{X-(1-G)} = \overline{G \cap X},$$

в силу правила (3).

Включение $G \cap \overline{X} \subset \overline{G \cap X}$ влечет за собой включение $\overline{G \cap \overline{X}} \subset \overline{G \cap X}$, и, так как $X \subset \overline{X}$, мы имеем включение $\overline{G \cap X} \subset \overline{G \cap \overline{X}}$, откуда следует важное равенство

$$(1) \qquad \overline{G \cap \overline{X}} = \overline{G \cap X}.$$

IV. Относительно замкнутые и относительно открытые множества. В соответствии с терминологией, принятой в § 4, IV, назовем множество X *замкнутым относительно множества E* (*относительно замкнутым в E*), если $X = E \cap \overline{X}$. Множество X *относительно открыто в E*, если $X \subset E$ и множество $E - X$ относительно замкнуто в E, т. е. $X = E - (\overline{E-X})$.

Теорема. *Для того чтобы некоторое множество было замкнутым (открытым) относительно E, необходимо и достаточно, чтобы оно было пересечением E с некоторым замкнутым (открытым) множеством.*

Действительно, это условие необходимо, так как, если множество X относительно замкнуто, мы имеем $X = E \cap \overline{X}$, а если оно относительно открыто, мы имеем $X = E - (\overline{E-X}) = E \cap (1 - (\overline{E-X}))$.

Докажем достаточность. Пусть $X = E \cap F$, где $F = \overline{F}$. Покажем, что множество X замкнуто относительно E, т. е. что $X = E \cap \overline{X}$ или $E \cap F = E \cap \overline{E \cap F}$. Согласно правилу (1), мы имеем $\overline{E \cap F} \subset \overline{F}$, и так как $\overline{F} = F$, то $E \cap \overline{E \cap F} \subset E \cap F$. Обратное включение является прямым следствием аксиомы 2.

Наконец, пусть $X = E \cap G$, где множество G открыто. Тогда множество $E - X$, равное $E - E \cap G = E \cap (1 - G)$, является пересечением множества E с замкнутым множеством. Таким образом, оно замкнуто относительно E, и, следовательно, множество X относительно открыто, что и требовалось доказать.

В частности, *если множество E замкнуто (открыто), то всякое множество, замкнутое (открытое) относительно E, является замкнутым (открытым) в абсолютном смысле.* Это предложение следует из предыдущей теоремы, так как пересечение двух открытых (замкнутых) множеств открыто (замкнуто) (см. п. II).

Из той же теоремы вытекает, что свойство множества быть относительно замкнутым *транзитивно*, т. е. если множество X замкнуто в Y, а множество Y замкнуто в E, то X замкнуто в E.

Действительно, по предположению, $X = Y \cap \overline{X}$ и $Y = E \cap \overline{Y}$; тогда $X = E \cap \overline{X} \cap \overline{Y}$, т. е. X есть пересечение E с замкнутым множеством и, следовательно, относительно замкнуто в E.

Свойство множества быть относительно открытым также транзитивно.

V. Множества типа F_σ и G_δ. Объединение счетного[1]) числа замкнутых множеств называется *множеством типа F_σ (F_σ-множеством)*; пересечение счетного числа открытых множеств называется *множеством типа G_δ (G_δ-множеством)*[2]). Очевидно, что дополнение к множеству типа F_σ является множеством типа G_δ и что дополнение к множеству типа G_δ является множеством типа F_σ. Очевидно также, что объединение счетного числа множеств типа F_σ есть множество типа F_σ. Пересечение двух множеств типа F_σ есть множество типа F_σ. Действительно, пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $B = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$, тогда $A \cap B = \bigcup\limits_{n,\, m=1}^{\infty} (A_n \cap B_m)$. Так как множества A_n и B_m замкнуты, то их пересечение $A_n \cap B_m$ также замкнуто, и потому множество $A \cap B$ — типа F_σ. Подобно этому пересечение счетного числа множеств типа G_δ есть множество типа G_δ, и объединение двух множеств типа G_δ есть множество типа G_δ.

Всякое множество типа F_σ является объединением *возрастающей* последовательности замкнутых множеств. Действительно,

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots = F_1 \cup (F_1 \cup F_2) \cup (F_1 \cup F_2 \cup F_3) \cup \ldots .$$

Аналогичным образом, всякое множество типа G_δ есть пересечение *убывающей* последовательности открытых множеств.

---

[1]) Под *счетным* множеством здесь понимается также и конечное множество.

[2]) Эти два понятия представляют собой обобщение понятий замкнутого и открытого множеств. Они были изучены в основном для целей теории функций. Однако они оказались весьма полезными и в геометрических задачах топологии полных метрических пространств (см. гл. III). Эти понятия введены Юнгом [1], стр. 287.

Для того чтобы некоторое множество X было множеством типа F_σ (типа G_δ) *относительно* множества E, необходимо и достаточно, чтобы X было пересечением E с множеством типа F_σ (типа G_δ). Это вытекает из следующих тождеств:

$$(F_1 \cap E) \cup (F_2 \cap E) \cup \ldots = (F_1 \cup F_2 \cup \ldots) \cap E;$$
$$(G_1 \cap E) \cap (G_2 \cap E) \cap \ldots = (G_1 \cap G_2 \cap \ldots) \cap E.$$

В частности, если E есть множество типа F_σ (G_δ), то таким же является множество X.

Согласно аксиоме 5, всякое счетное множество есть множество типа F_σ.

Так, например, множество рациональных чисел в множестве действительных чисел является множеством типа F_σ. Множество иррациональных чисел является множеством типа G_δ. Ниже мы покажем, что оно не является множеством типа F_σ.

VI. Борелевские множества. Обобщая понятия замкнутого и открытого множеств при помощи операций теории множеств (подобно тому, как мы сделали это в предыдущем пункте), введем в рассмотрение множества, которые получаются из замкнутых (или открытых) при помощи счетного числа операций объединения, пересечения и вычитания. Это отражает следующее определение (см. Борель [2], стр. 46, и Хаусдорф [1], стр. 304, [5], § 18).

Определение. *Семейство* $\boldsymbol{F}$ *борелевских множеств* есть наименьшее семейство множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1) всякое замкнутое множество принадлежит $\boldsymbol{F}$;

2) если множество X принадлежит семейству $\boldsymbol{F}$, то множество $1 - X$ также принадлежит семейству $\boldsymbol{F}$;

3) если множества X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат семейству $\boldsymbol{F}$, то пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ также принадлежит семейству $\boldsymbol{F}$.

Очевидно, что условие 1 можно заменить условием

1′) каждое открытое множество принадлежит семейству $\boldsymbol{F}$,

и что условие 3 можно заменить условием 3′, которое получится из 3, если вместо пересечения взять объединение.

Более детально борелевские множества изучаются в гл. II и III. Борелевские множества наиболее часто встречаются в различных приложениях топологии. Однако известны примеры не борелевских множеств.

Что касается *относительно борелевских* множеств, то для них справедлива следующая теорема: *пусть E — некоторое множество. Борелевские множества относительно множества E совпадают* *с множествами вида $B \cap E$, где B — переменное борелевское множество во всем пространстве.*

Действительно, семейство тех множеств X, для которых множество $X \cap E$ является борелевским относительно E, удовлетворяет условиям 1—3, поскольку: 1° если X замкнуто, то $X \cap E$ замкнуто в E и, следовательно, борелевское относительно E; 2° если $X \cap E$ является борелевским в E, то множество $(1-X) \cap E$ также борелевское в E, ибо $(1-X) \cap E = E - (X \cap E)$; 3° если каждое из множеств $E \cap X_n$ борелевское в E, то $E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right)$ также борелевское в E, так как $E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \cap X_n)$.

Но семейство борелевских множеств является наименьшим семейством множеств, удовлетворяющим условиям 1—3, поэтому оно содержится в рассмотренном семействе множеств X. Другими словами, если множество X борелевское, то множество $X \cap E$ борелевское относительно E. Следовательно, семейство множеств вида $B \cap E$, где B — борелевское множество во всем пространстве, содержится в семействе множеств, борелевских относительно E.

Обратно, семейство множеств вида $X = B \cap E$, где множество B борелевское, удовлетворяет условиям 1—3, рассматриваемым относительно E, так как: 1° всякое множество, замкнутое в E, принадлежит этому семейству; 2° если $X = B \cap E$, то множество $E - X = E \cap (1-B)$, как пересечение E с борелевским множеством, принадлежит рассматриваемому семейству; 3° если $X_n = E \cap B_n$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, и, следовательно, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ также принадлежит рассматриваемому семейству множеств. Итак, семейство множеств вида $B \cap E$, где B — борелевское множество во всем пространстве, содержит семейство множеств, борелевских относительно E. Таким образом, если множество X борелевское относительно E, то X есть пересечение E и некоторого борелевского множества.

VII. Покрытие пространства. Измельчение. Пусть $\boldsymbol{A}$ — некоторое семейство открытых множеств пространства $\mathscr{X}$. Назовем его *открытым покрытием* пространства $\mathscr{X}$, если каждая точка множества $\mathscr{X}$ принадлежит некоторому элементу семейства $\boldsymbol{A}$, т. е. $\mathscr{X} = \mathbf{S}(\boldsymbol{A})$.

Семейство $\boldsymbol{B}$ назовем *подпокрытием* покрытия $\boldsymbol{A}$, если $\boldsymbol{B}$ есть покрытие пространства $\mathscr{X}$ и $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$.

Семейство $\boldsymbol{B}$ назовем *измельчением* покрытия $\boldsymbol{A}$, если $\boldsymbol{B}$ — покрытие пространства $\mathscr{X}$ и каждый элемент семейства $\boldsymbol{B}$ содержится в некотором элементе покрытия $\boldsymbol{A}$; в этом случае мы пишем $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}$ предшествует или равно $\boldsymbol{B}$).

Очевидно, что отношение $A \leqslant B$ устанавливает частичный порядок в множестве всех покрытий пространства $\mathscr{X}$. Более того, это множество является *направленным* (см. § 3, X). В самом деле, пусть A и B — два покрытия, обозначим через C семейство всех множеств вида $U \cap V$, где $U \in A$ и $V \in B$. Очевидно, что C есть покрытие и что $A \leqslant C$, $B \leqslant C$.

Семейство A назовем *локально конечным*, если каждая точка $p \in \mathscr{X}$ содержится в некотором открытом множестве G, пересекающемся не более чем с конечным числом элементов покрытия A.

Локально конечные семейства обладают следующим интересным свойством.

Теорема. *Если $\{X_t\}$, $t \in T$ (T — произвольное множество), — локально конечное семейство множеств, то*

$$(1) \qquad \overline{\bigcup_t X_t} = \bigcup_t \overline{X_t}.$$

Доказательство. Принимая во внимание формулу § 4, III (5), достаточно показать, что

$$(2) \qquad \overline{\bigcup_t X_t} \subset \bigcup_t \overline{X_t}.$$

Пусть $p \in \overline{\bigcup_t X_t} \cap G$, где G — открытое множество, такое, что

$$(3) \qquad \begin{aligned} &G \cap X_{t_i} \neq 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ &G \cap X_t = 0 \quad \text{при} \quad X_t \neq X_{t_i}. \end{aligned}$$

Покажем, что существует индекс i, для которого $p \in \overline{X_{t_i}}$. Предположим противное, т. е. что

$$p \notin (\overline{X_{t_1}} \cup \ldots \cup \overline{X_{t_n}}).$$

Положим $H = G - (\overline{X_{t_1}} \cup \ldots \cup \overline{X_{t_n}})$. Тогда $p \in H$ и, в силу (3), $H \cap \bigcup_t X_t = 0$. Но это противоречит нашему допущению, что $p \in \overline{\bigcup_t X_t}$.

Семейство множеств назовем *σ-локально конечным*, если оно представимо в виде счетного объединения локально конечных семейств.

Введенные выше понятия позволяют выделить большое число важных классов пространств, которые будут изучаться далее (а также во втором томе).

Пространство $\mathscr{X}$ называется *компактным* (или *бикомпактным*), если каждое покрытие пространства $\mathscr{X}$ содержит конечное подпокрытие. Пространство $\mathscr{X}$ называется *счетно-компактным*, если каждое его счетное покрытие содержит конечное подпокрытие. Пространство $\mathcal{X}$ называется *пространством Линделёфа*, если каждое его покрытие содержит счетное подпокрытие.

Пространство $\mathcal{X}$ *паракомпактно*, если каждое его покрытие имеет локально конечное измельчение [1]).

VIII. Хаусдорфовы пространства. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* [2]) (или *$\mathcal{T}_2$-пространством*), если для каждой пары его точек $p \neq q$ существуют два открытых множества G и H, таких, что

(1) $$p \in G, \quad q \in H, \quad G \cap H = 0.$$

Очевидно, что евклидовы пространства хаусдорфовы.

Теорема 1. *Каждое хаусдорфово пространство является $\mathcal{T}_1$-пространством.*

Пусть p — некоторая точка. По предположению, для каждой точки $x \neq p$ существует открытое множество G_x, такое, что $p \notin G_x$. Следовательно, $1 - (p) = \bigcup\limits_{x \neq p} G_x$, т. е. $1 - (p)$ есть открытое множество, а множество (p) замкнуто.

Теорема 2. *Каждое подмножество хаусдорфова пространства является хаусдорфовым пространством.*

Пусть $p, q \in E$ — две различные точки. Так как пространство хаусдорфово, то существуют открытые множества G и H, удовлетворяющие условию (1). Тогда $G \cap E$ и $H \cap E$ — открытые множества относительно E, содержащие соответственно точки p и q.

Замечание 1. Определение хаусдорфова пространства можно выразить в терминах алгебры с замыканием следующим образом: если $A \neq 0 \neq B$ и $A \cap B = 0$, то существуют два открытых множества G и H, таких, что $A \cap G \neq 0 \neq B \cap H$ и $G \cap H = 0$ (см. Нёбелинг [1], стр. 79).

Замечание 2. *Существуют $\mathcal{T}_1$-пространства, которые не являются хаусдорфовыми*, например пространство, точки которого — числа $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, и 0, а топология вводится следующим образом: множество, не содержащее 1, открыто тогда и только тогда, когда оно открыто в обычной топологии, индуцированной топологией вещественной прямой, множества же, содержащие элемент 1, открыты тогда и только тогда, когда они являются дополнениями конечных множеств. Очевидно, что каждое открытое мно-

---

[1]) Другие понятия, связанные с покрытиями, см. в работе Аренса и Дугундьи [1].

[2]) Другие эквивалентные определения хаусдорфова пространства имеются, например, в книге Бурбаки [1]. Хаусдорфовы пространства называются также *отделимыми*. См., кроме того, Себаштиан-и-Сильва [1].

жество, содержащее 0, — бесконечно, и, следовательно, точки 0 и 1 не могут быть отделены непересекающимися открытыми множествами. (Заметим, что 0 и 1 — единственные две *точки накопления* в этом пространстве (см. § 9).) Если же одна из двух точек p или q является изолированной, то условие (1), очевидно, выполняется.

IX. $\mathcal{T}_0$-пространства. Топологическое пространство называется *$\mathcal{T}_0$-пространством*, если для каждой пары различных точек этого пространства существует открытое множество, содержащее одну из точек и не содержащее другую [1]).

Эквивалентное требование: никакие две различные точки не имеют одинакового замыкания.

Очевидно, что *каждое $\mathcal{T}_1$-пространство является $\mathcal{T}_0$-пространством.*

Замечание 1. Обратное утверждение не верно. Приведем один интересный пример $\mathcal{T}_0$-пространства, которое не является $\mathcal{T}_1$-пространством (Александров и Хопф [1], стр. 26, 40) [2]). Рассмотрим симплекс $(p_0, \ldots, p_n)$ (см. гл. II, § 31). Точками нашего пространства служат все грани S этого симплекса (включая сам симплекс). Замыкание точки в рассматриваемом пространстве, т. е. симплекса S, определим как множество, состоящее из всех граней симплекса S; замыкание произвольного множества E определим как объединение замыканий элементов множества E. Построенное таким образом (конечное) $\mathcal{T}_0$-пространство не является $\mathcal{T}_1$-пространством.

Замечание 2. С другой стороны, пространство, состоящее из двух элементов, замыкание каждого из которых совпадает со всем пространством, является топологическим пространством, но не является $\mathcal{T}_0$-пространством.

X. Регулярные пространства. Менее широким классом, чем хаусдорфовы пространства, является класс *регулярных пространств* (см. Вьеторис [1], стр. 173; Титце [2], стр. 301; Бурбаки [1], стр. 72).

Определение. Топологическое пространство называется *регулярным*, если любая точка p и любое замкнутое множество F, не содержащее p, могут быть отделены открытыми множествами, т. е. если существуют открытые множества G_0 и G_1, такие, что

$$(1) \qquad p \in G_0, \quad F \subset G_1 \quad \text{и} \quad G_0 \cap G_1 = 0,$$

[1]) Понятие $\mathcal{T}_0$-пространства было введено А. Н. Колмогоровым (см. Александров и Хопф [1], стр. 58).

[2]) Более специальное исследование проведено в работе Ауля и Трона [1].

или, эквивалентно, если существует открытое множество G, такое, что

(2) $$p \in G \quad \text{и} \quad \bar{G} \cap F = 0.$$

Регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство называется *$\mathcal{T}_3$-пространством.*

Теорема. *Каждое подмножество регулярного пространства является регулярным пространством.*

Пусть E — подмножество регулярного пространства, и пусть $p \in E - F$, где множество F замкнуто относительно E, т. е. $F = \bar{F} \cap E$ (см. п. IV). Так как точка p не принадлежит множеству $\bar{F}$, существуют два открытых множества G_0 и G_1, таких, что $p \in G_0$, $\bar{F} \subset G_1$ и $G_0 \cap G_1 = 0$. Положим $H_0 = G_0 \cap E$, $H_1 = G_1 \cap E$. Тогда множества H_0 и H_1 открыты в множестве E, $p \in H_0$, $F \subset H_1$ и $H_0 \cap H_1 = 0$. Следовательно, E — регулярное пространство.

Замечание 1. Определение регулярного пространства можно выразить в терминах алгебры с замыканием следующим образом: если $A - \bar{B} \neq 0$, то существует открытое множество G, такое, что $\bar{B} \subset G$ и $A - \bar{G} \neq 0$ (см. Нёбелинг [1]).

Замечание 2. *Существуют хаусдорфовы пространства, не являющиеся регулярными.* Пусть $A = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Введем топологию в единичном интервале $\mathcal{J}$ следующим образом: замкнутыми будут все множества, замкнутые в естественной топологии, а также множество A. В такой топологии $\mathcal{J}$ — хаусдорфово пространство, не являющееся регулярным.

XI. База и подбаза. Семейство $\boldsymbol{B}$ открытых множеств называется (открытой) *базой* топологического пространства, если каждое открытое множество может быть представлено как объединение элементов некоторого подсемейства семейства $\boldsymbol{B}$.

Семейство $\boldsymbol{S}$ открытых множеств называется (открытой) *подбазой*, если семейство всех конечных (непустых) пересечений элементов множества $\boldsymbol{S}$ является базой пространства (Келли [1], стр. 48).

Пример 1. Семейство всех открытых интервалов $r < x < s$ с рациональными концами r, s образует базу в пространстве $\mathscr{E}$ всех вещественных чисел. Семейство всех открытых кругов в $\mathscr{E}^2$ с рациональными радиусами и рациональными центрами образует базу в $\mathscr{E}^2$.

Пример 2. Семейство лучей вида $x > r$ и $x < r$, где r рационально, образует подбазу пространства $\mathscr{E}$.

Пример 3. Пусть $\mathscr{C}$ — канторово совершенное множество (см. § 3, IX), т. е. множество всех чисел t вида $t = (0, t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots)_3$, где $t^{(n)} = 0$ или 2, или, что то же самое, множество $(0, 2)^{\mathfrak{D}}$. Множества $C_{n,\alpha} = \underset{t}{\mathrm{E}}\,(t^{(n)} = \alpha)$, где α либо 0, либо 2, образуют подбазу в $\mathscr{C}$ (в его обычной топологии).

Пример 4. Пусть $\mathcal{N}$ — множество иррациональных чисел, т. е. пространство $\mathcal{D}^{\mathcal{D}}$ всех последовательностей положительных целых чисел $z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots)$ (см. § 3, IX). Множества вида

$$N_{n,m} = \mathop{\mathrm{E}}_{z}(z^{(n)} = m), \quad \text{где} \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

образуют подбазу.

Замечание 1. Пусть X — произвольное множество и $\boldsymbol{S}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Множество X станет топологическим пространством, если в качестве подбазы взять семейство $\boldsymbol{S}$.

Замечание 2. Пространства $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^2$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{N}$, рассмотренные в примерах 1—4, имеют *счетные базы*. То же самое справедливо для пространств $\mathcal{E}^n$, $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ и их подпространств.

Мы увидим далее (гл. II), что во всяком регулярном $\mathcal{T}_1$-пространстве со счетной базой можно ввести *расстояние* между точками (другими словами, такое пространство *метризуемо*).

Замечание 3. Пространство со счетной (но не конечной) базой называется *пространством веса* $\aleph_0$.

Вообще: *вес* пространства — это наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m}$, такое, что пространство имеет базу мощности $\mathfrak{m}$.

Замечание 4. Кроме понятий открытой базы и открытой подбазы, можно рассматривать двойственные понятия *замкнутой базы* и *замкнутой подбазы*. А именно семейство $\boldsymbol{A}$ замкнутых множеств называется *замкнутой базой* пространства, если каждое замкнутое множество может быть представлено как пересечение элементов множества $\boldsymbol{A}$. Семейство $\boldsymbol{R}$ замкнутых множеств называется *замкнутой подбазой*, если семейство всех конечных объединений элементов множества $\boldsymbol{R}$ образует базу этого пространства.

Очевидно, что $(F \in \boldsymbol{A}) \equiv (1 - F \in \boldsymbol{B})$ и $(F \in \boldsymbol{R}) \equiv (1 - F \in \boldsymbol{S})$.

Наконец, рассмотрим понятие *локальной* (открытой) *базы в некоторой точке* p. Так называется всякое семейство открытых множеств, содержащих p, такое, что каждое открытое множество, содержащее p, содержит некоторый элемент этого семейства.

Весьма важную роль играют пространства со счетной локальной базой в каждой точке (они называются *пространствами, удовлетворяющими первой аксиоме счетности*[1])). Таковы, например, метрические пространства.

Естественным образом вводятся понятия *локальной подбазы* и *локального веса*.

Пространства со счетной открытой базой (или со счетной локальной базой) будут изучаться более подробно в гл. II. Здесь мы

---

[1]) Эта аксиома была введена Ф. Хаусдорфом [1], стр. 263.

установим следующую важную связь этих пространств с пространствами Линделёфа (см. п. VII; Линделёф [1], стр. 697; Юнг [2], стр. 384).

Теорема Линделёфа. *Каждое топологическое пространство со счетной открытой базой есть пространство Линделёфа.*

Другими словами, в таком пространстве каждое (несчетное) семейство открытых множеств $\{G_t\}$ содержит (счетную) последовательность $G_{t_1}, G_{t_2}, \ldots$, такую, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{t_n} = \bigcup_t G_t.$$

Пусть множества $R_1, R_2, \ldots$ образуют базу рассматриваемого пространства, и пусть $R_{k_1}, R_{k_2}, \ldots$ — последовательность элементов базы, содержащихся в множествах семейства $\{G_t\}$. Каждому индексу k_n можно поставить в соответствие (согласно аксиоме выбора) индекс t_n, такой, что $R_{k_n} \subset G_{t_n}$. Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_{k_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{t_n} \subset \bigcup_t G_t.$$

С другой стороны, если $p \in G_t$, то существует индекс j, такой, что $p \in R_j \subset G_t$. Индекс j принадлежит последовательности $k_1, k_2, \ldots$, т. е. $p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{k_n}$, поэтому $\bigcup_t G_t \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{k_n}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорему Линделёфа можно сформулировать также следующим эквивалентным образом: *каждое (несчетное) семейство замкнутых множеств $\{F_\iota\}$ в рассматриваемом пространстве содержит некоторую (счетную) последовательность $F_{\iota_1}, F_{\iota_2}, \ldots$, такую, что*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\iota_n} = \bigcap_{\iota} F_\iota.$$

Для того чтобы доказать это утверждение, достаточно обозначить через G_ι дополнение множества F_ι и применить закон двойственности Моргана (§ 1, V) к теореме Линделёфа.

§ 6. Граница и внутренность множества

I. Определения (см. Кантор [3], стр. 128, и Жордан [1], стр. 72). *Границей* множества X называется множество

$$\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \cap \overline{(1 - X)}.$$

Внутренностью множества X называется множество

$$\mathrm{Int}(X) = 1 - \overline{1 - X}.$$

Примеры. Пусть множество X есть круг $x^2+y^2\leqslant 1$ на евклидовой плоскости; тогда множество $\mathrm{Fr}(X)$ — окружность круга, а множество $\mathrm{Int}(X)$ — открытый круг. Ничто не изменится, если заменить знак $\leqslant$ знаком $<$.

В пространстве натуральных чисел граница каждого множества пуста.

В пространстве действительных чисел границей множества рациональных чисел является все пространство.

Пусть X — произвольное множество в пространстве действительных чисел и f — функция, определенная условиями: $f(x)=1$ для $x\in X$ и $f(x)=0$ для $x\in 1-X$; тогда граница множества X состоит из множества *точек разрыва* функции f (см. § 13).

II. Некоторые формулы. Мы будем пользоваться в дальнейшем следующими формулами[1]):

(1) $\mathrm{Int}(X\cap Y)=\mathrm{Int}(X)\cap\mathrm{Int}(Y)$;

(1′) $(X\subset Y)\Rightarrow(\mathrm{Int}(X)\subset\mathrm{Int}(Y))$;

(2) $\bigcup_\iota \mathrm{Int}(X_\iota)\subset\mathrm{Int}\left(\bigcup_\iota X_\iota\right)$;

(3) $\mathrm{Int}(X)=X-\overline{1-X}=X-\mathrm{Fr}(X)\subset X$;

(4) $\mathrm{Fr}(1-X)=\mathrm{Fr}(X)$;

(5) $\mathrm{Fr}(\overline{X})\subset\mathrm{Fr}(X)$;

(6) $\mathrm{Fr}(X)=(X\cap\overline{1-X})\cup(\overline{X}-X)$;

(7) $X\cup\mathrm{Fr}(X)=\overline{X}$;

(8) $\mathrm{Fr}(X)\cup\mathrm{Fr}(Y)=\mathrm{Fr}(X\cup Y)\cup\mathrm{Fr}(X\cap Y)\cup(\mathrm{Fr}(X)\cap\mathrm{Fr}(Y))$[2]);

(9) $\mathrm{Int}[\mathrm{Int}(X)]=\mathrm{Int}(X)$;

(10) $\mathrm{Int}(X)\cap\mathrm{Fr}(X)=0$;

(11) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(X))\subset\mathrm{Fr}(X)$;

(12) $\overline{\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(X))}=\overline{X\cap\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(X))}=\overline{\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(X))-X}$;

(13) $\mathrm{Fr}\{\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(X)]\}=\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(X)]$;

(14) $\mathrm{Int}(X-Y)\subset\mathrm{Int}(X)-\mathrm{Int}(Y)$;

(15) $\overline{\mathrm{Int}(\overline{X\cup Y})}=\overline{\mathrm{Int}(\overline{X})}\cup\overline{\mathrm{Int}(\overline{Y})}$.

Формулы (1) — (3) можно установить следующим образом. Имеем

$$1-\overline{1-(X\cap Y)}=1-\overline{(1-X)\cup(1-Y)}=1-(\overline{1-X}\cup\overline{1-Y})=$$
$$=(1-\overline{1-X})\cap(1-\overline{1-Y});$$
$$\bigcup_\iota \mathrm{Int}(X_\iota)=1-\bigcap_\iota\overline{1-X_\iota}\subset 1-\overline{\bigcap_\iota(1-X_\iota)}=\mathrm{Int}\left(\bigcup_\iota X_\iota\right).$$

[1]) Некоторые из них имеются в работе Зарицкого [1]. Автор изучает, кроме того, такие функции множеств, как „край" $X\cap(\overline{1-X})$ и „внешность" $1-\overline{X}$. См. в этом направлении также работы Хеммера [2], [4], [5].

[2]) См. Стоун А. [2], стр. 428.

Далее, $1-\overline{1-X}\subset 1-(1-X)=X$, откуда

$$\operatorname{Int}(X)=X\cap(1-\overline{1-X})=X-\overline{1-X}=X-(X\cap\overline{1-X})=$$
$$=X-(X\cap\overline{X}\cap\overline{1-X})=X-(\overline{X}\cap\overline{1-X})=X-\operatorname{Fr}(X)\subset X.$$

Формулы (4) и (5) очевидны. Имеем

$$\overline{X}\cap\overline{1-X}=[(\overline{X}\cap\overline{1-X})\cap X]\cup[\overline{X}\cap\overline{1-X}\cap(1-X)],$$

откуда с помощью включений $X\subset\overline{X}$ и $1-X\subset\overline{1-X}$ мы получаем (6). Далее,

$$X\cup\operatorname{Fr}(X)=X\cup(X\cap\overline{1-X})\cup(\overline{X}-X)=X\cup(\overline{X}-X)=\overline{X},$$

откуда следует формула (7). Докажем формулу (8):

$$\operatorname{Fr}(X\cup Y)=\overline{X\cup Y}\cap\overline{1-(X\cup Y)}=\overline{X\cup Y}\cap\overline{(1-X)\cap(1-Y)}\subset$$
$$\subset(\overline{X}\cap\overline{1-X}\cap\overline{1-Y})\cup(\overline{Y}\cap\overline{1-X}\cap\overline{1-Y})\subset$$
$$\subset(\overline{X}\cap\overline{1-X})\cup(\overline{Y}\cap\overline{1-Y})=\operatorname{Fr}(X)\cup\operatorname{Fr}(Y);$$
$$\operatorname{Fr}(X\cap Y)=\operatorname{Fr}(1-(X\cap Y))=\operatorname{Fr}((1-X)\cup(1-Y))\subset$$
$$\subset\operatorname{Fr}(1-X)\cup\operatorname{Fr}(1-Y)=\operatorname{Fr}(X)\cup\operatorname{Fr}(Y).$$

С другой стороны, $X=(X\cap Y)\cup(X-Y)$ и $1-X=(Y-X)\cup$ $\cup(1-(X\cup Y))$, откуда

$$\operatorname{Fr}(X)\subset(\overline{X\cap Y}\cap\overline{1-X})\cup(\overline{X-Y}\cap\overline{Y-X})\cup$$
$$\cup(\overline{X-Y}\cap\overline{1-(X\cup Y)})\subset$$
$$\subset\operatorname{Fr}(X\cap Y)\cup(\operatorname{Fr}(X)\cap\operatorname{Fr}(Y))\cup\operatorname{Fr}(X\cup Y).$$

Это завершает доказательство формулы (8).

Формулы (9) и (10) очевидны, а (11) следует из (4) и (5).

В силу формул (1′) и (3), из включения $\operatorname{Fr}(X)\subset\overline{X}$ следует, что $\operatorname{Int}(\operatorname{Fr}(X))\subset\overline{X}$. Обозначим через G (открытое) множество $\operatorname{Int}(\operatorname{Fr}(X))$; тогда $G=G\cap\overline{X}$, откуда, согласно § 5, III, следует равенство $\overline{G}=\overline{G\cap\overline{X}}=\overline{G\cap X}$, что доказывает первую часть соотношения (12). Вторая часть этого соотношения следует из формулы (4), если вместо X подставить $1-X$.

Доказательство соотношений (13) и (14) мы предоставляем читателю. Формула (15) будет установлена в § 8.

III. Связь с замкнутыми и открытыми множествами. Непосредственно видно, что *всякая граница замкнута* и что *всякая внутренность открыта*[1]). Более того, *внутренность множества X есть наибольшее открытое подмножество* множества X. Действительно, если G — открытое подмножество множества X, то мы имеем

$$1 - X \subset 1 - G = \overline{1 - G}, \text{ откуда } \overline{1 - X} \subset 1 - G$$

и, следовательно,

$$G \subset 1 - \overline{1 - X} = \mathrm{Int}(X).$$

Если X — замкнутое множество, то $\mathrm{Fr}(X) = X \cap \overline{1 - X}$; *если X — открытое множество, то* $\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} - X$.

Каждое из этих равенств *характеризует* соответственно замкнутые и открытые множества. В самом деле, из соотношения (6) в первом случае вытекает, что $\overline{X} - X = 0$, т. е. $\overline{X} = X$, а во втором случае — что $X \cap \overline{1 - X} = 0$, т. е. $\overline{1 - X} = 1 - X$. В частности, равенство $\mathrm{Fr}(X) = 0$ эквивалентно утверждению, что множество X одновременно *замкнуто* и *открыто*.

Для того чтобы множество X было разностью двух замкнутых множеств, необходимо и достаточно, чтобы множество $\overline{X} - X$ было замкнутым (см. Серпинский и Куратовский [2], стр. 22).

В самом деле, пусть $X = E - F$, где E и F — замкнутые множества. Имеем

$$X = \overline{X} \cap (E - F) = (\overline{X} \cap E) - (\overline{X} \cap F).$$

Так как $X \subset E$, то $\overline{X} \subset E$, откуда $\overline{X} \cap E = \overline{X}$. Следовательно, $X = \overline{X} - (\overline{X} \cap F)$, откуда $\overline{X} - X = \overline{X} \cap F$; следовательно, $\overline{X} - X$ есть замкнутое множество.

Обратно, если $\overline{X} - X$ замкнуто, то множество X, равное $\overline{X} - (\overline{X} - X)$, есть разность двух замкнутых множеств.

IV. Теорема аддитивности. Сопоставим с формулой (2) следующую теорему (которой мы воспользуемся в § 8):

Пусть $\{X_\iota\}$ — некоторое семейство (произвольной мощности) множеств, открытых относительно $\bigcup_\iota X_\iota$. Тогда

(i) $\mathrm{Int}(\bigcup_\iota X_\iota) = \bigcup_\iota \mathrm{Int}(X_\iota)$;

(ii) $\overline{\mathrm{Int}(\overline{\bigcup_\iota X_\iota})} = \bigcup_\iota \overline{\mathrm{Int}(\overline{X_\iota})}$.

---

[1]) Это утверждение эквивалентно аксиоме 4. Под названием „условия Хедрика" оно рассматривалось некоторыми авторами как аксиома. См. Хедрик [1], стр. 285, и Фреше [5], стр. 201.

В самом деле, положим $S=\bigcup_\iota X_\iota$, тогда, по предположению, имеем $X_\iota = S - \overline{S - X_\iota} \subset 1 - \overline{S - X_\iota}$, следовательно, $S \subset \bigcup_\iota (1 - \overline{S - X_\iota})$. Далее имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Int}(S) &= S \cap \operatorname{Int}(S) \subset \bigcup_\iota (1 - \overline{S - X_\iota}) \cap (1 - \overline{1 - S}) = \\ &= \bigcup_\iota [1 - (\overline{S - X_\iota) \cup (1 - S})] = \bigcup_\iota (1 - \overline{1 - S \cap X_\iota}) = \\ &= \bigcup_\iota (1 - \overline{1 - X_\iota}) = \bigcup_\iota \operatorname{Int}(X_\iota),\end{aligned}$$

откуда, в силу (2), следует (i).

Согласно § 5, III, имеем $\operatorname{Int}(\overline{S}) = \operatorname{Int}(\overline{S}) \cap \overline{S} \subset \overline{\operatorname{Int}(\overline{S}) \cap S}$. Как мы доказали выше, $S \subset \bigcup_\iota (1 - \overline{S - X_\iota})$; следовательно,

$$\operatorname{Int}(\overline{S}) \subset \overline{\operatorname{Int}(\overline{S}) \cap \bigcup_\iota (1 - \overline{S - X_\iota})} = \overline{\bigcup_\iota (\operatorname{Int}(\overline{S}) - \overline{S - X_\iota})}.$$

Но $\operatorname{Int}(\overline{S}) - \overline{S - X_\iota} \subset \overline{S} - (\overline{S - X_\iota}) \subset \overline{S - (S - X_\iota)} = \overline{X}_\iota$, и так как первый член этого включения есть открытое множество, он содержится во внутренности множества $\overline{X}_\iota$; таким образом, $\operatorname{Int}(\overline{S}) - \overline{S - X_\iota} \subset \operatorname{Int}(\overline{X}_\iota)$. Согласно предыдущей формуле, мы получаем $\operatorname{Int}(\overline{S}) \subset \overline{\bigcup_\iota \operatorname{Int}(\overline{X}_\iota)}$, откуда

$$\overline{\operatorname{Int}(\overline{S})} \subset \overline{\bigcup_\iota \operatorname{Int}(\overline{X}_\iota)}.$$

Остается доказать обратное включение. Согласно соотношению (1′), мы имеем $\operatorname{Int}(\overline{X}_\iota) \subset \operatorname{Int}(\overline{S})$. Следовательно, $\bigcup_\iota \operatorname{Int}(\overline{X}_\iota) \subset \operatorname{Int}(\overline{S})$ и, наконец,

$$\overline{\bigcup_\iota \operatorname{Int}(\overline{X}_\iota)} \subset \overline{\operatorname{Int}(\overline{S})}.$$

V. Отделимые множества.

О п р е д е л е н и е. Множества X и Y называются *отделимыми* (см. Мазуркевич [3], стр. 66, и Кнастер и Куратовский [1], стр. 206), если

(1) $$\overline{X} \cap Y = 0 = X \cap \overline{Y}.$$

Множество $1 - (X \cup Y)$ называется *отделяющим* множество X от Y; оно отделяет также любое множество $U \subset X$ от любого множества $V \subset Y$.

Два отделимых множества не пересекаются, однако обратное утверждение, неверно, как видно из простых примеров.

Теорема 1. *Пусть X и Y — отделимые множества и $U \subset X$ и $V \subset Y$; тогда множества U и V отделимы.*

Это утверждение непосредственно следует из соотношения (1).

Теорема 2. *Если множества A и B замкнуты (или открыты), то множества $A - B$ и $B - A$ отделимы.*

Если $\overline{A} = A$, то $\overline{A - B} \subset \overline{A} = A$, следовательно,

$$\overline{A - B} \cap (B - A) = 0.$$

Случай открытых множеств сводится к случаю замкнутых при помощи тождества

$$A - B = (1 - B) - (1 - A).$$

Теорема 3. *Если множества A и B оба замкнуты (или оба открыты) и $A \cap B = 0$, то A и B отделимы.*

Эта теорема следует из теоремы 2, так как $A - B = A$ и $B - A = B$.

Теорема 4. *Если множество X отделимо от Y и от Z, то X отделимо от $Y \cup Z$.*

В самом деле, $\overline{X} \cap (Y \cup Z) = (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap Z) = 0$ и, с другой стороны, $X \cap \overline{Y \cup Z} = (X \cap \overline{Y}) \cup (X \cap \overline{Z}) = 0$.

Теорема 5. *Множества X и Y отделимы тогда и только тогда, когда они не пересекаются и замкнуты относительно своего объединения.*

Доказательство. Если множества X и Y отделимы, то, согласно соотношению (1), мы имеем

$$X = X \cup (\overline{X} \cap Y) = \overline{X} \cap (X \cup Y).$$

Это равенство означает, что множество X (так же как и множество Y) замкнуто в множестве $X \cup Y$.

С другой стороны, если $X \cap Y = 0$ и $X = \overline{X} \cap (X \cup Y)$, то $\overline{X} \cap Y \subset X \cap Y = 0$.

Теорема 6. *Множество $\mathrm{Fr}(X)$ отделяет внутренность множества X от внутренности его дополнения.*

Действительно,

$$1 - \mathrm{Fr}(X) = 1 - (\overline{X} \cap \overline{1 - X}) = (1 - \overline{X}) \cup (1 - \overline{1 - X}).$$

VI. Двойственность между операциями замыкания и взятия внутренности множества. Формула $-\overline{X} = \operatorname{Int}(-X)$ позволяет распространить двойственность алгебры Буля (основанную на правилах Моргана) на утверждения, выраженные с помощью операций $\overline{A}$ и $\operatorname{Int} A$. А именно, так как эти операции двойственны, то из любого истинного высказывания такого рода можно получить двойственное истинное высказывание, заменяя все операции двойственными (напомним, что двойственными являются операции $A \cup B$ и $A \cap B$; $A - B$ и $A : B$; $A \subset B$ и $A \supset B$; 0 и 1, см. § 1, II).

Например, таким способом можно получить соотношение II (1) из § 4, аксиомы 1; II (2) из § 4, III (4); II (14) из § 4, III (3a) и т. д.

Следует заметить, что вместо операции замыкания $\overline{X}$ в качестве основной операции при определении [1]) топологического пространства можно рассматривать операцию взятия внутренности множества $\operatorname{Int}(X)$. Этому соответствуют следующие аксиомы:

α) $\operatorname{Int}(X \cap Y) = \operatorname{Int}(X) \cap \operatorname{Int}(Y)$;

β) $\operatorname{Int}(X) \subset X$;

γ) $\operatorname{Int}(1) = 1$;

δ) $\operatorname{Int}[\operatorname{Int}(X)] = \operatorname{Int}(X)$.

§ 7. Окрестность точки. Локализация свойств

1. Определения. Множество X называется *окрестностью точки* p, если $p \in \operatorname{Int}(X)$, т. е. если точка p есть внутренняя точка множества X; иначе говоря, если точка p не принадлежит множеству $\overline{1 - X}$.

Открытое множество является окрестностью каждой из своих точек. Всякая окрестность точки p содержит *открытую* окрестность этой точки, а именно внутренность этой окрестности.

Каждое надмножество какой-либо окрестности точки p также является окрестностью точки p. Пересечение двух окрестностей точки p есть окрестность этой точки, ибо (см. § 6, II (1))

$$\operatorname{Int}(X \cap Y) = \operatorname{Int}(X) \cap \operatorname{Int}(Y).$$

Таким образом, *семейство окрестностей точки p является фильтром.*

Подмножество X множества E называется *окрестностью точки p относительно* множества E, если точка p принадлежит внутренности множества X относительно множества E, т. е. $p \in E - \overline{E - X}$.

---

[1]) Понятие границы также можно положить в основу определения топологического пространства. См. Зарицкий [1] и Альбукерк [1].

Если множество X_i есть окрестность точки p относительно E_i $(i = 0, 1)$, то множество $X_0 \cup X_1$ есть окрестность точки p относительно $E_0 \cup E_1$.

В самом деле, имеем $p \in E_0 \cap E_1 - (\overline{E_0 - X_0} \cup \overline{E_1 - X_1})$. Так как

$$(E_0 - X_0) \cup (E_1 - X_1) \supset [E_0 - (X_0 \cup X_1)] \cup [E_1 - (X_0 \cup X_1)] =$$
$$= (E_0 \cup E_1) - (X_0 \cup X_1), \text{ то } p \in (E_0 \cup E_1) - \overline{(E_0 \cup E_1) - (X_0 \cup X_1)}.$$

II. Необходимые и достаточные условия.

Теорема 1. *Для того чтобы точка p принадлежала $\overline{X}$, необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность E точки p удовлетворяла неравенству $X \cap E \neq 0$.*

Действительно, пусть $p \in \overline{X}$, и пусть E — произвольная окрестность точки p. Это означает, что точка p не принадлежит множеству $\overline{1 - E}$, но тогда $p \in \overline{X} - \overline{1 - E} \subset \overline{X - (1 - E)} = \overline{X \cap E}$, и поэтому $X \cap E \neq 0$.

С другой стороны, предположим, что каждая окрестность E точки p удовлетворяет неравенству $X \cap E \neq 0$. Отсюда вытекает, что множество $1 - X$ не является окрестностью этой точки и, следовательно, $p \in \overline{1 - (1 - X)} = \overline{X}$.

Отсюда непосредственно получаем такое следствие:

Следствие 1a. *Для того чтобы точка p принадлежала* $\mathrm{Fr}(X)$, *необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность E точки p удовлетворяла двойному неравенству $E \cap X \neq 0 \neq E - X$.*

Следует заметить, что в двух предыдущих предложениях термин „окрестность точки p“ можно заменить термином „открытое множество, содержащее точку p“.

Замечание. Определение топологического пространства (§ 4, I) можно сформулировать эквивалентным образом, если в качестве исходного понятия взять открытую окрестность (о. о.) точки и потребовать выполнения следующих аксиом[1]):

A) *Всякой точке p соответствует по крайней мере одна* о. о. *Каждая* о. о. *точки p содержит точку p.*

B) *Пусть U и V — две* о. о. *точки p; тогда существует* о. о. *точки p, содержащаяся в $U \cap V$.*

C) *Пусть U — некоторая* о. о. *точки p и $q \in U$; тогда существует* о. о. *V точки q, содержащаяся в U.*

Легко видеть, что в топологическом пространстве условия A — C имеют место.

[1]) См. Хаусдорф [1], стр. 213. О первых работах в этом направлении см. Гильберт [1]. Ср. также с (V)-пространствами („окрестностными“ пространствами) Фреше [5], стр. 172.

Обратно, если в пространстве, удовлетворяющем условиям A — C, определить замыкание при помощи утверждения 1, то пространство станет топологическим (в смысле § 4, I) [1]).

III. Сходящиеся фильтры. Мы скажем, что (собственный) фильтр $\boldsymbol{F}$ (см. § 1, VII) *сходится* к точке p, если каждая окрестность этой точки принадлежит $\boldsymbol{F}$ (т. е. если фильтр $\boldsymbol{F}$ сильнее, чем фильтр всех окрестностей точки p) [2]).

В хаусдорфовом пространстве любой (собственный) фильтр $\boldsymbol{F}$ может сходиться лишь к одной точке, называемой пределом фильтра $\boldsymbol{F}$.

В самом деле, пусть $a \neq b$ — предельные точки фильтра $\boldsymbol{F}$, и пусть A и B — непересекающиеся окрестности точек a и b. Тогда $A \in \boldsymbol{F}$, $B \in \boldsymbol{F}$ и, следовательно, $A \cap B \in \boldsymbol{F}$. Но $A \cap B = 0$, поэтому пустое множество 0 должно принадлежать $\boldsymbol{F}$, что невозможно.

IV. Локализация. Пусть $\mathbf{P}$ — некоторое свойство множеств. Обозначим через $\boldsymbol{P}$ семейство множеств, обладающих этим свойством. Во многих случаях применяется следующая локализация.

Определение. *Множество X обладает свойством* $\mathbf{P}$ *в точке p*, если существует окрестность E этой точки, такая, что $X \cap E \in \boldsymbol{P}$. Через X^* обозначается множество точек p (принадлежащих или не принадлежащих множеству X), в которых X не обладает свойством $\mathbf{P}$.

Например, если семейство $\boldsymbol{P}$ состоит только из пустого множества, то, согласно утверждению 1 п. II, $X^* = \overline{X}$. Локализация свойства множества быть конечным или счетным приводит, как мы увидим (§ 9 и 23), к понятиям *производного множества* и *множества точек конденсации* множества X.

Изучим операцию X^* в том случае, когда семейство $\boldsymbol{P}$ является *идеалом* (см. § 1, VII), т. е.

(i) $(X \in \boldsymbol{P}$ и $Y \subset X) \Rightarrow (Y \in \boldsymbol{P})$;

(ii) $(X \in \boldsymbol{P}$ и $Y \in \boldsymbol{P}) \Rightarrow (X \cup Y \in \boldsymbol{P})$.

Следствия из условия (i). Если выполняется условие (i), то в предыдущем определении окрестность E можно считать открытой. В самом деле, согласно п. I, каждая окрестность E точки p содержит некоторую открытую окрестность G точки p; следова-

---

[1]) Эквивалентность топологий, вводимых при помощи замыкания и при помощи окрестностей, изучалась Деем [1] при более слабых предположениях (когда выполняются не все аксиомы замыкания 1—4). См., кроме того, Рибейро [1].

[2]) Дальнейшие определения и теоремы см. в книге Бурбаки [1], гл. 1, § 6, 7.

тельно, если $X \cap E \in \boldsymbol{P}$, то из включения $X \cap G \subset X \cap E$ вытекает, что $X \cap G \in \boldsymbol{P}$. Отсюда в свою очередь следует, что множество $1 - X^*$, как объединение открытых множеств, открыто. Следовательно, множество X^* *замкнуто*. Так как $\boldsymbol{P} \neq 0$, то $0 \in \boldsymbol{P}$.

Покажем теперь, что

(1) $(X \subset Y) \Rightarrow (X^* \subset Y^*)$;

(2) $X^{**} \subset X^* = \overline{X^*} \subset \overline{X}$;

(3) *если G — открытое множество, то* $G \cap X^* = G \cap (G \cap X)^*$.

В самом деле, пусть $X \subset Y$, $p \in X^*$ и G — открытое множество, содержащее точку p. Тогда $X \cap G \notin \boldsymbol{P}$, и так как $X \cap G \subset Y \cap G$, то из условия (i) вытекает, что $Y \cap G \notin \boldsymbol{P}$. Следовательно, $p \in Y^*$.

Так как $(1 - \overline{X}) \cap X = 0 \in \boldsymbol{P}$, то $1 - \overline{X} \subset 1 - X^*$, т. е. $X^* \subset \overline{X}$. Отсюда $(X^*)^* \subset \overline{X^*} = X^*$.

Пусть теперь $p \in G \cap X^*$. Тогда, если H — окрестность точки p, то $H \cap G \cap X \notin \boldsymbol{P}$ (так как $H \cap G$ — окрестность точки p). Отсюда вытекает, что $p \in (G \cap X)^*$. Таким образом, $G \cap X^* \subset (G \cap X)^*$. С другой стороны, согласно (1), из включения $G \cap X \subset X$ следует, что $(G \cap X)^* \subset X^*$, поэтому $G \cap (G \cap X)^* \subset G \cap X^*$. Из последнего включения вытекает справедливость равенства (3).

В соответствии с равенством (3) тот факт, что множество X обладает или не обладает некоторым свойством в точке p, связан лишь с окрестностью этой точки, т. е. является фактом „локальным“.

Заметим, наконец, что из предложения (1) вытекают (см. § 4, III) следующие формулы:

(4) $$(X \cap Y)^* \subset X^* \cap Y^*;$$

(5) $$\left(\bigcap_\iota X_\iota\right)^* \subset \bigcap_\iota X_\iota^*;$$

(6) $$\bigcup_\iota X_\iota^* \subset \left(\bigcup_\iota X_\iota\right)^*.$$

Следствия из условий (i) и (ii).

(7) $$(X \cup Y)^* = X^* \cup Y^*;$$

(8) $$X^* - Y^* \subset (X - Y)^*.$$

В самом деле, если $p \notin X^*$, то существует окрестность G точки p, такая, что $X \cap G \in \boldsymbol{P}$. Точно так же, если $p \notin Y^*$, то существует окрестность H точки p, такая, что $Y \cap H \in \boldsymbol{P}$. Согласно условию (i), $X \cap G \cap H \in \boldsymbol{P}$ и $Y \cap G \cap H \in \boldsymbol{P}$, откуда, в силу условия (ii), $(X \cup Y) \cap G \cap H \in \boldsymbol{P}$. Итак, $p \notin (X \cup Y)^*$, следовательно, $(X \cup Y)^* \subset$ $\subset X^* \cup Y^*$. Обратное включение является частным случаем формулы (6).

Формула (8) вытекает из равенства (7); см. § 4, III, правило (3).

V. Локально замкнутые множества.

Определение. Множество $X\ (\subset 1)$ называется *локально замкнутым* в точке $p \in X$, если существует открытое множество G, содержащее p, такое, что множество $G \cap X$ замкнуто в G (см. Бурбаки [1]).

Теорема 1. *Множество всех точек $p \in X$, в которых множество X не является локально замкнутым, совпадает с множеством $X \cap \overline{\overline{X} - X}$* (называемым *вычетом*[1]) множества X).

Доказательство. Предположим сначала, что $p \notin X \cap \overline{\overline{X} - X}$. Положим $G = 1 - \overline{\overline{X} - X}$; тогда G — открытое множество, содержащее точку p. Кроме того,

$$G \cap \overline{\overline{X} - X} = 0, \quad \text{откуда} \quad G \cap \overline{X} - X = 0;$$

следовательно, $G \cap \overline{X} \subset X$. Отсюда вытекает, что $G \cap \overline{X} \subset G \cap X \subset \subset G \cap \overline{X}$, и окончательно мы получаем равенство $G \cap X = G \cap \overline{X}$. Таким образом, множество $G \cap X$ замкнуто в G.

Далее, предположим, что множество X замкнуто в точке p. Пусть G — открытое множество, содержащее точку p и такое, что $G \cap X$ замкнуто в G, т. е. $G \cap X = \overline{G \cap X} \cap G$. Мы покажем, что $G \subset 1 - \overline{\overline{X} - X}$, т. е. $\overline{\overline{X} - X} \subset 1 - G$, или $\overline{X} - X \subset 1 - G$ (G — открытое множество). Имеем

$$\overline{X} - X \subset \overline{X} - (G \cap X) = \overline{X} - (\overline{G \cap X} \cap G) = (\overline{X} - \overline{G \cap X}) \cup (\overline{X} - G);$$

но, согласно § 4, III (3), $\overline{X} - \overline{G \cap X} \subset \overline{X - G \cap X} = \overline{X - G} \subset \overline{1 - G} = 1 - G$. Таким образом, $\overline{X} - X \subset 1 - G$, откуда $p \notin \overline{\overline{X} - X}$.

Следствие 1а. *Множество X локально замкнуто в каждой своей точке тогда и только тогда, когда X есть разность двух замкнутых множеств или* (*эквивалентно, ср.* § 6, III) *когда множество $\overline{X} - X$ замкнуто.*

По теореме 1 локальная замкнутость множества X в каждой точке означает, что $X \cap \overline{\overline{X} - X} = 0$. Это равенство эквивалентно включению $\overline{\overline{X} - X} \subset \overline{X} - X$, откуда следует, что множество $\overline{X} - X$ замкнуто.

Замечание 1. Для регулярных пространств данное выше определение локальной замкнутости может быть выражено в терминах

[1]) Более подробно о вычетах см. § 12, VII и VIII.

общего определения локальных свойств, сформулированного в п. IV, а именно справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы подмножество X регулярного пространства было локально замкнутым в точке $p \in X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность E точки p (относительно пространства), такая, что множество $E \cap X$ замкнуто.*

Предположим, что множество X локально замкнуто в точке $p \in X$. Пусть G — открытая окрестность точки p, такая, что множество $G \cap X$ замкнуто в G, т. е. $G \cap X = \overline{G \cap X} \cap G$. Так как пространство регулярно, существует открытое множество H, такое, что $p \in H$ и $\overline{H} \subset G$. Следовательно,

$$\overline{H} \cap X = \overline{H} \cap G \cap X = \overline{H} \cap \overline{G \cap X} \cap G = \overline{H} \cap \overline{G \cap X}.$$

Итак, множество $E = \overline{H}$ является окрестностью точки p и имеет замкнутое пересечение с множеством X. Поэтому сформулированное условие необходимо.

Для доказательства достаточности положим $G = \operatorname{Int}(E)$. Так как множество $E \cap X$ замкнуто, то множество $G \cap X = G \cap (E \cap X)$ замкнуто в G.

Замечание 2[1]. Теорема 2 не имеет места в нерегулярных пространствах.

Действительно, если пространство нерегулярно, то оно содержит точку p и открытое множество $G \ni p$, такие, что никакое замкнутое множество $F \subset G$ не является окрестностью точки p. Поэтому множество $X = G$ локально замкнуто в точке p (см. следствие), хотя условие теоремы 2 не выполняется.

§ 8. Всюду плотные, граничные и нигде не плотные множества

I. Определения. 1. Множество X называется *всюду плотным*, если $\overline{X} = 1$ (Кантор [2], стр. 2).

2. Множество X называется *граничным*, если его дополнение всюду плотно, т. е. $\overline{1 - X} = 1$.

3. Множество X называется *нигде не плотным*[2], если его замыкание является граничным множеством, т. е. $\overline{1 - \overline{X}} = 1$.

---

[1] Это замечание принадлежит Галчинской-Карлович.

[2] Это понятие восходит к Дюбуа-Реймону [1].

4. Пространство, содержащее счетное всюду плотное подмножество, называется *сепарабельным*[1]).

Примеры. В пространстве действительных чисел рациональные числа образуют всюду плотное граничное множество. Однако это множество не является нигде не плотным.

В плоскости окружность круга является нигде не плотным множеством.

В интервале (0, 1) канторово множество $\mathscr{C}$ является нигде не плотным.

Очевидно, что всякое надмножество всюду плотного множества является всюду плотным, всякое подмножество граничного множества является граничным, всякое подмножество нигде не плотного множества является нигде не плотным.

Всякое нигде не плотное множество является граничным. Обратно, всякое замкнутое граничное множество является нигде не плотным.

Граничное множество может быть открытым только в том случае, если оно пустое.

II. Необходимые и достаточные условия[2]). Равенство $\overline{1-X}=1$ эквивалентно формуле $\operatorname{Int}(X)=0$.

Таким образом, граничные множества можно определить как множества, *не содержащие ни одной внутренней точки*, или не содержащие непустого открытого множества. Так как равенство $\operatorname{Int}(X)=0$ эквивалентно включению $X\subset\operatorname{Fr}(X)$ (см. § 6, II (3)), то можно еще определить граничное множество как множество, *содержащееся в своей границе*, или как множество, удовлетворяющее включению $X\subset\overline{1-X}$т. Отсюда следует, что $\overline{X}$ является граничным множеством тогда и только тогда, когда $\overline{X}\subset\overline{1-\overline{X}}$ или, что то же самое, когда

$$X\subset\overline{1-\overline{X}}.$$

Это последнее включение характеризует, таким образом, нигде не плотные множества.

Другое необходимое и достаточное условие того, что некоторое множество X нигде не плотно, формулируется так: *каждое непустое открытое множество содержит непустое открытое подмножество, не пересекающееся с X.*

В самом деле, если X — нигде не плотное множество, то $\overline{X}$, как граничное множество, не содержит открытого непустого множества. Следовательно, если G — произвольное открытое множество $(\neq 0)$, то множество $G-\overline{X}$ не пусто, открыто и не пересекается с X.

С другой стороны, если множество X не является нигде не плотным, то множество $\overline{X}$ не является граничным, следовательно,

---

[1]) См. Фреше, [1], стр. 23. По поводу локально сепарабельных пространств (понятие введенное П. С. Урысоном [8], стр. 119) см. Александров [3a] и Серпинский [49]

[2]) О многочисленных свойствах всюду плотных, граничных и нигде не плотных множеств см. Уоллес [1], стр. 420.

$\mathrm{Int}(\overline{X}) \neq 0$. Если G — открытое непустое подмножество множества $\mathrm{Int}(\overline{X})$, то $G \subset \mathrm{Int}(\overline{X}) \subset \overline{X}$, откуда $G \cap \overline{X} \neq 0$ и, следовательно, $G \cap X \neq 0$ (см. § 5, III). Это означает, что открытое непустое множество $\mathrm{Int}(\overline{X})$ не содержит никакого открытого непустого подмножества, которое не пересекалось бы с X.

III. Операции.

Теорема 1. *Объединение граничного и нигде не плотного множества является граничным множеством*[1]).

Доказательство. Пусть $\overline{1 - X} = 1 = \overline{1 - \overline{Y}}$. Из § 4, III (3) следует, что $1 - \overline{Y} = \overline{1 - X} - \overline{Y} \subset \overline{(1 - X) - Y} = \overline{1 - (X \cup Y)}$. Отсюда $1 = \overline{1 - \overline{Y}} \subset \overline{1 - (X \cup Y)}$, и окончательно $\overline{1 - (X \cup Y)} = 1$.

Теорема 2. *Объединение двух нигде не плотных множеств является нигде не плотным множеством.* (См. Янишевский [1], стр. 26.)

Доказательство. Пусть X и Y — нигде не плотные множества, тогда $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — также нигде не плотные множества и, согласно теореме 1, $\overline{X} \cup \overline{Y}$ — граничное множество. Так как множество $\overline{X} \cup \overline{Y}$ замкнуто, оно нигде не плотно, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть $\{X_\iota\}$ — семейство множеств, открытых относительно множества $\bigcup_\iota X_\iota$. Если каждое X_ι является граничным (соответственно нигде не плотным) множеством, то множество $\bigcup_\iota X_\iota$ также граничное (соответственно нигде не плотное).*

Это следует из теоремы § 6, IV, если заметить, что $\mathrm{Int}(X_\iota) = 0$, соответственно $\mathrm{Int}(\overline{X}_\iota) = 0$.

IV. Разложение границы.

Теорема 1. *Граница произвольного множества X разлагается на два граничных множества, а именно множество $X \cap \overline{1 - X} = X - \mathrm{Int}(X)$ и множество $\overline{X} - X$.*

Формула $\mathrm{Fr}(X) = (X \cap \overline{1 - X}) \cup (\overline{X} - X)$ была установлена в § 6 (II (6)). Достаточно показать, что множество $X \cap \overline{1 - X}$ является гра-

[1]) Тогда как объединение двух граничных множеств может не быть граничным множеством; например, объединение множеств рациональных и иррациональных чисел в пространстве действительных чисел.

ничным, ибо множество $\overline{X} - X$ получается из него подстановкой $1 - X$ вместо X. Имеем

$$1 = \overline{1 - X} \cup (1 - \overline{1 - X}) \subset \overline{1 - X} \cup \overline{1 - \overline{1 - X}} =$$

$$= \overline{(1 - X) \cup (1 - \overline{1 - X})} = 1 - (X \cap \overline{1 - X}),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Одновременно мы доказали, что граничные множества можно определить как множества вида $X \cap \overline{1 - X}$ (а следовательно, как множества вида $\overline{X} - X$).

Теорема 2. *Если множества X и Y отделимы, то множество $\overline{X} \cap \overline{Y}$ нигде не плотно.*

В самом деле, так как $\overline{X} \cap Y = 0$, мы имеем

$$\overline{X} \cap \overline{Y} = (\overline{X} \cap \overline{Y} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y} - Y) = (\overline{X} \cap \overline{Y}) - Y \subset \overline{Y} - Y,$$

но, согласно теореме 1, множество $\overline{Y} - Y$ нигде не плотно.

Теорема 3. *Если X открыто или замкнуто, то* $\mathrm{Fr}(X)$ *нигде не плотно.*

В самом деле, если $X = \overline{X}$, то $\mathrm{Fr}(X) = X \cap \overline{1 - X}$; последнее же множество, будучи граничным (по теореме 1) и замкнутым, нигде не плотно.

Случай, когда множество X открыто, рассматривается аналогично.

V. Множества, открытые по модулю нигде не плотных множеств. Пусть I — идеал нигде не плотных множеств.

Множество A называется *открытым по модулю I*, если существует открытое множество G, такое, что A конгруэнтно G по модулю I ($A \sim G \bmod I$, ср. § 2, VIII), иначе говоря, если $A - G$ и $G - A$ нигде не плотны.

Аналогично определяются множества, *замкнутые по модулю I*.

Каждое замкнутое множество F открыто по модулю I. В самом деле, $F = \mathrm{Int}(F) \cup \mathrm{Fr}(F)$ и $\mathrm{Fr}(F)$ нигде не плотно (IV, теорема 3).

Аналогично *каждое открытое множество замкнуто по модулю I*. Таким образом, семейства множеств, открытых по модулю I и замкнутых по модулю I, совпадают.

Теорема 1. *Семейство всех множеств, открытых по модулю нигде не плотных множеств, является полем, т. е. если A_1 и A_2 открыты* $\bmod I$, *то $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ и $1 - A_1$ открыты* $\bmod I$.

Доказательство. Пусть $A_1 \sim G_1$ и $A_2 \sim G_2$, где G_1 и G_2 открыты. Тогда (см. § 2, VIII) $A_1 \cup A_2 \sim G_1 \cup G_2$ и $A_1 \cap A_2 \sim G_1 \cap G_2$.

Остается показать, что если $A \sim G$, то существует открытое множество H, такое, что $1 - A \sim H$. Поскольку $A \sim G$, мы имеем $1 - A \sim 1 - G$. Замкнутое множество $1 - G$ открыто mod I, поэтому существует открытое множество H, такое, что $1 - G \sim H$. Следовательно, $1 - A \sim H$.

Теорема 2. *Множество A открыто* mod I *тогда и только тогда, когда существует открытое множество H, такое, что $H \subset A$ и $A - H$ нигде не плотно.*

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна. Предположим теперь, что $A - G$ и $G - A$ нигде не плотны. Положим $H = G \cap \mathrm{Int}(A)$. Тогда

$$A - H = (A - G) \cup (A \cap \overline{1 - A}) = (A - G) \cup (G \cap A \cap \overline{1 - A}).$$

Поскольку $G \cap \overline{1 - A} \subset \overline{G - A}$ (так как G открыто), отсюда следует, что

$$A - H \subset (A - G) \cup \overline{G - A}.$$

Это завершает доказательство (в соответствии с теоремой 2 из п. III).

Теорема 3. *Множество A открыто* mod I *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Fr}(A)$ *нигде не плотно.*

Доказательство. 1. Пусть A открыто mod I, и пусть, в соответствии с теоремой 2, $A = H \cup N$, где H открыто, а N нигде не плотно. Тогда $\mathrm{Fr}(A) \subset \mathrm{Fr}(H) \cup \mathrm{Fr}(N)$ (в силу § 6, II (8)). Поскольку каждое из множеств $\mathrm{Fr}(H)$ и $\mathrm{Fr}(N)$ нигде не плотно, их объединение также нигде не плотно (по теореме 2, п. III).

2. Предположим, что множество $\mathrm{Fr}(A)$ нигде не плотно. Поскольку $A = \mathrm{Int}(A) \cup [A \cap \mathrm{Fr}(A)]$, отсюда следует, что A открыто mod I.

Из предыдущих теорем вытекают такие следствия.

Следствие 1. *Множество X открыто* mod I *тогда и только тогда, когда оно является разностью замкнутого и нигде не плотного множеств.*

Действительно, $1 - (G \cup N) = (1 - G) - N$.

Следствие 2. *В семействе множеств, открытых* mod I, *понятия граничного множества и нигде не плотного множества совпадают.*

В самом деле, пусть X — граничное множество вида $X = G \cup N$; тогда открытое множество G пусто, и поэтому X совпадает с нигде не плотным множеством N.

Замечание 1. Как мы увидим в § 9, VI, *каждое разреженное множество открыто по модулю семейства нигде не плот-*

ных множеств. Другое интересное семейство множеств, открытых по модулю I, будет получено в § 12. В § 13, VI мы рассмотрим некоторые соотношения между точечно-разрывными функциями и множествами, открытыми $\mathrm{mod}\, I$.

Замечание 2. Следует заметить, что множества, *открыто-замкнутые* $\mathrm{mod}\, I$, т. е. множества вида $A=(H-N)\cup(N-H)$, где H открыто-замкнуто, а N нигде не плотно, можно охарактеризовать условием[1])

$$\mathrm{Int}(\overline{A})=\overline{\mathrm{Int}(A)}.$$

Более общая задача в этом направлении была рассмотрена Чепменом [2]. А именно он изучал полугруппу всех операторов, порожденных операторами замыкания и взятия внутренности множества (их всего 7, ср, § 4, V), и нашел условия на A, при которых $O_1(A)=O_2(A)$, где O_1 и O_2 — элементы этой полугруппы.

VI. Относительные свойства. Пусть $X\subset E$; множество X называется *всюду плотным* (соответственно *граничным, нигде не плотным*) *относительно* E, если

$$\overline{X}\cap E=E \quad (\text{соответственно } \overline{E-X}\cap E=E,\ \overline{E-\overline{X}}\cap E=E),$$

т. е. если $E\subset\overline{X}$ (соответственно $E\subset\overline{E-X}$, $E\subset\overline{E-\overline{X}}$).

Согласно п. II, условие того, что множество X является граничным (соответственно нигде не плотным) относительно E, выражается также включением $X\subset\overline{E-X}$ (соответственно $X\subset\overline{E-\overline{X}}$).

Следующие утверждения очевидны.

Теорема 1. *Множество X плотно в $\overline{X}$; множество $\overline{X}-X$ является граничным в* $\overline{X}$; согласно § 6, II (12), *множество* $X\cap\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(X))$ *является одновременно плотным и граничным в множестве* $\mathrm{Int}[\mathrm{Fr}(X)]$.

Теорема 2. *Если множество X плотно в E, то оно плотно в каждом подмножестве E (содержащем X); если множество X граничное (или нигде не плотное) в E, то X граничное (или нигде не плотное) относительно каждого подмножества E.*

Теорема 3. *Если X плотно в Y и Y плотно в Z, то X плотно в Z. В частности, если X плотно в Y, то X плотно в $\overline{Y}$.*

---

[1]) Теорема Н. Левина [1]. Эта теорема представляет интерес в связи с метастоуновскими пространствами в смысле Диксмье [1]. Ср. Чода и Матоба [1].

Теорема 4. *Если X нигде не плотно в $\overline{E}$, то множество $X \cap E$ нигде не плотно в E.*

В самом деле, по предположению мы имеем $X \subset \overline{\overline{E} - \overline{X}}$. Следовательно, в силу формулы $\overline{E} - \overline{X} = \overline{E} - \overline{\overline{X}} \subset \overline{E - \overline{X}}$, имеет место включение $X \subset \overline{E - \overline{X}}$, откуда $X \cap E \subset \overline{E - \overline{X}} \subset \overline{E - \overline{X \cap E}}$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть G — некоторое открытое множество, и пусть X — граничное (нигде не плотное) множество; тогда множество $X \cap G$ является граничным (нигде не плотным) относительно G, а множество $X \cap \overline{G}$ — относительно $\overline{G}$.*

В самом деле, если X — граничное множество, то $X \subset \overline{1 - X}$; следовательно, $X \cap G \subset \overline{1 - X} \cap G$, и так как, согласно § 5, III, имеет место включение $\overline{1 - X} \cap G \subset \overline{G - X}$, то $X \cap G \subset \overline{G - X} = \overline{G - (X \cap G)}$.

Аналогичным образом, если X — нигде не плотное множество, то $X \subset \overline{1 - \overline{X}}$, откуда

$$X \cap G \subset \overline{1 - \overline{X}} \cap G \subset \overline{G - \overline{X}} \subset \overline{G - \overline{X \cap G}}.$$

Кроме того, $X \cap \overline{G} = (X \cap G) \cup (X \cap (\overline{G} - G))$, и так как множество $\overline{G} - G$, а следовательно, и множество $X \cap (\overline{G} - G)$, согласно теореме 1, нигде не плотны в $\overline{G}$, то оставшаяся часть утверждения теоремы 5 следует из п. III.

VII. Локализация. Множество X называется *граничным* (*нигде не плотным*) *в точке p*, если существует окрестность G точки p, такая, что множество $X \cap G$ является граничным (нигде не плотным).

Так, например, на плоскости множество, состоящее из круга (включая его внутреннюю часть) и сегмента, имеющего только одну общую точку p с данным кругом, является локально нигде не плотным в каждой точке сегмента, кроме точки p, но это множество не является нигде не плотным ни в какой точке круга.

Так как каждое подмножество граничного (нигде не плотного) множества тоже является граничным (нигде не плотным), в предшествующем определении можно заменить термин *окрестность* термином *открытая окрестность* (см. § 7, IV).

Теорема 1. *Множество X нигде не плотно в точке p тогда и только тогда, когда $\overline{X}$ является граничным множеством в этой точке.*

В самом деле, пусть множество X не является нигде не плотным в точке p, и пусть G — открытое множество и $p \in G$; тогда множество $G \cap X$ не является нигде не плотным; следовательно, существует открытое множество H, такое, что $0 \neq H \subset \overline{G \cap X}$. Тогда (см. § 5, III) $H = H \cap \overline{G \cap X} \subset \overline{H \cap G \cap X}$, откуда $H \cap G \neq 0$, и так как $H \cap G \subset G \cap \overline{G \cap X} \subset G \cap \overline{X}$, то $G \cap \overline{X}$ не является граничным множеством, следовательно, $\overline{X}$ не является граничным множеством в точке p.

Обратно, если множество $\overline{X}$ не является граничным в точке $p \in G$, то существует открытое множество H, такое, что $0 \neq H \subset G \cap \overline{X}$. Следовательно, $H \subset G \cap \overline{X} \subset \overline{G \cap X}$, а это означает, что множество X не является нигде не плотным в точке p.

Теорема 2. *Множество точек, в которых X не является локально граничным, совпадает с $\overline{\mathrm{Int}(X)}$; множество точек, в которых X не является локально нигде не плотным, совпадает с $\overline{\mathrm{Int}(\overline{X})}$.*

В самом деле, пусть $p \in \overline{\mathrm{Int}(X)}$ и G — открытая окрестность точки p. Из неравенства $G \cap \mathrm{Int}(X) \neq 0$ следует, что $0 \neq G \cap \mathrm{Int}(X) \subset \subset G \cap X$. Это соотношение означает, что множество X не является граничным в точке p.

Обратно, пусть $p \in 1 - \overline{\mathrm{Int}(X)}$; тогда множество $G = 1 - \overline{\mathrm{Int}(X)}$ есть открытая окрестность точки p, такая, что $G \cap X$ — граничное множество, ибо

$$\mathrm{Int}(G \cap X) = \mathrm{Int}(G) \cap \mathrm{Int}(X) = [1 - \overline{\mathrm{Int}(X)}] \cap \mathrm{Int}(X) = 0.$$

Вторая часть нашего предложения вытекает из первой в силу теоремы 1.

Теорема 3. *Множество точек из X, в которых X или $\overline{X}$ — локально граничное (нигде не плотное) множество, является граничным (нигде не плотным).*

В частности, *если X является локально граничным (нигде не плотным) множеством в каждой своей точке, то X — граничное (нигде не плотное) множество.*

В самом деле, имеет место соотношение $X - \overline{\mathrm{Int}(X)} \subset X - \mathrm{Int}(X)$, и так как последнее множество, согласно п. IV, является граничным, то и множество $X - \overline{\mathrm{Int}(X)}$ является граничным.

Аналогичным образом $X - \overline{\mathrm{Int}(\overline{X})} \subset \overline{X} - \mathrm{Int}(\overline{X})$, и так как последнее множество является замкнутым и граничным, а следовательно, нигде не плотным, то и множество $X - \overline{\mathrm{Int}(\overline{X})}$ нигде не плотно.

Замечание. Согласно теореме 2 п. III, семейство нигде не плотных множеств является идеалом. Поэтому в формулы (1) — (7),

§ 7, IV можно подставить $\overline{\mathrm{Int}(\overline{X})}$ вместо X^*. Отсюда, в частности, следует, что

$$\overline{\mathrm{Int}(\overline{X})}\cup\overline{\mathrm{Int}(\overline{Y})}=\overline{\mathrm{Int}(\overline{X\cup Y})},$$

(i)

$$\bigcup_{\iota}\overline{\mathrm{Int}(\overline{X_\iota})}\subset\overline{\mathrm{Int}\Big(\overline{\bigcup_{\iota}X_\iota}\Big)}.$$

Из теоремы 5 п. VI следует утверждение

(ii) *Пусть G — открытое множество и X — граничное (нигде не плотное) множество в некоторой точке p; тогда множество $X\cap G$ является граничным (нигде не плотным) в точке p относительно G (если $p\in G$), а множество $X\cap\overline{G}$ — относительно $\overline{G}$ (если $p\in\overline{G}$).*

В самом деле, по предположению существует окрестность H точки p, такая, что $H\cap X$ — граничное (нигде не плотное) множество. Следовательно, согласно п. VI, 5 (если подставить $H\cap X$ вместо X), $H\cap G\cap X$ есть граничное (нигде не плотное) множество относительно G, а множество $H\cap\overline{G}\cap X$ относительно $\overline{G}$; кроме того, множества $H\cap G$ и $H\cap\overline{G}$ являются окрестностями точки p относительно множеств соответственно G и $\overline{G}$.

VIII. Замкнутые области[1]. Множество X называется *замкнутой областью*, если оно замкнуто и не является локально нигде не плотным множеством ни в одной из своих точек; иначе говоря (см. п. VII), если $X=\overline{\mathrm{Int}(X)}$ или если $X=\overline{1-\overline{(1-X)}}$.

Замкнутые области можно также определить как *замыкания открытых множеств*[2].

В самом деле, предшествующая формула показывает, что каждая замкнутая область является замыканием открытого множества. Обратно, если G — открытое множество и $X=\overline{G}$, то G есть открытое подмножество множества X. Следовательно, имеет место включение $G\subset\mathrm{Int}(X)\subset X$, откуда $\overline{G}\subset\overline{\mathrm{Int}(X)}\subset\overline{X}=\overline{G}$. Итак, $X=\overline{\mathrm{Int}(X)}$.

Включение $\mathrm{Fr}(X)\subset\overline{\mathrm{Int}(X)}$ *характеризует замкнутые области* среди замкнутых множеств.

---

[1]) По поводу этого термина см. Лебег [3], стр. 273. О теоремах см. Куратовский [7], стр. 192—195 и [9], стр. 117.

[2]) Так как множество $\overline{\mathrm{Int}(X)}$ является замкнутой областью, то

$$\overline{\mathrm{Int}\,\overline{\mathrm{Int}(X)}}=\overline{\mathrm{Int}(X)},\quad\text{откуда}\quad \overline{1-\overline{1-\overline{\overline{1-\overline{X}}}}}=\overline{1-\overline{X}},$$

Ср. со схемой, данной в § 4, V.

В самом деле, оно выполняется, если множество X — замкнутая область, поскольку $\mathrm{Fr}(X) \subset X$. Обратно, если $\mathrm{Fr}(X) \subset \overline{\mathrm{Int}(X)}$, то

$$\overline{X} = \mathrm{Fr}(X) \cup \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Fr}(X) \cup \overline{\mathrm{Int}(X)} = \overline{\mathrm{Int}(X)}.$$

Если X — замкнутая область, то

$$\mathrm{Fr}(X) = \mathrm{Fr}\,\overline{(1 - X)} = \mathrm{Fr}\,[\mathrm{Int}(X)].$$

Действительно, $\mathrm{Fr}(X) = X \cap \overline{1-X} = \overline{1 - \overline{1-X}} \cap \overline{1-X} = \mathrm{Fr}\,\overline{(1-X)}$.

Объединение двух замкнутых областей есть замкнутая область.

Более общо *пусть* $\{D_\iota\}$ — *семейство замкнутых областей: тогда множество* $\overline{\bigcup_\iota D_\iota}$ *есть замкнутая область.*

Это утверждение следует из VII (i).

Пусть X — подмножество замкнутой области D и $p \in D$; тогда для того, чтобы множество X было граничным (нигде не плотным) в точке p, необходимо и достаточно, чтобы X было граничным (нигде не плотным) в этой точке относительно множества D.

В самом деле, это условие является необходимым, поскольку в VII (ii) множество $\overline{G}$ можно заменить множеством D. Обратно, если G — открытое и $G \cap X$ — граничное (нигде не плотное) множество относительно D, то $G \cap X$ — граничное (нигде не плотное) множество относительно всего пространства. Это означает, что сформулированное условие является достаточным.

Таким образом, ясно, что при тех же предположениях о X и D свойство множества X быть *замкнутым, нигде не плотным, замкнутой областью эквивалентно соответствующему свойству множества X относительно множества D.* Действительно, первое (второе) свойство означает, что множество X является локально граничным (нигде не плотным) в каждой своей точке, а третье свойство означает, что X не является нигде не плотным ни в одной из своих точек.

Отсюда следует, что *свойство быть относительно замкнутой областью транзитивно*, т. е. если X — замкнутая область относительно Y, а Y — замкнутая область относительно Z, то X — замкнутая область относительно Z.

IX. Открытые области. *Открытая область есть дополнение к замкнутой*[1]).

---

[1]) Об одном интересном применении этого понятия к проблеме топологической интерпретации исчисления высказываний см. Тарский [3], стр. 127. О приложениях к булевой алгебре см. Биркгоф [1]; Стоун М. [5], стр. 375, и [3], стр. 263; Халмош [1], § 4.

Открытые области можно также охарактеризовать равенством $X=\mathrm{Int}(\overline{X})$. В самом деле, если $X=\mathrm{Int}(\overline{X})=1-\overline{1-\overline{X}}$, то множество X, как дополнение к замкнутой области $\overline{1-\overline{X}}$, является открытой областью. Обратно, пусть множество X — открытая область, положим $D=1-X$; так как D — замкнутая область, имеет место равенство $1-\overline{1-\overline{X}}=1-\overline{1-\overline{1-D}}=1-D=X$.

Открытые области можно также определить как открытые множества, удовлетворяющие включению $\mathrm{Fr}(X)\subset\overline{\mathrm{Int}(1-X)}$. Действительно, $\mathrm{Fr}(X)=\mathrm{Fr}(1-X)$, и для того чтобы множество $1-X$ было замкнутой областью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $\mathrm{Fr}(1-X)\subset\overline{\mathrm{Int}(1-X)}$.

Если X — открытая область, то

$$\mathrm{Fr}(X)=\mathrm{Fr}(\overline{X})=\mathrm{Fr}(1-\overline{X}).$$

В самом деле, $\mathrm{Fr}(X)=\overline{X}-X=\overline{X}-\mathrm{Int}(\overline{X})=\overline{X}\cap\overline{1-\overline{X}}=\mathrm{Fr}(\overline{X})$.

Так как объединение двух замкнутых областей является замкнутой областью, то *пересечение* двух открытых областей есть открытая область.

§ 9. Точки накопления

I. Определения. Точка p называется *точкой накопления* множества X, если $p\in\overline{X-p}$. Множество X^d точек накопления множества X называется *производным множеством* (или *производной*) множества X.

Точка p называется *изолированной* точкой множества X, если $p\in X-X^d$ [1]).

Мы будем предполагать, что рассматриваются $\mathcal{T}_1$-пространства.

Примеры. Любое действительное число есть точка накопления множества всех действительных чисел. Любое натуральное число изолировано в множестве всех натуральных чисел; производное множество этого множества пусто. Множество A чисел вида $1/n+1/m$ ($n=1, 2, \ldots$; $m=1, 2, \ldots$) имеет своим производным множество, состоящее из чисел вида $1/n$ и числа 0; его второе производное множество (т. е. производное производного) состоит только из числа 0; его третье производное множество пусто. В гл. 2, § 24, п. IV мы будем изучать производные трансфинитного порядка.

II. Необходимые и достаточные условия. *Для того чтобы $p\in X^d$, необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность E точки p удовлетворяла неравенству* $(X\cap E)-p\neq 0$.

---

[1]) Эти понятия введены Г. Кантором [1], стр. 129. Кантор использовал также термины „cohérence“ и „adhérence“ для множеств $X\cap X^d$ и $X-X^d$.

Для того чтобы точка p была изолированной точкой множества X, необходимо и достаточно, чтобы существовала окрестность E точки p, такая, что $X \cap E = p$.

В самом деле, согласно § 7, II, условие $p \in \overline{X - p}$ выражается неравенством $(X - p) \cap E \neq 0$.

Согласно тому же предложению, термин *окрестность* можно заменить термином *открытая окрестность*. Неравенство $X \cap E - p \neq 0$ можно заменить условием „множество $X \cap E$ *бесконечно*“.

В самом деле, пусть E — окрестность точки p, такая, что множество $X \cap E$ конечно, тогда множество $(X \cap E) - p$ замкнуто и множество $A = E - (X \cap E - p)$ есть окрестность точки p, такая, что $X \cap A - p = 0$.

Установив это, мы получим, что условие $p \in X^d$ сводится к следующему: *множество X не является локально конечным в точке p.*

III. Некоторые формулы[1]. Так как семейство всех конечных множеств является идеалом, то к операции X можно применить формулы § 7, относящиеся к локализации. Тогда мы, в частности, получим:

(1) $$(X \cup Y)^d = X^d \cup Y^d;$$

(2) $$X^d - Y^d \subset (X - Y)^d;$$

(3) $$X^{dd} \subset X^d;$$

(4) $$\Big(\bigcap_\iota X_\iota\Big)^d \subset \bigcap_\iota X_\iota^d;$$

(5) $$\bigcup_\iota X_\iota^d \subset \Big(\bigcup_\iota X_\iota\Big)^d;$$

(6) $$\overline{X}^d = X^d\,{}^{2)};$$

(7) $$(X \subset Y) \Rightarrow (X^d \subset Y^d).$$

Кроме того, справедлива формула

(8) $$\overline{X} = X \cup X^d.$$

В самом деле, если $p \in \overline{X}$ и $p \notin X$, то $X - p = X$ и $p \in \overline{X - p}$; следовательно, $p \in X^d$. Обратно, пусть $p \in X^d$, тогда $p \in \overline{X - p} \subset \overline{X}$.

В силу очевидного равенства $p^d = 0$, из (1) вытекает, что производное множество каждого конечного множества пусто и что

(9) $$(X - p)^d = X^d = (X \cup p)^d,$$

---

[1]) Аналогичные формулы, касающиеся операции $X \cap X^d$, были установлены Зарицким [3], стр. 498.

[2]) Анализ этого равенства проведен Юнгом; см. Келли [1], стр. 56,

т. е. что производное любого множества не изменится, если к этому множеству добавить или от него отнять конечное число точек.

IV. Дискретные множества. Множество, состоящее только из изолированных точек, называется *дискретным*.

Любое конечное множество является дискретным. Любое подмножество дискретного множества также является дискретным.

Множество $X - X^d$ — дискретное, ибо каждая его точка, как изолированная точка множества X, является изолированной.

Условие изолированности точки p в пространстве выражается соотношением $p \notin \overline{1-p}$, которое означает, что *точка p является открытым множеством*. Пространство дискретно тогда и только тогда, когда $1^d = 0$, т. е. *каждое подмножество этого пространства замкнуто*.

V. Множества, плотные в себе. Множество X называется *плотным в себе*, если оно не содержит изолированных точек, т. е. $X \subset X^d$ (см. Кантор [6], стр. 471).

Если множество X замкнуто и плотно в себе, то оно называется *совершенным*; это условие можно выразить равенством $X = X^d$ (так как для замкнутости множества X, в силу III (8), достаточно выполнения включения $X^d \subset X$).

Теорема 1. *Если X плотно в себе, то $\overline{X}$ совершенно.*

Действительно, по предположению $X \subset X^d$, откуда $X^d = X \cup X^d = \overline{X}$, в силу III (8). Применяя III (1) и (3), получаем $(\overline{X})^d = X^d \cup X^{dd} = X^d = \overline{X}$, следовательно, $(\overline{X})^d = \overline{X}$.

Теорема 2. *Объединение произвольного числа плотных в себе множеств плотно в себе.* (Это вытекает из формулы III (5).)

Теорема 3. *Если пространство плотно в себе, то каждое открытое и каждое всюду плотное множества плотны в себе.*

В самом деле, пусть $1 \subset 1^d$, и пусть G — открытое множество, тогда $G = 1 - F$ и $F^d \subset F$. Отсюда

$$G = 1 - F \subset 1 - F^d \subset 1^d - F^d \subset (1-F)^d = G^d.$$

С другой стороны, пусть $\overline{X} = 1$. Тогда $X \cup X^d = 1$, откуда $X^d \cup X^{dd} = 1^d$. Так как $X^{dd} \subset X^d$ и $1 \subset 1^d$, отсюда следует, что $1 \subset X^d$ и, значит, $X \subset X^d$.

Теорема 4. *Пусть X — всюду плотное граничное множество, тогда пространство плотно в себе.*

По предположению $\overline{X} = \overline{1-X} = 1$. Пусть $p \in X$, тогда $1 - X \subset 1 - p$, откуда $1 = \overline{1-X} \subset \overline{1-p}$ и, следовательно, $p \in \overline{1-p}$ и $p \in 1^d$. Таким образом, $X \subset 1^d$. Аналогично $1 - X \subset 1^d$. Следовательно, $1 \subset 1^d$.

Теорема 5. *Каково бы ни было множество X, множества* $\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ *и* $X \cap \operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ *плотны в себе.*

Согласно § 8, VI, 1, множество $X \cap \operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ является всюду плотным и граничным в $\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$. Поэтому, в силу теоремы 4, последнее множество плотно в себе.

Множество $X \cap \operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ плотно в себе, в силу теоремы 3, как всюду плотное подмножество плотного в себе множества.

Пример. Канторово множество $\mathscr{C}$ (§ 3, IX) совершенно (и в то же время нигде не плотно) в интервале (0, 1).

VI. Разреженные множества. Множество X называется *разреженным*, если оно не пусто и не содержит никакого плотного в себе подмножества (Кантор [6]; подробное изучение см. в работе Семадени [1]).

Любое дискретное множество является разреженным. Любое подмножество разреженного множества разреженно.

Замечание. Замыкание разреженного (а также дискретного) множества может не быть разреженным. В самом деле, запишем каждое рациональное число интервала (0, 1) в виде несократимой дроби p/q; множество точек $(p/q,\ 1/q)$ плоскости является дискретным, хотя его замыкание содержит весь интервал (0, 1).

Теорема 1. *В пространстве, плотном в себе, каждое разреженное множество нигде не плотно. Следовательно, его дополнение плотно в себе.*

В самом деле, если множество X не является нигде не плотным, то $G = \operatorname{Int}(\overline{X})$ — открытое непустое множество. Тогда $G = G \cap \overline{X} \subset \subset \overline{G \cap X}$, а это означает, что $G \cap X$ плотно в множестве G, которое, будучи открытым, плотно в себе, согласно теореме 3 п. V. В силу второй части той же теоремы, множество $G \cap X$ плотно в себе. Следовательно, множество X не является разреженным. В силу теоремы 3 п. V, дополнение к граничному множеству плотно в себе.

Теорема 2. *Объединение двух разреженных множеств есть разреженное множество.*

В самом деле, пусть X и Y — разреженные множества и Z — плотное в себе множество, такое, что $0 \neq Z \subset X \cup Y$. Тогда $Z - (Z \cap X) \subset Y$, и так как Z плотно в себе и $Z \cap X$ — разреженное множество, то $Z - (Z \cap X) \neq 0$. Более того, в силу теоремы 1 (если положить в ней $1 = Z$), множество $Z - (Z \cap X)$ плотно в себе. Следовательно, множество Y не может быть разреженным.

Теорема 3. *Всякое пространство является объединением двух непересекающихся множеств, одно*[1]) *из которых — совер-*

[1]) Оно называется *ядром* пространства. Правила исчисления для ядер, аналогичные соответствующим правилам для замыкания, производных и т. д., были установлены Зарицким [2], стр. 154. По поводу расширения теоремы 3 на булевы алгебры см. Тарский [4], стр. 306.

шенное, а другое — разреженное (разумеется, одно из них может быть пустым).

В самом деле, пусть P есть объединение всех плотных в себе подмножеств пространства 1. Согласно теоремам 2 и 1 п. V, множества P и $\overline{P}$ плотны в себе, но каждое плотное в себе множество является подмножеством множества P, поэтому $\overline{P} \subset P$, т. е. множество P замкнуто. Так как P замкнуто и плотно в себе, оно совершенно. Наконец, множество $1 - P$ не содержит плотных в себе подмножеств ($\neq 0$).

Теорема 4. *Граница разреженного множества является нигде не плотным множеством.*

Множество $X \cap \operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ (которое плотно в себе в силу V, 5) как подмножество разреженного множества X пусто. Поэтому $\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)] = 0$, так как множество $X \cap \operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ плотно в $\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(X)]$ (в силу § 8, VI, 1). Следовательно, множество $\operatorname{Fr}(X)$ — граничное, а так как оно, кроме того, и замкнуто, то оно нигде не плотно.

Замечание. Из § 8, V следует, что *разреженное множество является объединением открытого и нигде не плотного множеств* (а также разностью замкнутого и нигде не плотного множеств); *если разреженное множество является граничным, то оно нигде не плотно.*

Теорема 5. *Для того чтобы множество X было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы для любого совершенного множества P множество $X \cap P$ было нигде не плотным в P*[1]).

Пусть X — разреженное множество. Согласно теореме 1, если множество P совершенно (или, более общо, плотно в себе) и если оно рассматривается как исходное пространство, то множество $X \cap P$ нигде не плотно в нем. Следовательно, условие является необходимым.

Для доказательства достаточности допустим противное, т. е. что X — не разреженное множество. Пусть D — непустое плотное в себе подмножество множества X. Положим $P = \overline{D}$. Если условие теоремы выполнено, то множество $X \cap \overline{D}$ нигде не плотно в $\overline{D}$. Следовательно (§ 8, VI, 4), множество $X \cap D$ нигде не плотно в D, что невозможно, поскольку $X \cap D = D \neq 0$.

Замечание. В теореме 5 термин *совершенное* можно заменить термином *плотное в себе.*

---

[1]) См. Фреше [4], стр. 330. См. также Данжуа [2], где это условие принято в качестве определения разреженных множеств.

§ 10. Множества первой категории

I. Определение. Множество называется *множеством первой категории*, если оно является объединением счетного семейства нигде не плотных множеств[1]).

Примеры. В множестве действительных чисел рациональные числа, очевидно, образуют множество первой категории. Множество иррациональных чисел не является множеством первой категории: это вытекает из того, что *пространство $\mathscr{E}$ действительных чисел не является множеством первой категории* (по отношению к самому себе).

Это последнее утверждение[2]) может быть установлено следующим образом: пусть $Q = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$ — множество первой категории (где множества N_n нигде не плотны). Так как N_1 нигде не плотно, существует замкнутый интервал I_1, такой, что $I_1 \cap N_1 = 0$. Продолжим этот процесс по индукции; пусть $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{n-1}$ — конечная последовательность вложенных интервалов, и пусть I_n — замкнутый интервал, такой, что $I_n \subset I_{n-1}$ и $I_n \cap N_n = 0$ (такой интервал существует согласно § 8, II, потому что множество N_n нигде не плотно). В силу классической теоремы Асколи, существует точка, общая всем интервалам I_n, $n = 1, 2, \ldots$; эта точка не принадлежит Q, и, следовательно, $\mathscr{E} \neq Q$.

Понятие множества первой категории часто проникает в теорию функций; в качестве примера отметим следующую теорему (см. § 31, X): пусть $\{f_n\}$ — сходящаяся последовательность непрерывных функций; точки разрыва функции $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ образуют множество первой категории.

Во многих проблемах топологии множества первой категории играют роль, аналогичную роли множеств меры нуль в теории меры (множества, которыми можно „пренебречь").

Интересно отметить, что семейство подмножеств первой категории интервала, если принять гипотезу континуума, эквивалентно в смысле теории множеств семейству подмножеств меры нуль, т. е. существует взаимно однозначное отображение интервала на себя, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между элементами этих двух семейств (см. Серпинский [54], стр. 276, и [52], стр. 77; см. также Шпильрайн-Марчевский [9], стр. 325, и Окстоби и Улам [1], стр. 201).

II. Свойства. Семейство множеств первой категории является σ-идеалом, т. е. *наследственно* и *счетно-аддитивно* (каждое подмножество множества первой категории есть множество первой категории, и объединение счетного семейства множеств первой категории есть множество первой категории).

Теорема 1. *Всякое граничное множество типа F_σ есть множество первой категории.*

---

[1]) Это понятие введено Р. Бэром [1], стр. 65. Данжуа использует термин „gerbé" для множеств первой категории и термин „résiduel" для их дополнений, см. Данжуа [1], стр. 123—125. Множества первой категории называют также „meager", см. Келли [1], стр. 201.

[2]) Это частный случай теоремы Бэра (см. далее гл. III, § 34, IV).

В самом деле, пусть $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ — граничное множество, тогда каждое из множеств F_n также граничное. Следовательно, каждое множество F_n, как граничное и замкнутое, нигде не плотно.

Теорема 2. *Всякое множество первой категории содержится в некотором множестве типа* F_σ *первой категории.*

Действительно, так как $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{N}_n$ и множества N_n нигде не плотны, то и множества $\overline{N}_n$ нигде не плотны (см. § 8, I).

III. Теорема единственности.

Теорема 1. *Пусть* $\{X_\iota\}$ — *некоторое семейство (произвольной мощности) множеств, открытых относительно объединения* $S=\bigcup_\iota X_\iota$. *Если каждое* X_ι *есть множество первой категории, то* S — *также множество первой категории.* (См. Банах [4], стр. 395.)

В самом деле, пусть $G_1, G_2, \ldots, G_\alpha, \ldots$ — некоторая вполне упорядоченная (трансфинитная) последовательность непустых открытых непересекающихся множеств, удовлетворяющая двум условиям: 1° $S\cap G_\alpha$ есть множество первой категории; 2° эта последовательность — ***насыщенная***, т. е. не существует непустого открытого множества G, не пересекающегося ни с одним из множеств рассматриваемой последовательности, такого, что $S\cap G$ — множество первой категории.

Имеет место очевидное равенство $S=\left(\bigcup_\alpha (S\cap G_\alpha)\right)\cup\left(S-\bigcup_\alpha G_\alpha\right)$. Теорема будет доказана, когда мы покажем, что:

1) $\bigcup_\alpha (S\cap G_\alpha)$ — множество первой категории;

2) $S-\bigcup_\alpha G_\alpha$ — нигде не плотное множество.

1) Так как $S\cap G_\alpha$, по предположению, является множеством первой категории, то $S\cap G_\alpha = N_1^\alpha \cup N_2^\alpha \cup \ldots \cup N_n^\alpha \cup \ldots$, где множества N_n^α $(n=1, 2, \ldots)$ нигде не плотны. Положим $N_n = N_n^1 \cup N_n^2 \cup \ldots$ $\ldots \cup N_n^\alpha \cup \ldots$. Тогда

$$\bigcup_\alpha (S\cap G_\alpha) = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_n \cup \ldots .$$

Покажем теперь, что N_n $(n=1, 2, \ldots)$ — нигде не плотные множества. Так как множества G_α не пересекаются, из включения $N_n^\alpha \subset G_\alpha$ следует, что $N_n^\alpha \cap G_\beta = 0$ для всех $\beta \neq \alpha$. Значит, $N_n^\beta = N_n^\beta \cap G_\beta = \bigcup_\alpha N_n^\alpha \cap G_\beta = N_n \cap G_\beta$, поэтому множество N_n^β открыто в N_n.

Применяя теорему 3, § 8, III, мы заключаем, что множество N_n нигде не плотно.

2) Покажем, что множество $S - \bigcup_\alpha G_\alpha$ нигде не плотно. Для этого достаточно доказать, что множество $1 - \bigcup_\alpha G_\alpha$ нигде не плотно; так как это последнее множество замкнуто, то достаточно доказать, что оно граничное.

Допустим противное, т. е. что существует открытое множество H, такое, что $0 \neq H \subset 1 - \bigcup_\alpha G_\alpha$. Согласно определению последовательности $\{G_\alpha\}$, $S \cap H$ не является множеством первой категории. Пусть X_ι — множество, такое, что $H \cap X_\iota \neq 0$. Рассмотрим открытое множество $G = H - \overline{S - X_\iota}$.

Множество $S \cap G$ первой категории, так как, поскольку X_ι открыто S, мы имеем $X_\iota = S - \overline{S - X_\iota}$, следовательно, $S \cap G = (S \cap H) - \overline{S - X_\iota} = H \cap X_\iota \subset X_\iota$. С другой стороны, $G \neq 0$, так как легко видеть, что $0 \neq H \cap X_\iota \subset G$. Наконец, $G \cap G_\alpha = 0$, каково бы ни было α, потому что $G \subset H \subset 1 - \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Таким образом, мы пришли к противоречию с определением последовательности $\{G_\alpha\}$.

IV. Относительные свойства.

1. *Если X — множество первой категории относительно E, то X является множеством первой категории также относительно каждого надмножества множества E.*

2. *Если X — множество первой категории относительно $\overline{E}$, то $X \cap E$ — множество первой категории относительно E.*

3. *Пусть G — некоторое открытое множество. Если X — множество первой категории, то $X \cap G$ — множество первой категории относительно G, а $X \cap \overline{G}$ — множество первой категории относительно $\overline{G}$.*

Эти три утверждения непосредственно следуют из теорем 2, 4 и 5, § 8, VI.

V. Локализация. Множество X называется *множеством первой категории в точке p*, если существует окрестность G точки p, такая, что множество $X \cap G$ первой категории.

Множество точек, где X не есть множество первой категории, мы обозначим через $D(X)$.

Так как семейство множеств первой категории является идеалом (ср. п. II), в § 7, IV можно заменить множество X^* множеством $D(X)$. Таким образом, в предыдущем определении термин *окрестность* можно заменить термином *открытая окрестность*.

Имеют место следующие соотношения:

(1) $D(X \cup Y) = D(X) \cup D(Y)$;

(2) $D(X) - D(Y) \subset D(X - Y)$;

(3) $D\left(\bigcap_{\iota} X_{\iota}\right) \subset \bigcap_{\iota} D(X_{\iota})$;

(4) $\bigcup_{\iota} D(X_{\iota}) \subset D\left(\bigcup_{\iota} X_{\iota}\right)$[1];

(5) $(X \subset Y) \Rightarrow (D(X) \subset D(Y))$;

(6) *если G — открытое множество, то*

$$G \cap D(X) = G \cap D(G \cap X).$$

Согласно теореме п. III, *если X является множеством первой категории в каждой из своих точек, то X — множество первой категории.*

В самом деле, по предположению, каждая точка p множества X принадлежит открытому множеству G_p, такому, что $X \cap G_p$ — множество первой категории. Следовательно, X есть объединение открытых в X множеств первой категории. Поэтому, согласно указанной выше теореме, множество X само является множеством первой категории [2]).

Таким образом, мы приходим к следующей формуле:

$$(7) \qquad (X \text{ — множество первой категории}) \equiv \\ \equiv (X \cap D(X) = 0) \equiv (D(X) = 0).$$

Равенство $D(X) = 0$ влечет за собой равенство $X \cap D(X) = 0$, а из последнего вытекает, как мы только что видели, что X — множество первой категории. Обратно, если X — множество первой категории, то $D(X) = 0$.

Отсюда следует, что

$$(8) \qquad D[X - D(X)] = 0,$$

т. е. что точки множества X, где X первой категории, образуют множество первой категории. В самом деле, согласно соотношению (5),

---

[1]) Равенство может не иметь места: пусть, например, $X_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ в сегменте $[0, 1]$. Однако ср. (13).

[2]) Это утверждение можно доказать более прямым способом (не обращаясь к теореме п. III), если допустить, что пространство обладает счетной базой, состоящей из открытых множеств $R_1, R_2, \ldots$. В самом деле, при этом предположении открытое множество G_p можно заменить некоторым множеством $R_{n(p)}$ первой категории и, так как $X \cap R_{n(p)}$ — множество первой категории, то счетное объединение $\bigcup_{p \in X} X \cap R_{n(p)} = X$ также есть множество первой категории.

имеем $D[X-D(X)]\subset D(X)$, следовательно,

$$[X-D(X)]\cap D[X-D(X)]\subset[X-D(X)]\cap D(X)=0,$$

откуда, в силу (7), следует формула (8).

Из формулы (8), сравнивая ее с (2), получаем, что $D(X)-D[D(X)]=0$, следовательно, $D(X)\subset D[D(X)]$. В силу § 7, IV (2), верно также обратное включение. Отсюда получаем

$$D[D(X)]=D(X). \tag{9}$$

Так как множество тех точек, где X не является нигде не плотным, совпадает (согласно § 8, VII) с множеством $\overline{\mathrm{Int}(\overline{X})}$, то мы имеем

$$D(X)\subset\overline{\mathrm{Int}(\overline{X})}\subset\overline{X}. \tag{10}$$

Так как множество $D(X)$ замкнуто (§ 7, IV), из соотношения (10) следует двойное включение $D[D(X)]\subset\overline{\mathrm{Int}[D(X)]}\subset D(X)$, откуда, в силу равенства (9), имеем

$$D(X)=\overline{\mathrm{Int}[D(X)]}. \tag{11}$$

Следовательно, $D(X)$ — *замкнутая область* (§ 8, VIII). Таким образом, если $D(X)\neq 0$, то *X не является множеством первой категории ни в одной точке непустого открытого множества* $\mathrm{Int}[D(X)]$.

(12) *Если* $D(Y)=0$, *то* $D(X\cup Y)=D(X)=D(X-Y)$,

т. е. множество X остается множеством первой категории в точке p, если к нему добавить или от него отнять множество первой категории. Это утверждение непосредственно следует из формулы (1).

(13) *Множество* $D\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n\right)-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D(X_n)$ *нигде не плотно.*

Покажем, что если G — некоторое непустое открытое множество, то существует открытое непустое множество H, такое, что

$$H\cap D\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\right)-\bigcup_{n=1}^{\infty}D(X_n)=0 \quad \text{и} \quad H\subset G.$$

В том случае, когда для каждого индекса n имеет место соотношение $G\cap D(X_n)=0$, мы получаем $G\cap X_n\subset X_n-D(X_n)$. Следовательно, $G\cap\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[X_n-D(X_n)]$, так что в силу формулы (8) $G\cap\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ есть множество первой категории. Поэтому $D\left(G\cap\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n\right)=0$, откуда в силу соотношения (6) $G \cap D\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = 0$. Полагая $H = G$, получаем требуемое равенство.

Далее пусть существует такой индекс n, что $G \cap D(X_n) \neq 0$. Положим $H = G \cap \operatorname{Int}[D(X_n)]$; тогда в силу равенства (11) множество H не пусто, и так как $H \subset D(X_n)$, то H удовлетворяет требуемому равенству.

VI. Формулы разложения. Справедливы формулы

(14) $X = [X - D(X)] \cup [X \cap D(X)]$;

(15) $$X = [X \cap \overline{X - D(X)}] \cup [X - \overline{X - D(X)}] = \\ = (X - \operatorname{Int}[D(X)]) \cup (X \cap \operatorname{Int}[D(X)]).$$

Эти формулы дают разложение множества X на два непересекающихся множества: первое из них представляет собой множество первой категории, а второе не является множеством первой категории ни в одной из своих точек. Кроме того, в формуле (14) первое слагаемое открыто относительно X, а в формуле (15) оно замкнуто.

В самом деле, согласно формуле (8), множество $X - D(X)$ первой категории. Поэтому в силу (12) $D[X \cap D(X)] = D(X)$, откуда $X \cap D(X) \subset D(X) = D[X \cap D(X)]$. Следовательно, множество $X \cap D(X)$ не является множеством первой категории ни в одной из своих точек.

С другой стороны, $X \cap \overline{X - D(X)}$ есть множество первой категории, как объединение двух множеств $X \cap D(X) \cap \overline{X - D(X)}$ и $[X - D(X)] \cap \overline{X - D(X)}$, первое из которых нигде не плотно, как подмножество нигде не плотного множества $D(X) \cap \overline{1 - D(X)} = \operatorname{Fr}[D(X)]$, а второе — множество первой категории, как подмножество множества $X - D(X)$ (см. § 8, V и (8)).

Так как $X \cap \overline{X - D(X)}$ — множество первой категории, из (12) следует, что $D[X - \overline{X - D(X)}] = D(X)$, поэтому

$$X - \overline{X - D(X)} \subset X - [X - D(X)] = X \cap D(X) \subset D(X) = \\ = D[X - \overline{X - D(X)}].$$

Это доказывает, что $X - \overline{X - D(X)}$ не является множеством первой категории ни в одной из своих точек.

* Т е о р е м а У л а м а. *В пространстве, плотном в себе, каждое множество Z мощности $\aleph_1$, которое не является мно-*

жеством первой категории, есть объединение несчетного семейства непересекающихся множеств, ни одно из которых не является множеством первой категории[1]).

В самом деле, согласно одной теореме общей теории множеств[2]), *если Z — множество мощности $\aleph_1$ и N — семейство подмножеств множества Z, такое, что для каждой последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, принадлежащих семейству N, разность $Z - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ несчетна, то существует несчетное семейство непересекающихся подмножеств множества Z, не принадлежащих семейству N.*

Обозначим через N семейство всех подмножеств первой категории множества Z. Так как каждая отдельная точка есть множество первой категории (ибо пространство плотно в себе), из предшествующей теоремы получаем, что существует бесконечное несчетное семейство непересекающихся подмножеств множества Z, ни одно из которых не является множеством первой категории. Добавив к одному из этих подмножеств все те точки множества Z, которые не принадлежат другим множествам, мы получим требуемое разложение.

Сформулируем без доказательства следующую теорему:

* Теорема Лузина. *Всякое множество Z, содержащееся в интервале $\mathcal{J}$ и не являющееся множеством первой категории ни в одной точке интервала $\mathcal{J}$, является объединением двух непересекающихся множеств, которые обладают тем же свойством.* (См. Серпинский [52], стр 172.)

Более того: можно доказать, что оно *является объединением несчетного числа таких множеств*, если принять гипотезу континуума. (См. Серпинский [52], стр. 115.)

*§ 11. Множества, открытые относительно множеств первой категории. Свойство Бэра

I. Определение. Обозначим через J σ-идеал всех множеств первой категории.

Множество A называется *открытым по модулю J*, если существует открытое множество G, такое, что $A \sim G \bmod J$ (ср. § 2, VIII), другими словами, если $A - G$ и $G - A$ — множества первой категории.

Аналогично определяются множества, *замкнутые* по модулю J.

---

[1]) Улам [2], стр. 222.

[2]) Теорема Улама (см. Улам [1], стр. 145). Эта теорема позднее была обобщена Серпинским на все алефы, меньшие первого „недостижимого" алефа, что позволяет обобщить аналогичным образом теорему, сформулированную в тексте; см. Серпинский [47], стр. 214.

Свойство множества быть открытым mod $\boldsymbol{J}$ называется также *свойством Бэра* (в широком смысле)[1]. Мы обозначим семейство таких множеств через $\boldsymbol{B}$.

Утверждение (3) из § 2, VIII приводит к следующей теореме.

Теорема. *Множество A открыто* mod $\boldsymbol{J}$ *тогда и только тогда, когда*

$$A = (G - P) \cup R, \tag{1}$$

где G открыто, а P и R — множества первой категории.

II. Общие замечания. Наиболее часто встречающиеся множества всегда обладают свойством Бэра; впрочем, существуют и множества, которые им не обладают, см. п. IVa. Роль свойства Бэра в топологии аналогична роли измеримости (множеств или функций) в анализе. Мы вернемся к этим вопросам в гл. 3, § 40.

Очевидно, что *каждое множество, открытое (или замкнутое) по модулю семейства нигде не плотных множеств* (см. § 8, V), *принадлежит $\boldsymbol{B}$*. (В частности, ему принадлежат замкнутые множества и разреженные множества.)

Очевидно, кроме того, что такие множества являются *замкнутыми* по модулю множеств первой категории. Поэтому в определении семейства $\boldsymbol{B}$ термин „открытое" можно заменить термином „замкнутое".

III. Операции. Как и для множеств, открытых по модулю нигде не плотных множеств, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Семейство $\boldsymbol{B}$ является полем. Кроме того, если $B_n \in \boldsymbol{B}$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $\left(\bigcup_n B_n\right) \in \boldsymbol{B}$ и $\left(\bigcap_n B_n\right) \in \boldsymbol{B}$.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{J}$ является σ-идеалом, формула $\left(\bigcup_n B_n\right) \in \boldsymbol{B}$ следует непосредственно из § 2, VIII (4). Применяя правила Моргана, получаем формулу $\left(\bigcap_n B_n\right) \in \boldsymbol{B}$.

Следствие. *Каждое борелевское множество обладает свойством Бэра*[2].

В самом деле, семейство $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет трем следующим условиям: 1° оно содержит все замкнутые множества; 2° оно содержит

---

[1] Это понятие введено в диссертации Бэра [1]. Лебег называл множества такого вида *„множествами Z"*, см. Лебег [1], стр. 186. Хан называл такие множества „offene Mengen bis auf eine Menge erster Kategorie" (см. Хан [2], стр. 137).

[2] Теорема Лебега [1], стр. 187. Обратная теорема неверна, см. ниже § 39.

дополнения ко всем множествам, которые ему принадлежат; 3° оно содержит счетные пересечения принадлежащих ему множеств.

Так как семейство борелевских множеств — наименьшее семейство, подчиняющееся этим трем условиям (§ 5, VI), оно образует подсемейство семейства $\boldsymbol{B}$, что и требовалось доказать.

IV. Необходимые и достаточные условия[1]).

Теорема. *Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы множество X обладало свойством Бэра.*

1. *Существует множество первой категории P, такое, что множество $X-P$ замкнуто и открыто относительно $1-P$.*

2. *Множество X является объединением множества типа $\boldsymbol{G}_\delta$ и множества первой категории.*

3. *Множество X есть разность множества типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и множества первой категории.*

4. *Множество $D(X)\cap D(1-X)$ нигде не плотно; иначе говоря, в каждом (непустом) открытом множестве существует точка, в которой либо множество X, либо множество $1-X$ первой категории*[2]).

5. *Множество $D(X)-X$ есть множество первой категории.*

Доказательство. Пусть $X\in\boldsymbol{B}$. Тогда, согласно п. I,

$$X=(G-P_1)\cup P_2=(F-P_3)\cup P_4,$$

где G — открытое множество, F — замкнутое множество, а P_n — множества первой категории. Положим $P=P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4$; тогда $X-P=G-P=F-P$, следовательно, множество $X-P$ одновременно открыто и замкнуто в множестве $1-P$.

Положим теперь $X-P=G\cap(1-P)$. Пусть (в соответствии с § 10, II) R — некоторое множество типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ первой категории, содержащее множество P. Имеем

$$X=(X-R)\cup(X\cap R)=(X-P-R)\cup(X\cap R)=$$
$$=(G-P-R)\cup(X\cap R)=(G-R)\cup(X\cap R).$$

Так как $G-R$ есть множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$, а $X\cap R$ — множество первой категории, то X является объединением множества типа $\boldsymbol{G}_\delta$ и множества первой категории.

---

[1]) См. Серпинский [16], стр. 319 и [34], стр. 305; Шпильрайн-Марчевский [1], стр. 209; Куратовский [14], стр. 390.

[2]) Это условие первоначально было принято за определение свойства Бэра.

Пусть $X \in \boldsymbol{B}$, тогда $1 - X$ также принадлежит семейству $\boldsymbol{B}$ (согласно п. III, 1). Отсюда следует, что $1 - X = M \cup N$, где M — $\boldsymbol{G}_\delta$-множество и N — множество первой категории. Тогда $X = (1 - M) - N$, поэтому X есть разность некоторого множества типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и множества первой категории.

Обратно, так как каждое $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество, каждое $\boldsymbol{G}_\delta$-множество и каждое множество первой категории принадлежат семейству $\boldsymbol{B}$, то (в силу п. III) условия 2 и 3 являются достаточными.

Итак, каждое из условий 1, 2, 3 — необходимое и достаточное. Чтобы доказать это относительно двух других условий, предположим, что $X \in \boldsymbol{B}$, $X = (G - P) \cup R$. Тогда $1 - X = [(1-G)-R] \cup (P-R)$.

Так как множество $D(E)$ не изменится, если к E добавить или от него отнять множество первой категории (см. § 10, V (12)), то $D(X) = D(G)$ и $D(1 - X) = D(1 - G)$. Далее, так как $D(G) \subset \overline{G}$ и $D(1-G) \subset \overline{1-G}$ (§ 10, V (10)), то $D(X) \cap D(1-X) \subset \overline{G} \cap \overline{1-G} = \overline{G} - G$, и, наконец, поскольку множество $\overline{G} - G$ нигде не плотно, множество $D(X) \cap D(1 - X)$ также нигде не плотно.

Следовательно, $D(X) - X$ является множеством первой категории, ибо

$$D(X) - X = ([D(X) - X] \cap D(1 - X)) \cup [D(X) - X - D(1 - X)] \subset [D(X) \cap D(1 - X)] \cup [(1 - X) - D(1 - X)],$$

где $D(X) \cap D(1 - X)$ нигде не плотно, по предположению, а $(1-X) - D(1 - X)$ есть множество первой категории (согласно § 10, V (8)).

Наконец, пусть $D(X)-X$ есть множество первой категории; тогда, в силу равенства

$$X = (D(X) - [D(X) - X]) \cup [X - D(X)],$$

где $D(X)$ замкнуто, а $[D(X) - X]$ и $[X - D(X)]$ — множества первой категории, мы имеем $X \in \boldsymbol{B}$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Каждое множество X содержится в некотором множестве Z типа $\boldsymbol{F}_\sigma$, таком, что из включения $X \subset B \in \boldsymbol{B}$ следует, что $Z-B$ есть множество первой категории* [1].

В самом деле, так как $X - D(X)$ есть множество первой категории (согласно § 10, V (8)), существует $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество первой категории W, такое, что $X - D(X) \subset W$. Следовательно, множество $Z = W \cup D(X)$ есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество, содержащее X. Кроме того, если $X \subset B$, то $D(X) \subset D(B)$ (в силу § 10, V (5)), откуда

$$Z - B = (W - B) \cup [D(X) - B] \subset W \cup [D(B) - B].$$

[1]) Теорема Шпильрайна-Марчевского [1], стр. 299.

Так как, в силу предшествующей теоремы, множество $D(B)-B$ первой категории, отсюда следует, что множество $Z-B$ также первой категории.

Следствие 2. *Если некоторое множество X обладает свойством Бэра и не является множеством первой категории ни в одной точке пространства, то $1-X$ есть множество первой категории. Если X не является множеством первой категории ни в одной из своих точек, то оно содержит точку, в которой $1-X$ есть множество первой категории* ($X \neq 0$).

Так как, согласно первому предположению следствия, $D(X)=1$, из условия 4 следует, что множество $D(1-X)$ нигде не плотно. С другой стороны, согласно § 10, V (11), оно является замкнутой областью. Эти два свойства показывают, что $D(1-X)=0$. Следовательно (§ 10, V (7)), $1-X$ есть множество первой категории.

С другой стороны, если $X \subset D(X)$, то включение $X \subset D(1-X)$ не имеет места, ибо в противном случае множество X было бы нигде не плотным (в силу условия 4), вопреки предположению.

Следствие 3. *Пусть X — некоторое множество, обладающее свойством Бэра; тогда равенство $X \cap Y=0$ влечет за собой равенство*

$$\operatorname{Int}[D(X)] \cap \operatorname{Int}[D(Y)]=0.$$

В самом деле, из равенства $X \cap Y=0$ следует (§ 10, V (5)), что $D(Y) \subset D(1-X)$. Отсюда в свою очередь получается соотношение $D(X) \cap D(Y) \subset D(X) \cap D(1-X)$, означающее, согласно условию 4, что множество $D(X) \cap D(Y)$ нигде не плотно. Поэтому $\operatorname{Int}[D(X) \cap D(Y)]=0$, откуда следует требуемое равенство (§ 6, II (1)).

IVa. Теоремы существования. Принимая во внимание IV, 4, мы установим *существование множеств, не обладающих свойством Бэра, в пространстве $\mathscr{E}$ действительных чисел.*

С этой целью разложим $\mathscr{E}$ на пересекающиеся подмножества, относя одному и тому же подмножеству два числа, разность которых рациональна. В силу аксиомы выбора, существует множество V_0, содержащее по одному и только одному элементу каждого из этих подмножеств. Докажем, что множество V_0 не обладает свойством Бэра [1]).

---

[1]) Именно эту конструкцию использовал Витали [1] для доказательства существования множеств, не измеримых в смысле Лебега.

Одно доказательство существования множеств, не обладающих свойством Бэра, дано также Лебегом [2].

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательность рациональных чисел ($\neq 0$). Обозначим через V_n множество, которое получается из V_0 сдвигом $y = x + r_n$ ($V_n = V_0 + r_n$). Очевидно, что $\mathscr{E} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$. Кроме того, $V_0 \cap V_n = 0$ (для $n \neq 0$). В самом деле, в противном случае множество V_0 содержало бы число y вида $x + r_n$, где $x \in V_0$. Тогда $y - x = r_n$, в то время как, по определению, множество V_0 не содержит ни одной пары элементов, разность которых рациональна.

Так как $\mathscr{E}$ не является множеством первой категории по отношению к самому себе (§ 10, I), отсюда следует, что хотя бы одно из V_n также не является множеством первой категории. Поэтому V_0 также не есть множество первой категории, так как V_n получается из V_0 сдвигом на рациональное число и, следовательно, это множества одной и той же категории. Значит, существует интервал (a, b), такой, что V_0 не является множеством первой категории ни в одной точке этого интервала (§ 10, V (11)).

Допустим теперь, что множество V_0 обладает свойством Бэра. Тогда, согласно условию 4, интервал (a, b) содержит подинтервал (c, d) ($a < c < d < b$), такой, что множество $(c, d) - V_0$ первой категории.

Пусть r_n — рациональное число, такое, что $0 < r_n < c - a$. Из соотношения $V_0 \cap V_n = 0$ вытекает включение $V_n \cap (c, d) \subset \subset (c, d) - V_0$. Следовательно, $V_n \cap (c, d)$ есть множество первой категории, поэтому множеством той же категории является и часть множества V_0, содержащаяся в интервале $(c - r_n, d - r_n)$ (поскольку она получается из множества $V_n \cap (c, d)$ сдвигом). Но это противоречит предположению о том, что V_0 не является множеством первой категории ни в одной из точек интервала (a, b).

Замечания. 1. *Каждое множество мощности $\aleph_1$, не обладающее свойством Бэра, содержит несчетное семейство непересекающихся подмножеств, не обладающих этим свойством.*

Чтобы убедиться в этом, заменим в теореме Улама (§ 10, VI) семейство N семейством подмножеств множества Z, обладающих свойством Бэра.

2. Приведенное доказательство существования множеств, не обладающих свойством Бэра в пространстве $\mathscr{E}$, *не эффективно*, так как оно не дает способа построить конкретное множество такого рода[1]).

То же самое можно сказать о проблеме существования множеств, не измеримых в смысле Лебега.

---

[1]) Эта проблема поставлена Бэром. См. по этому поводу указание Лебега [1], стр. 186.

V. Относительные свойства.

Теорема 1. *Свойство Бэра транзитивно* (если множество X обладает свойством Бэра относительно E, то из $E \in \boldsymbol{B}$ вытекает, что $X \in \boldsymbol{B}$).

В самом деле, имеем $X = U \cup P$, где U — множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$ относительно E, а P — множество первой категории относительно E. Следовательно, $U = V \cap E$, где V — множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$ (см. § 5, V). Множество U как пересечение двух множеств, принадлежащих $\boldsymbol{B}$, также принадлежит семейству $\boldsymbol{B}$. Наконец, если множество P — первой категории, то отсюда следует, что $X = U \cup P$ принадлежит $\boldsymbol{B}$.

Теорема 2. *Если множество X обладает свойством Бэра относительно $\overline{E}$, то множество $X \cap E$ обладает этим свойством относительно E.*

Действительно, мы имеем $X = (G - P) \cup R$, где множество G открыто в $\overline{E}$, а P и R — множества первой категории в $\overline{E}$. Взяв пересечение обеих частей этого равенства с множеством E, мы получим $X \cap E = [(G \cap E) - (P \cap E)] \cup (R \cap E)$. Так как множество $G \cap E$ открыто в E, а множества $P \cap E$ и $R \cap E$ (согласно § 10, IV, 2) — первой категории в E, наше предложение доказано.

VI. Свойство Бэра в узком смысле. Множество X *обладает свойством Бэра в узком смысле* (обозначается $X \in \boldsymbol{B}_r$), если для любого множества E множество $X \cap E$ обладает свойством Бэра относительно E.

Покажем, что в этом определении можно ограничиться *совершенными* множествами E.

В самом деле, пусть E — произвольное множество, и пусть $\overline{E} = A \cup C$ — разложение $\overline{E}$ на совершенное и разреженное множества (см. § 9, VI, 3). Тогда $X \cap \overline{E} = (X \cap A) \cup (X \cap C)$. По предположению, множество $X \cap A$ обладает свойством Бэра относительно A, следовательно, согласно V, 1, оно обладает им и относительно $\overline{E}$. Так как множество $X \cap C$ разреженное, оно также обладает свойством Бэра относительно $\overline{E}$ (см. п. II). Поэтому и их объединение $(X \cap A) \cup (X \cap C) = X \cap \overline{E}$ обладает свойством Бэра относительно $\overline{E}$. В силу V, 2, отсюда вытекает, что множество $X \cap E$ обладает свойством Бэра относительно E, что и требовалось доказать.

Отсюда видно, что в определении семейства $\boldsymbol{B}_r$ множества E достаточно брать *замкнутыми*.

Из теорем предшествующих пунктов следуют соответствующие предложения, касающиеся семейства $\boldsymbol{B}_r$. В частности, пусть X — борелевское множество, тогда $X \cap E$ — борелевское множество относительно E (см. § 5, VI); оно обладает, следовательно, свойством Бэра относительно E, т. е. $X \in \boldsymbol{B}_r$. Аналогичным образом каждое разреженное множество принадлежит семейству $\boldsymbol{B}_r$.

Из теоремы п. IV следует, что $X \in \boldsymbol{B}_r$ *тогда и только тогда, когда каждое множество* Z, *замкнутое в* X, *является объединением борелевского множества и множества первой категории в* Z[1]).

[В совершенно нормальных пространствах (см. § 14, VI) термин *борелевское множество* можно заменить термином G_δ-множество.]

В самом деле, если множество $X \cap \overline{Z}$ обладает свойством Бэра относительно $\overline{Z}$, то $Z = X \cap \overline{Z} = M \cup P$, где M — некоторое множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$ относительно $\overline{Z}$ и P — множество первой категории в $\overline{Z}$. Как пересечение $\boldsymbol{G}_\delta$-множества и замкнутого множества $\overline{Z}$ множество M — борелевское. Множество P как множество первой категории в $\overline{Z}$ является множеством первой категории и в Z (§ 10, IV, 2).

Предположим теперь, что условие теоремы выполнено. Покажем, что $X \in \boldsymbol{B}_r$, иначе говоря, если F — произвольное замкнутое множество, то $X \cap F$ обладает свойством Бэра относительно F. По предположению, $X \cap F = M \cup P$, где M—борелевское множество (относительно пространства), а P — множество первой категории в $X \cap F$. Следовательно, множество M—борелевское относительно F и множество P — первой категории относительно F (§ 10, IV, 1). Поэтому множество $X \cap F$ обладает свойством Бэра относительно F.

Замечание. В пространствах, где понятие борелевского множества является топологическим инвариантом, например в полных метрических пространствах, последнее условие непосредственно влечет за собой топологическую инвариантность свойства Бэра в узком смысле (см. § 35).

VII. ($\mathcal{A}$)-операция.

Теорема. *Свойство Бэра является инвариантом* ($\mathcal{A}$)-*операции*[2]).

В самом деле, пусть

$$X = \bigcup_{z} \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{z^1 \ldots z^n}, \tag{1}$$

где множества $X_{z^1 \ldots z^n}$ обладают свойством Бэра (обозначения и свойства ($\mathcal{A}$)-операции см. в § 3, XIV).

Можно считать, что система множеств $X_{z^1 \ldots z^n}$ регулярна. Действительно, так как пересечение конечного числа множеств, обладаю-

[1]) Теорема Серпинского [16], стр. 319.

[2]) См. Никодим [2], стр. 149, и [3], стр. 294; Лузин и Серпинский [1], стр. 35; Шпильрайн-Марчевский [1]; Лузин [2].

щих свойством Бэра, есть множество того же типа, можно заменить множество $X_{z^1 \ldots z^n}$ множеством

$$X_{z^1} \cap X_{z^1 z^2} \cap \ldots \cap X_{z^1 \ldots z^n}.$$

Согласно п. IV, существует некоторое $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество Z, такое, что

(2) $$X \subset Z;$$

(3) если $B \in \boldsymbol{B}$ и $X \subset B$, то множество $Z - B$ первой категории.

Вообще существует множество $Z_{k^1 \ldots k^i}$, обладающее свойством Бэра и такое, что

(2a) $$\bigcup_z \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{k^1 \ldots k^i z^1 \ldots z^n} \subset Z_{k^1 \ldots k^i};$$

(3a) если $B \in \boldsymbol{B}$ и $\bigcup_z \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{k^1 \ldots k^i z^1 \ldots z^n} \subset B$,

то множество $Z_{k^1 \ldots k^i} - B$ первой категории.

Кроме того, можно предположить, что

(4) $$Z_{k^1 \ldots k^i} \subset X_{k^1 \ldots k^i},$$

потому что множество $Z_{k^1 \ldots k^i} \cap X_{k^1 \ldots k^i}$, очевидно, удовлетворяет условиям, наложенным на множество $Z_{k^1 \ldots k^i}$.

Принимая во внимание равенство $X = Z - (Z - X)$ и то, что Z — множество типа $\boldsymbol{F}_\sigma$, покажем, что $Z - X$ — множество первой категории. Применяя последовательно формулы (1), (4) и § 3, XIV (6), получим следующие соотношения:

$$Z - X = Z - \bigcup_k \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{k^1 \ldots k^i} \subset Z - \bigcup_k \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_{k^1 \ldots k^i} \subset$$
$$\subset \bigcup_k \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(Z_{k^1 \ldots k^i} - \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_{k^1 \ldots k^i m} \right).$$

Так как суммирование $\bigcup_k \bigcup_{i=0}^{\infty}$ счетное (§ 3, XIV (5)), остается доказать, что множество $\left(Z_{k^1 \ldots k^i} - \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_{k^1 \ldots k^i m} \right)$ — первой категории. Но это следует из утверждения (3a), если положить $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_{k^1 \ldots k^i m}$, в силу формулы

$$\bigcup_z \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{k^1 \ldots k^i z^1 \ldots z^n} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_z \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{k^1 \ldots k^i m z^1 \ldots z^n} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_{k^1 \ldots k^i m},$$

которая вытекает из формулы (2a) и § 3, XIV (3).

Следствие. *Свойство Бэра в узком смысле является инвариантом ($\mathcal{A}$)-операции.*

В самом деле, если E — фиксированное множество, то, согласно соотношению (1),

$$E \cap X = \bigcup_{z} \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \cap X_{z^1 \ldots z^n}).$$

Следовательно, если предположить, что множество $E \cap X_{z^1 \ldots z^n}$ обладает свойством Бэра относительно E, то, согласно предыдущей теореме, это же можно сказать о множестве $E \cap X$.

Замечания. Инвариантность свойства Бэра есть частный случай следующей теоремы общей теории множеств.

Пусть S — семейство подмножеств данного пространства, удовлетворяющее следующим условиям: 1° объединение счетного семейства множеств, принадлежащих S, принадлежит S; 2° дополнение множества, принадлежащего семейству S, тоже принадлежит S; 3° каждому подмножеству X (данного пространства) соответствует множество $Z \supset X$ семейства S, такое, что включения $X \subset S \in S$ и $Y \subset Z - S$ влекут за собой включение $Y \in S$.

При этих предположениях свойство принадлежать семейству S есть инвариант ($\mathcal{A}$)-операции. (См. Шпильрайн-Марчевский [1], стр. 300.)

Семейство множеств, обладающих свойством Бэра, является семейством S (согласно III и IV, следствие 1). Другим важным примером семейства S служит семейство функций, измеримых в смысле Лебега. В самом деле, условия 1° и 2°, очевидно, выполняются; условие 3° тоже выполняется, так как за множество Z можно принять некоторое G_δ-множество, мера которого равна внешней мере множества X, и тогда $Z - S$ имеет меру нуль.

Следовательно, *измеримость в смысле Лебега является инвариантом ($\mathcal{A}$)-операции.*

*§ 12. Знакочередующиеся ряды замкнутых множеств

I. Формулы общей теории множеств. (См. Хаусдорф [5].) Пусть

(1) $$X_0, X_1, \ldots, X_\xi, \ldots, X_\alpha$$

— некоторая убывающая трансфинитная последовательность множеств, т. е. из неравенства $\xi > \zeta$ вытекает включение $X_\xi \subset X_\zeta$. Кроме того, предположим, что

(2) $$X_0 = 1,$$

(3) $X_\lambda = \bigcap_{\xi < \lambda} X_\xi$, если λ — предельное число или если $\lambda = \alpha$.

Легко доказать, что

(4) $$1 = X_0 - X_1 \cup X_1 - X_2 \cup \ldots \cup X_\xi - X_{\xi+1} \cup \ldots \cup X_\alpha = \bigcup_{\xi < \alpha} (X_\xi - X_{\xi+1}) \cup X_\alpha.$$

Так как множества $(X_0 - X_1 \cup X_2 - X_3 \cup \ldots)$ и $(X_1 - X_2 \cup X_3 - X_4 \cup \ldots \cup X_\alpha)$ не пересекаются, мы имеем

$$\text{(4a)} \quad 1 - (X_0 - X_1 \cup X_2 - X_3 \cup \ldots) = \\ = X_1 - X_2 \cup X_3 - X_4 \cup \ldots \cup X_\alpha.$$

II. Определение. Множество E, представленное в виде

$$E = F_1 - F_2 \cup F_3 - F_4 \cup \ldots \cup F_\xi - F_{\xi+1} \cup \ldots,$$

где $\{F_\xi\}$ — последовательность замкнутых убывающих множеств, называется *разложимым в знакочередующийся ряд замкнутых убывающих множеств* или короче *разложимым множеством.*

Замечание. В полных пространствах разложимые множества совпадают с множествами, являющимися одновременно типа F_σ и G_δ (гл. III, § 34, VI). Многие важные свойства множеств типа F_σ и G_δ являются следствиями их разложимости; это одна из причин, в силу которых разложимые множества заслуживают изучения. (См. также § 13, VI.)

III. Теоремы отделимости. Разложение в знакочередующийся ряд. Пусть E и H — два произвольных множества. Допустим, что последовательность (1) удовлетворяет условиям (2) и (3), а также следующему условию:

$$X_{\xi+1} = \overline{X_\xi \cap E} \cap \overline{X_\xi \cap H}.$$

Очевидно, что последовательность (1) состоит из замкнутых множеств. Кроме того, она убывающая, так как $X_{\xi+1} \subset \overline{X}_\xi = X_\xi$. Поэтому все члены этой последовательности, начиная с некоторого индекса, совпадают. Обозначим этот индекс через $\alpha - 1$. Следовательно,

$$X_\alpha = \overline{X_\alpha \cap E} \cap \overline{X_\alpha \cap H}.$$

Положим

$$P_\xi = X_\xi - \overline{X_\xi \cap E}, \qquad R_\xi = X_\xi - \overline{X_\xi \cap H}.$$

Тогда $X_\xi - X_{\xi+1} = P_\xi \cup R_\xi$, откуда, в силу равенства (4), $1 = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} P_\xi \cup \bigcup\limits_{\xi<\alpha} R_\xi \cup X_\alpha$, и поэтому $1 - \bigcup\limits_{\xi<\alpha} P_\xi \subset \bigcup\limits_{\xi<\alpha} R_\xi \cup X_\alpha$.

С другой стороны,

$$P_\xi = X_\xi - \overline{X_\xi \cap E} \subset X_\xi - (X_\xi \cap E) = X_\xi - E \subset 1 - E,$$

откуда $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} P_\xi \subset 1 - E$ и, следовательно, $E \subset 1 - \bigcup\limits_{\xi<\alpha} P_\xi \subset \bigcup\limits_{\xi<\alpha} R_\xi \cup X_\alpha$.

Аналогичным образом $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} R_\xi \subset 1 - H$. Итак, мы получаем

$$E - X_\alpha \subset \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi, \qquad H \cap \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi = 0.$$

Более того, *множество*

$$\bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha} (X_\xi - \overline{X_\xi \cap H}) =$$
$$= (1 - \overline{H}) \cup (\overline{E} \cap \overline{H}) - \overline{\overline{E} \cap H} \cup (\overline{\overline{E} \cap \overline{H}} \cap \overline{\overline{E} \cap H}) - \ldots$$

разлагается в знакочередующийся ряд замкнутых убывающих множеств, ибо $X_{\xi+1} = \overline{X_\xi \cap E} \cap \overline{X_\xi \cap H} \subset \overline{X_\xi \cap H}$.

Отсюда, в частности, следует, что:

1° *Если уравнение* $X = \overline{X \cap E} \cap \overline{X \cap H}$ *обладает только корнем* $X = 0$, *то существует разложимое множество* D (а именно множество $D = \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi$), *такое, что*

$$E \subset D \quad \text{и} \quad H \cap D = 0^{1)}.$$

2° *Положим* $H = 1 - E$; *тогда*

(5) $X_{\xi+1} = \overline{X_\xi \cap E} \cap \overline{X_\xi - E}$ — *граница множества* $X_\xi \cap E$ *относительно* X_ξ;

(6) $$X_\alpha = \overline{X_\alpha \cap E} \cap \overline{X_\alpha - E} \quad \text{и} \quad E - X_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi.$$

Действительно, $\bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi \subset 1 - H = E$ и $R_\xi \subset X_\xi - X_{\xi+1}$, поэтому $\bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi$ как подмножество множества $\bigcup_{\xi<\alpha} (X_\xi - X_{\xi+1})$ не пересекается с X_α. Следовательно, $\bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi \subset E - X_\alpha$.

Таким образом, вычитая из множества E „остаток" $X_\alpha \cap E$, мы получаем разложимое множество. Следовательно,

3° *если остаток* $X_\alpha \cap E$ *обращается в* 0, *то* (полагая $H = 1 - E$) *имеем*

(i) $$E = \bigcup_{\xi<\alpha} R_\xi = (1 - \overline{1 - E}) \cup (\overline{E} \cap \overline{1 - E} - \overline{\overline{E} - E}) \cup (\overline{\overline{E} \cap \overline{1 - E}} \cap \overline{\overline{E} - E}) \ldots;$$

(ii) $$E = 1 - H = 1 - \bigcup_{\xi<\alpha} P_\xi = 1 - \bigcup_{\xi<\alpha} (X_\xi - \overline{X_\xi \cap E}) =$$
$$= \bigcup_{\xi<\alpha} (\overline{X_\xi \cap E} - X_{\xi+1}) = \overline{E} - (\overline{E} \cap \overline{1 - E}) \cup \overline{\overline{E} \cap \overline{1 - E}} - (\overline{E \cap \overline{1 - E}} \cap \overline{\overline{E} - E}) \cup \ldots$$

(согласно I (4a)).

---

[1]) Мы воспользуемся этим предложением, чтобы доказать важную теорему Бэра о функциях первого класса (см. гл. II, § 31, X).

IV. Свойства остатка. Множество X_α из формулы (6) есть *наибольшее* множество, удовлетворяющее уравнению

$$(7) \qquad X = \overline{X \cap E} \cap \overline{X - E}.$$

В самом деле, если множество X удовлетворяет уравнению (7), то имеем $X \subset X_0 = 1$. Далее, если $X \subset X_\xi$, то $X \cap E \subset X_\xi \cap E$ и $X - E \subset X_\xi - E$, откуда вытекает соотношение $\overline{X \cap E} \cap \overline{X - E} \subset \subset \overline{X_\xi \cap E} \cap \overline{X_\xi - E}$ и, следовательно, согласно формулам (5) и (7), $X \subset X_{\xi+1}$. Наконец, если для каждого $\xi < \lambda$ (λ — предельное число) имеет место включение $X \subset X_\xi$, то $X \subset \bigcap\limits_{\xi < \lambda} X_\xi = X_\lambda$.

Таким образом, в силу принципа трансфинитной индукции, X есть подмножество каждого множества X_ξ и, следовательно, множества X_α.

Следует заметить, что равенство (7) эквивалентно равенству

$$(8) \qquad \overline{X \cap E} = X = \overline{X - E}.$$

В самом деле, (7) означает, что $X \subset \overline{X \cap E}$ и $X \subset \overline{X - E}$; с другой стороны, мы имеем $\overline{X \cap E} \subset \overline{X}$ и $\overline{X - E} \subset \overline{X}$, откуда следует требуемая эквивалентность, поскольку, в силу (7), $X = \overline{X}$.

V. Необходимые и достаточные условия.

Теорема. *Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным условием разложимости множества E:*

1° *Из равенства* (8) *следует, что* $X = 0$; иначе говоря, *каково бы ни было замкнутое множество $F \neq 0$, граница множества $F \cap E$ относительно F, т. е. множество $\overline{F \cap E} \cap \overline{F - E}$, не совпадает с F.*

2° *Каково бы ни было замкнутое множество F, граница множества $F \cap E$ относительно F нигде не плотна в F.*

3° *Остаток обращается в нуль, т. е. $X_\alpha \cap E = 0$.*

Доказательство. 1. *Условие* 1° *является необходимым.* В самом деле, пусть множество E разложимо в знакочередующийся ряд замкнутых убывающих множеств:

$$(9) \quad E = F_1 - F_2 \cup F_3 - F_4 \cup \ldots \cup F_\xi - F_{\xi+1} \cup \ldots \quad (\xi + 1 < \alpha).$$

Очевидно, можно считать, что предельные индексы в этом разложении опущены. Если же допустить, что $F_0 = 1$, $F_\lambda = \bigcap\limits_{\xi < \lambda} F_\xi$, когда λ предельное, и $F_\alpha = \bigcap\limits_{\xi < \alpha} F_\xi$, то из равенства (4) можно заключить, что

$$(10) \qquad 1 - E = F_0 - F_1 \cup F_2 - F_3 \cup \ldots \cup F_\alpha.$$

Покажем теперь, что из равенства (8) следует включение $X \subset F_\xi$ для любого индекса ξ. Прежде всего имеем $X \subset F_0 = 1$. Допустим, что $X \subset F_\xi$. В случае когда индекс ξ — четный, из формулы (9) следует, что $X \cap E \subset F_{\xi+1}$ (ибо все разности, предшествующие множеству $F_{\xi+1}$, не пересекаются с F_ξ, а значит, и с X, тогда как все члены, следующие за множеством $F_{\xi+1}$, содержатся в $F_{\xi+1}$). Следовательно, $X = \overline{X \cap E} \subset F_{\xi+1}$. Аналогичным образом, если индекс ξ — нечетный, то из равенства (10) вытекает, что $X - E \subset F_{\xi+1}$, откуда $X = \overline{X - E} \subset F_{\xi+1}$. Наконец, если $X \subset F_\xi$ для каждого $\xi < \lambda$, то имеем

$$X \subset \bigcap_{\xi < \lambda} F_\xi = F_\lambda.$$

Таким образом, установлено, что $X \subset F_\xi$, каков бы ни был индекс ξ. Следовательно, $X \subset F_\alpha$. Это означает, в силу равенства (10), что $X \subset 1 - E$, откуда $X \cap E = 0$ и, следовательно, $X = \overline{X \cap E} = 0$.

2. *Условие* 1° *влечет за собой условие* 2°. В самом деле, согласно § 6, II (12), имеем

$$\overline{\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(E)]} = \overline{\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(E)] \cap E} = \overline{\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(E)] - E}.$$

Отсюда вытекает, что в (8) можно положить $X = \overline{\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(E)]}$, так как из равенства $X = \overline{X \cap E}$ следует равенство $\overline{X} = \overline{\overline{X} \cap E}$ (поскольку $\overline{X \cap E} \subset \overline{\overline{X} \cap E} \subset \overline{X}$). Итак, предположение, что из равенства (8) следует равенство $X = 0$, влечет за собой соотношение $\overline{\operatorname{Int}[\operatorname{Fr}(E)]} = 0$. Следовательно, граница множества E не имеет внутренних точек, т. е. нигде не плотна.

Более того, если рассматривать вместо E множество $F \cap E$ и его границу относительно F вместо границы множества E, то можно прийти к заключению, что эта относительная граница нигде не плотна в множестве F, ибо условие 1° влечет за собой то же самое условие, рассматриваемое относительно множества F (это последнее означает, что условие 1° выполняется для любых $X \subset F$).

3. *Условие* 2° *влечет за собой условие* 3°. В самом деле, в условии 2° положим $F = X_\alpha$; тогда очевидно, что граница множества $X_\alpha \cap E$ относительно X_α нигде не плотна в X_α. Следовательно, она может совпадать с множеством X_α только в единственном случае, когда $X_\alpha = 0$. Таким образом, в силу (6), имеем $X_\alpha = 0$, откуда $X_\alpha \cap E = 0$.

4. *Условие* 3° *является достаточным*, согласно III, 3°.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Как мы показали в § 8, V, граница некоторого множества нигде не плотна тогда и только тогда, когда это множество является объединением открытого и нигде не плотного множеств (или разностью замкнутого и нигде не плотного множеств). В силу предыдущей теоремы, отсюда следует такое утверждение.

Для того чтобы множество E было разложимым, необходимо и достаточно, чтобы относительно каждого замкнутого множества F множество $E \cap F$ было объединением открытого и нигде не плотного множеств (или, что эквивалентно, *разностью замкнутого и нигде не плотного множеств*).

Условие 1° предыдущей теоремы приводит к следующему утверждению.

Каково бы ни было непустое замкнутое множество F, в нем существует точка, в которой либо множество $F \cap E$, либо множество $F - E$ „локально пусто" относительно F[1]), т. е. существует окрестность G этой точки, такая, что либо $G \cap F \cap E = 0$, либо $(G \cap F) - E = 0$.

В самом деле, если $\overline{F \cap E} = F = \overline{F - E}$, то из неравенства $G \cap F \neq 0$ следует, что $G \cap F \cap E \neq 0 \neq (G \cap F) - E$ (см. § 5, III). Следовательно, рассматриваемое условие влечет за собой условие 1°. Обратно, пусть $p \in F - \overline{F \cap E}$. Положим $G = 1 - \overline{F \cap E}$; тогда $G \cap F \cap E = 0$. Если же $p \in F - \overline{F - E}$, то положим $G = 1 - \overline{F - E}$.

VI. Свойства разложимых множеств.

Теорема 1. *Разложимые множества образуют поле* (т. е. объединение, пересечение и дополнение двух разложимых множеств — разложимые множества).

Это утверждение непосредственно следует из условия 2° теоремы п. V и из того, что множества, имеющие нигде не плотную границу, образуют поле (§ 8, V).

Теорема 2. *Всякое разложимое множество обладает свойством Бэра в узком смысле.*

Действительно, пусть E — разложимое множество, а F—замкнутое множество; тогда множество $E \cap F$ является объединением открытого множества и множества, нигде не плотного в F (см. п. V).

Теорема 3. *Если граничное множество разложимо, то оно нигде не плотно.*

В самом деле, для множеств, имеющих нигде не плотную границу, понятия граничного множества и нигде не плотного множества совпадают (§ 8, V).

Теорема 4. *Любое разреженное множество разложимо*, ибо граница разреженного множества нигде не плотна (§ 9, VI, теорема 4).

VII. Вычеты. (См. Хаусдорф [1], стр. 280.) Множество $X \cap \overline{\overline{X} - X}$ называется *вычетом* множества X (в смысле Хаусдорфа).

[1]) См. § 7, IV и § 11, IV, 4.

Множество $X_\alpha \cap E$ (остаток множества E) совпадает со своим вычетом.

Действительно, пусть E и X — два множества, удовлетворяющие формуле (8); тогда множество $X \cap E$ совпадает со своим вычетом: $X = \overline{X - E} = \overline{X - (X \cap E)} = \overline{\overline{X \cap E} - (X \cap E)}$, потому что $X = \overline{X \cap E}$; отсюда следует, что

$$X \cap E = (X \cap E) \cap \overline{\overline{X \cap E} - (X \cap E)}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы множество E было разложимым, необходимо и достаточно, чтобы никакое множество Y ($\neq 0$), замкнутое в E, не совпадало со своим вычетом*, другими словами (§ 7, V), *чтобы множество Y содержало точку, в которой оно замкнуто.*

В самом деле, предположим, что $Y = \overline{Y} \cap E$ и $Y = Y \cap \overline{\overline{Y} - Y}$. Тогда $\overline{Y} = \overline{\overline{Y} \cap E}$ и, с другой стороны,

$$\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y} - Y} = \overline{\overline{Y} - (\overline{Y} \cap E)} = \overline{\overline{Y} - E} \subset \overline{Y}.$$

Поэтому $\overline{\overline{Y} \cap E} = \overline{Y} = \overline{\overline{Y} - E}$. Подставляя $\overline{Y}$ вместо X в V, 1°, получаем $Y = 0$. Следовательно, сформулированное условие является необходимым. Оно также и достаточное, ибо, в силу сказанного выше, из него вытекает, что $X_\alpha \cap E = 0$. Следовательно, согласно V, 3°, множество E разложимо.

Теорема 2. *Некоторое множество является разностью двух замкнутых множеств тогда и только тогда, когда его вычет пуст.*

Это вытекает из следствия § 7, V.

VIII. Вычеты трансфинитного порядка. Пусть E — некоторое множество. Образуем последовательность его вычетов всех порядков следующим образом: R_1 — вычет множества E, $R_{\xi+1}$ — вычет множества R_ξ и $R_\lambda = \bigcap\limits_{\xi < \lambda} R_\xi$ для предельного λ.

Определенная таким образом последовательность вычетов является убывающей. Закончим ее числом β, таким, что $R_\beta = R_{\beta+1} = \ldots$. Согласно I (4), имеем

$$E - R_\beta = E - R_1 \cup R_1 - R_2 \cup \ldots.$$

Члены этого знакочередующегося ряда не замкнуты, но, в силу равенства $X - \overline{\overline{X} - X} = \overline{X} - \overline{\overline{X} - X}$ (поскольку $\overline{X} - X - \overline{\overline{X} - X} = 0$), имеем $R_\xi - R_{\xi+1} = \bar{R}_\xi - \overline{\bar{R}_\xi - R_\xi}$, следовательно,

$$(1) \qquad E - R_\beta = \bar{E} - \overline{\bar{E} - E} \cup E \cap \overline{\overline{\bar{E} - E}} - \dots$$
$$\dots \cup \bar{R}_\xi - \overline{\bar{R}_\xi - R_\xi} \cup \dots$$

В частности, *если множество E разложимо, то его „последний вычет" R_β пуст* (см. п. VII) и формула (1) представляет собой разложение множества E в ряд замкнутых убывающих множеств.

Так как последний вычет R_β совпадает со своим собственным вычетом, множество R_β не является локально замкнутым ни в одной из своих точек. Покажем теперь, что *среди множеств, замкнутых в E, R_β есть наибольшее множество, которое не является локально замкнутым ни в одной из своих точек.*

В самом деле, пусть множество Y замкнуто в E, и пусть $Y - R_\beta \neq 0$. Покажем, что Y содержит точку, в которой оно локально замкнуто. Принимая во внимание разложение (1), можно утверждать, что существует индекс ξ, для которого

$$(Y \cap R_\xi) - R_{\xi+1} \neq 0.$$

Допустим, что ξ — наименьший такой индекс. Тогда $Y \subset R_\xi$, поэтому множество Y замкнуто в R_ξ; так как множество $R_{\xi+1}$ является вычетом множества R_ξ, то R_ξ локально замкнуто в каждой точке множества $R_\xi - R_{\xi+1}$ и, следовательно, в каждой точке непустого множества $(Y \cap R_\xi) - R_{\xi+1}$. Это означает, что множество Y также является локально замкнутым в каждой точке этого последнего множества.

§ 13. Непрерывность. Гомеоморфизм

I. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — топологические пространства, и пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Отображение f называется *непрерывным в точке x*, если [1])

$$(0) \qquad (x \in \bar{A}) \Rightarrow [f(x) \in \overline{f(A)}] \quad \text{для каждого } A \subset \mathscr{X},$$

или эквивалентно (см. § 3, II (2)), если

$$(0') \qquad (x \in \bar{A}) \Rightarrow \left[x \in f^{-1}\overline{(f(A))}\right] \quad \text{для каждого } A \subset \mathscr{X}.$$

[1]) См. Хаусдорф [1], гл. 9, § 1.
В случае, когда пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ имеют общие точки, желательно различать замыкания в пространстве $\mathscr{X}$ и в пространстве $\mathscr{Y}$. Мы не делаем этого различия для упрощения обозначений.

Если отображение f непрерывно в каждой точке пространства, то оно называется просто *непрерывным*. Семейство всех непрерывных отображений $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, т. е. таких, что $f(\mathcal{X})\subset\mathcal{Y}$, будет обозначаться $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

В случае, когда $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — множества действительных чисел, рассматриваемое здесь понятие непрерывности совпадает с понятием непрерывности, принятым в классическом анализе („определение Гейне"). Так, например, $\mathcal{E}^{\mathcal{I}}$ обозначает множество действительных функций, определенных в интервале $0\leqslant x\leqslant 1$.

II. Необходимые и достаточные условия.

Теорема. *Для того чтобы отображение f было непрерывным в точке x, необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности B точки $f(x)$ множество $f^{-1}(B)$ было окрестностью точки x, или, иначе, чтобы:*

(1) $[f(x)\in\operatorname{Int}(B)]\Rightarrow[x\in\operatorname{Int}(f^{-1}(B))]$ *для каждого* $B\subset\mathcal{Y}$,

или эквивалентно

(1′) $[x\in f^{-1}(\operatorname{Int}(B))]\Rightarrow[x\in\operatorname{Int}(f^{-1}(B))]$ *для каждого* $B\subset\mathcal{Y}$,

или (заменяя B на $\mathcal{Y}-B$)

(2) $[x\in\overline{f^{-1}(B)}]\Rightarrow[x\in f^{-1}(\overline{B})]$ *для каждого* $B\subset\mathcal{Y}$.

Доказательство. Соотношение (2) можно вывести из соотношения (0), полагая $A=f^{-1}(B)$ (см. § 3, III (12)). Обратно, полагая $B=f(A)$ в соотношении (2) (и используя § 3, III (11)), мы получаем соотношение (0).

Принимая во внимание то, что любая окрестность некоторой точки содержит открытую окрестность этой точки, мы получаем следующее условие непрерывности („определение Коши").

Следствие. *Отображение f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда для любого открытого множества H, содержащего точку $f(x)$, существует открытое множество G, содержащее точку x, такое, что $f(G)\subset H$.*

III. Множество $D(f)$ точек разрыва. Пусть $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. Для сокращения записи положим $D=D(f)$. Согласно соотношениям (0′), (1′) и (2), мы имеем

(1) $$D=\bigcup_A\left[\overline{A}-f^{-1}(\overline{f(A)})\right]=\bigcup_B\left[f^{-1}(\operatorname{Int}(B))-\right.$$
$$\left.-\operatorname{Int}(f^{-1}(B))\right]=\bigcup_B\left(\overline{f^{-1}(B)}-f^{-1}(\overline{B})\right),$$

где A пробегает все подмножества пространства $\mathscr{X}$, а B — все подмножества пространства $\mathscr{Y}$.

Отсюда следует, что

(2) $$f(D) = \bigcup_A [f(\bar{A}) - \overline{f(A)}].$$

Действительно, согласно § 3, III (13), мы имеем

$$f(D) = \bigcup_A f\left[\bar{A} - f^{-1}(\overline{f(A)})\right] = \bigcup_A f\left[\bar{A} \cap f^{-1}(\mathscr{Y} - \overline{f(A)})\right] =$$
$$= \bigcup_A [f(\bar{A}) \cap (\mathscr{Y} - \overline{f(A)})] = \bigcup_A (f(\bar{A}) - \overline{f(A)}).$$

Можно предположить, что переменная B пробегает семейство открытых множеств в третьем члене равенства (1) и семейство замкнутых множеств в четвертом члене этого равенства.

В самом деле, полагая $\operatorname{Int}(B) = G$, мы получаем

$$f^{-1}(\operatorname{Int}(B)) - \operatorname{Int}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(G) - \operatorname{Int}(f^{-1}(G)),$$

и, полагая $\bar{B} = F$, мы получаем

$$\overline{f^{-1}(B)} - f^{-1}(\bar{B}) \subset \overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F).$$

Следовательно,

(3) $$D = \bigcup_G \left[f^{-1}(G) - \operatorname{Int}(f^{-1}(G))\right] = \bigcup_F \left(\overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F)\right).$$

Более того, *если* $\boldsymbol{S}$ — *подбаза пространства* $\mathscr{Y}$, *то область изменения множества* G *может быть сужена до* $\boldsymbol{S}$, т. е.

(4) $$D = \bigcup_{G \in S} \left\{f^{-1}(G) - \operatorname{Int}(f^{-1}(G))\right\}.$$

Другими словами, если для данной точки $x \in \mathscr{X}$ импликация

(5) $$(x \in f^{-1}(G)) \Rightarrow (x \in \operatorname{Int}[f^{-1}(G)])$$

является истинной для каждого множества $G \in \boldsymbol{S}$, то она истинна и для любого открытого множества $G \subset \mathscr{Y}$ (т. е. отображение f непрерывно в точке x).

Для доказательства мы должны показать, что:

1° если импликация (5) истинна для множеств G_1 и G_2, то она истинна для множества $G_1 \cap G_2$;

2° если импликация (5) истинна для каждого множества G_ι ($\iota \in I$), то она истинна для $\bigcup_\iota G_\iota$.

Эти два утверждения легко получаются из формул (см. § 6, II (1) и (2))

$$\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \quad \text{и} \quad \bigcup_\iota \operatorname{Int}(A_\iota) \subset \operatorname{Int}\left(\bigcup_\iota A_\iota\right).$$

Аналогично *если* $\boldsymbol{T}$ — *замкнутая подбаза пространства* $\mathcal{Y}$, *то область изменения множества* F *в формуле* (3) *может быть сужена до* $\boldsymbol{T}$.

Из первой части формулы (3) следует, что $D \subset \mathcal{X}^d$ (производное множество множества $\mathcal{X}$), так как любая изолированная точка пространства, как внутренняя точка любого содержащего ее множества, не принадлежит множеству $f^{-1}(G) - \operatorname{Int}(f^{-1}(G))$.

Следующие равенства определяют два важных класса функций: 1) $D = 0$ — непрерывные функции; 2) $\overline{\mathcal{X} - D} = \mathcal{X}$ — точечно-разрывные функции.

IV. Непрерывные отображения. Из формул I (0′), II (2) и II (1′), а также III (1) — (3) непосредственно следует

Теорема 1. *Для того чтобы отображение* f *было непрерывным, необходимы и достаточны следующие условия*:

(1) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ *для любого* $A \subset \mathcal{X}$, *т. е.* $\overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)}$;

(2) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ *для любого* $B \subset \mathcal{Y}$, *т. е.* $f\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{B}$;

(3) *множество* $f^{-1}(G)$ *открыто для каждого открытого* $G \subset \mathcal{Y}$;

(4) *множество* $f^{-1}(F)$ *замкнуто для каждого замкнутого* $F \subset \mathcal{Y}$.

Так как операция f^{-1} аддитивна и мультипликативна (§ 3, III (6a) и (7a)), то из условий (3) и (4) следует

(5) *если* B *есть* $\boldsymbol{F}_\sigma$-*множество или* $\boldsymbol{G}_\delta$-*множество, то* $f^{-1}(B)$ *есть множество того же типа.*

Теорема 2. *Композиция двух непрерывных отображений есть непрерывное отображение.*

Более точно: *если отображение* f *непрерывно в точке* x *и отображение* g *непрерывно в точке* $f(x)$, *то композиция этих отображений* $h = g \circ f$ *непрерывна в точке* x.

Доказательство. Согласно соотношению I (0), $x \in \overline{A}$ влечет за собой $f(x) \in \overline{f(A)}$; отсюда, в силу непрерывности g, следует, что $g(f(x)) \in \overline{g(f(A))}$.

Теорема 3. *Пусть* $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — *непрерывное отображение на. Если множество* A *всюду плотно в пространстве* $\mathcal{X}$, *то множество* $f(A)$ *всюду плотно в пространстве* $\mathcal{Y}$.

Следовательно, *сепарабельность сохраняется при непрерывных отображениях.*

Доказательство непосредственно следует из (1).

V. Относительные свойства. Сужение. Ретракция. Напомним, что через $f|A$ обозначается функция, которая получается из функции $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, если ограничить множество значений ее аргумента множеством A (§ 3, I).

Сужение $f|A$ называется *непрерывным в точке x относительно множества A*, если $x \in A$ и

$$(x \in \overline{X \cap A}) \Rightarrow (f(x) \in \overline{f(X \cap A)}) \quad \textit{для каждого } X \subset \mathcal{X}.$$

Теорема 1. *Непрерывность функции в точке p есть локальное свойство*, т. е. если множество A — окрестность точки p, то из непрерывности сужения $f|A$ в точке p вытекает непрерывность функции f в этой точке.

В самом деле, пусть $p \in \overline{X}$. Очевидно, что $X = (X \cap A) \cup (X - A)$, откуда $\overline{X} = \overline{X \cap A} \cup \overline{X - A} \subset \overline{X \cap A} \cup \overline{\mathcal{X} - A}$, и так как по предположению точка p не принадлежит множеству $\overline{\mathcal{X} - A}$, то $p \in \overline{X \cap A}$. Следовательно, в силу непрерывности сужения,

$$f(p) \in \overline{f(X \cap A)} \subset \overline{f(X)}.$$

Теорема 2. *Если $\mathcal{X} = A \cup B$, $p \in A \cap B$ и функции $f|A$ и $f|B$ непрерывны в точке p, то и функция f непрерывна в точке p.*

В самом деле, если $p \in \overline{X} = \overline{X \cap A} \cup \overline{X \cap B}$, то либо $p \in \overline{X \cap A}$ либо $p \in \overline{X \cap B}$. Следовательно, $f(p) \in \overline{f(X \cap A)} \subset \overline{f(X)}$ или $f(p) \in \overline{f(X \cap B)} \subset \overline{f(X)}$.

Теорема 3. *Если $\mathcal{X} = A \cup B$ есть разложение пространства $\mathcal{X}$ на два замкнутых или два открытых множества и если функции $f|A$ и $f|B$ непрерывны, то функция f непрерывна на пространстве $\mathcal{X}$.*

Действительно, в случае, когда $p \in A \cap B$, функция f непрерывна в точке p, согласно теореме 2, а в случае, когда $p \notin A$, p есть внутренняя точка множества B, так что мы приходим к тому же самому выводу в силу теоремы 1.

Подмножество A пространства $\mathcal{X}$ называется *ретрактом*[1]) пространства $\mathcal{X}$, если существует непрерывное отображение f, называемое *ретракцией*, пространства $\mathcal{X}$ на множество A, такое, что $f(x) = x$ для $x \in A$. Другими словами, если тождественное отображение, определенное на множестве A, допускает непрерывное продолжение f на все пространство $\mathcal{X}$, такое, что $f(\mathcal{X}) = A$.

Ретракцию можно рассматривать как обобщение проекции: если

---

[1]) См. Борсук [1], стр. 153.

дано прямое произведение $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, то формула $f(x, y) = x$ определяет ретракцию произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ на ось $\mathscr{X}$.

Теорема 4. *Если A — ретракт пространства $\mathscr{X}$, то любая непрерывная функция f, определенная на A (со значениями в пространстве $\mathscr{Y}$), допускает непрерывное продолжение f^* на $\mathscr{X}$, т. е. $f = f^* | A$.*

Действительно, если g — ретракция пространства $\mathscr{X}$ в множество A, то мы можем положить $f^*(x) = f(g(x))$ для $x \in \mathscr{X}$.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ — хаусдорфово пространство и $f: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — непрерывное отображение. Тогда множество неподвижных точек отображения f, т. е. множество*

$$\mathop{\mathsf{E}}_{x}(f(x) = x)$$

замкнуто.

Достаточно показать, что множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x}(f(x) \neq x)$ открыто. Пусть $\mathscr{X}$ — хаусдорфово пространство; тогда мы имеем

$$(f(x) \neq x) \equiv \bigvee_{G, H} (f(x) \in G)(x \in H)(G \cap H = 0)$$

(G и H — открытые множества).

Это соотношение эквивалентно следующему (где оператор $\bigcup$ распространяется на все открытые множества G, H, такие, что $G \cap H = 0$):

$$\mathop{\mathsf{E}}_{x}(f(x) \neq x) = \bigcup_{G, H} \mathop{\mathsf{E}}_{x}(f(x) \in G)(x \in H) =$$
$$= \bigcup_{G, H} \mathop{\mathsf{E}}_{x}\left(x \in f^{-1}(G)\right)(x \in H) = \bigcup_{G, H}\left(f^{-1}(G) \cap H\right).$$

Так как отображение f непрерывно, множество $f^{-1}(G)$ открыто. Это завершает доказательство.

Теорема 6. *Каждый ретракт хаусдорфова пространства замкнут.*

Это утверждение вытекает из предшествующей теоремы, так как если f — ретракция пространства $\mathscr{X}$ на множество R, то $R = \mathop{\mathsf{E}}_{x}(f(x) = x)$.

VI. Вещественнозначные функции. Характеристические функции. Рассмотрим частный случай: $\mathscr{Y} = \mathscr{E}$ ($\mathscr{E}$ — пространство вещественных чисел), $\mathscr{X}$ — произвольное топологическое пространство.

Теорема 1. *Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$. Отображение f непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G, содержащее x_0, такое, что*

(1) $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ для каждого } x \in G.$$

Для доказательства достаточно подставить вместо множества H в II (следствие) открытый интервал $\underset{y}{\mathsf{E}}(|y - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Теорема 2. *Если отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ непрерывно, то множества*

$$\underset{x}{\mathsf{E}}[f(x) \leqslant a], \quad \underset{x}{\mathsf{E}}[f(x) \geqslant a], \quad \underset{x}{\mathsf{E}}[a \leqslant f(x) \leqslant b]$$

замкнуты, а множества

$$\underset{x}{\mathsf{E}}[f(x) < a], \quad \underset{x}{\mathsf{E}}[f(x) > a], \quad \underset{x}{\mathsf{E}}[a < f(x) < b]$$

открыты.

Это верно в силу IV (3) и (4), поскольку перечисленные множества являются прообразами соответственно замкнутых и открытых множеств

$$\underset{y}{\mathsf{E}}(y \leqslant a), \quad \underset{y}{\mathsf{E}}(y \geqslant a), \quad \underset{y}{\mathsf{E}}(a \leqslant y \leqslant b),$$
$$\underset{y}{\mathsf{E}}(y < a), \quad \underset{y}{\mathsf{E}}(y > a), \quad \underset{y}{\mathsf{E}}(a < y < b).$$

Как в классическом анализе, можно ввести понятие *равномерной сходимости*.

Пусть $f_n: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ для $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$. Мы говорим, что *последовательность функций $f_1, f_2, \ldots$ равномерно сходится к функции f, если*

(2) $$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{k} \bigwedge_{n \geqslant k} \bigwedge_{x} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Следующую классическую теорему можно распространить на случай, когда $\mathscr{X}$ — произвольное топологическое пространство [1]).

Теорема 3. *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.*

Доказательство. Положим $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и x_0 — данная точка пространства $\mathscr{X}$. В силу формулы (2), существует такое k, что

(3) $$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathscr{X}.$$

[1]) Дальнейшее обобщение, получаемое заменой множества $\mathscr{E}$ произвольным метрическим пространством, будет рассмотрено в гл. II. Доказательство по существу останется без изменения.

Поэтому, подставляя в эту формулу $x = x_0$, мы получим

$$(4) \qquad |f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу непрерывности функции f_k в точке x_0, существует открытое множество G, содержащее x_0, такое, что (см. (1))

$$(5) \qquad |f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ для каждого } x \in G.$$

Из неравенств (3) — (5) следует условие (1), означающее, что x_0 — точка непрерывности функции f.

Напомним, что *характеристической функцией* f_A *множества* A называется функция, которая принимает значение 1 в точках множества A и значение 0 в точках дополнения к A.

Теорема 4. *Справедливо тождество*

$$(6) \qquad \mathrm{Fr}(A) = D(f_A);$$

иными словами, *граница множества* A *совпадает с множеством точек разрыва его характеристической функции.*

Доказательство. Пусть $f(x) = 1$ (случай $f(x) = 0$ рассматривается аналогично).

Если $x \in \mathrm{Fr}(A)$, то множество $A = f^{-1}(1)$ не является окрестностью точки x, хотя множество, состоящее только из точки 1, является окрестностью точки $f(x)$ в пространстве (0,1). Следовательно, согласно теореме из п. II, $x \in D$.

Обратно, если $x \in A - \mathrm{Fr}(A)$, то $x \in \mathrm{Int}(A)$ и, по той же самой теореме, x есть точка непрерывности функции f.

Теорема 5. *Характеристическая функция множества* A *является непрерывной, соответственно точечно-разрывной, тогда и только тогда, когда это множество одновременно замкнуто и открыто, соответственно имеет нигде не плотную границу.*

Действительно, согласно равенству (6), условие $D = 0$ эквивалентно условию $\mathrm{Fr}(A) = 0$, которое означает, что множество A замкнуто и открыто.

Из § 12, V, 2° вытекает

Следствие. *Характеристическая функция множества* A *точечно-разрывна на каждом замкнутом множестве тогда и только тогда, когда множество* A *разложимо в знакочередующийся ряд убывающих замкнутых множеств.*

VII. Взаимно однозначные непрерывные отображения. Сравнение топологий. Предположим теперь, что отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

взаимно однозначно. Следующие свойства инвариантны относительно взаимно однозначных непрерывных отображений:

1. Свойство быть *точкой накопления* пространства, ибо $x \in \overline{\mathcal{X} - x}$ влечет за собой $f(x) \in \overline{f(\mathcal{X} - x)} = \overline{\mathcal{Y} - f(x)}$, так как $f(\mathcal{X} - x) = f(\mathcal{X}) - f(x)$ (см. § 3, III (3′)).

2. Свойство множества быть *плотным в себе* (это непосредственно следует из предыдущего предложения).

3. Свойство быть *граничным множеством* в пространстве, ибо из равенства $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X} - X}$ следует, что $f(\mathcal{X}) = f(\overline{\mathcal{X} - X}) \subset \overline{f(\mathcal{X} - X)} = \overline{f(\mathcal{X}) - f(X)}$.

Совокупность всех топологических пространств одной и той же мощности можно *упорядочить*, полагая $\mathcal{Y} \leqslant \mathcal{X}$, если существует взаимно однозначное непрерывное отображение f пространства $\mathcal{X}$ на пространство $\mathcal{Y}$.

Так как множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют одну и ту же мощность, это определение можно выразить следующим образом („отождествляя" точку x с точкой $f(x)$).

Топологическое пространство есть пара $(1, F)$, где 1 — множество точек, а F — функция (замыкание), удовлетворяющая аксиомам § 4, I, 1—4. Положим, по определению,

(1) $(1, F_2) \leqslant (1, F_1)$, если $F_1(X) \subset F_2(X)$ для каждого $X \subset 1$,

и скажем в этом случае, что *топология пространства* 1, *заданная функцией* F_1, *сильнее топологии, заданной функцией* F_2. Другими словами, каждое множество, открытое в более слабой топологии, открыто и в более сильной. Таким образом, более сильная топология богаче открытыми множествами (а следовательно, и замкнутыми).

Дискретная топология является сильнейшей топологией (так как в ней каждое множество открыто). Если мы не требуем, чтобы пространство было $\mathcal{T}_1$-пространством, то существует *слабейшая* топология, а именно топология, в которой замыкание каждого непустого множества есть все пространство, т. е. пустое множество и все пространство являются единственными замкнутыми множествами.

Слабейшая $\mathcal{T}_1$-топология есть топология, где замкнутыми множествами являются только пустое множество, все пространство и конечные множества.

VIII. Гомеоморфизм. Если отображение f пространства $\mathcal{X}$ на (все) пространство $\mathcal{Y}$ непрерывно, взаимно однозначно и его обратное отображение f^{-1} тоже непрерывно, то мы называем отображение f *гомеоморфизмом* [1]), а пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — *гомеоморфными* (или пространствами одного и того же топологического типа).

---

[1]) Этот термин был введен А. Пуанкаре [1], стр. 9.

В этом случае мы пишем

$$\mathcal{X} \underset{\mathrm{top}}{=} \mathcal{Y} \quad \text{(топологическая эквивалентность).}$$

Если $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, то гомеоморфизм называется *топологическим автоморфизмом.*

Очевидно, что отношение гомеоморфизма между пространствами рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема 1. *Для того чтобы взаимно однозначное отображение было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих условий:*

$$(1) \qquad f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \quad \text{для каждого} \quad A \subset \mathcal{X};$$

$$(2) \qquad f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)} \quad \text{для каждого} \quad B \subset \mathcal{Y}.$$

Доказательство. Согласно IV (1), включение $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ эквивалентно непрерывности отображения f, тогда как включение $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, согласно IV (2), эквивалентно непрерывности отображения f^{-1}. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Теорема 2. *Для того чтобы отображение f было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$(3) \qquad \overline{A} = f^{-1}(\overline{f(A)}) \quad \text{для любого} \quad A \subset \mathcal{X}$$

или эквивалентное ему условие

$$(3a) \qquad (x \in \overline{A}) \equiv (f(x) \in \overline{f(A)}).$$

Доказательство. Если отображение f взаимно однозначно, то наше утверждение верно, ибо тогда равенство (3) эквивалентно равенству (1). Остается показать, что функция, удовлетворяющая условию (3), дает взаимно однозначное отображение. Пусть $f(p) = f(q)$. Тогда $\overline{p} = f^{-1}(\overline{f(p)}) = f^{-1}(\overline{f(q)}) = \overline{q}$, следовательно, $p = q$.

IX. Топологические свойства. Всякое свойство пространства, инвариантное относительно гомеоморфизмов, называется *топологическим свойством.*

Из п. VIII (3a) и § 3, III (18) следует, что каждое свойство, выраженное с помощью операции $\overline{A}$ (и операций теории множеств и логики), является топологическим.

Более общо, если точка a (или множество A, или семейство $\boldsymbol{A}$ и т. д.) обладает данным свойством относительно пространства $\mathcal{X}$ и если функция f гомеоморфно отображает пространство $\mathcal{X}$ на пространство $\mathcal{Y}$, то точка $f(a)$ обладает тем же свойством относительно пространства $\mathcal{Y}$ (если только это свойство выражено так же, как выше).

Таким образом, *два гомеоморфных пространства нельзя отличить одно от другого никакими топологическими средствами.* Аналогичным образом, если множества A и B расположены соответственно в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ и если существует взаимно однозначное отображение пространства $\mathcal{X}$ на пространство $\mathcal{Y}$, которое преобразует множество A в множество B, то множества A и B в соответствующих пространствах неотличимы с топологической точки зрения. Мы будем называть их *топологически эквивалентными* (по отношению к пространствам $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$).

Важно заметить, что два множества могут быть гомеоморфными и, тем не менее, их положение в пространстве может быть различным, так что между ними может и не быть топологической эквивалентности. Например, в пространстве действительных чисел множество, составленное из точки, отрезка и второй точки (в указанном порядке), неэквивалентно (хотя и гомеоморфно) множеству, составленному из двух точек и отрезка, следующего за ними. Те же множества (рассматриваемые как подмножества плоскости) эквивалентны по отношению к плоскости.

Некоторое свойство множества A, расположенного в пространстве $\mathcal{X}$, инвариантное относительно гомеоморфных отображений множества A на подмножества пространства $\mathcal{X}$, или, более общо, на подмножества пространств, принадлежащих некоторому семейству $\mathfrak{F}$ пространств, называется *внутренним инвариантом* по отношению к пространству $\mathcal{X}$, соответственно по отношению к семейству $\mathfrak{F}$.

Так, например (как мы увидим позже), свойство быть открытым подмножеством A евклидова пространства $\mathcal{E}^n$ есть внутренний инвариант по отношению к $\mathcal{E}^n$. Внутренним инвариантом является также число областей, на которые разбивается пространство $\mathcal{E}^n$ замкнутым и ограниченным подмножеством A. Хотя эти свойства являются „внешними“ по отношению к множеству A, они эквивалентны (в области подмножеств пространства $\mathcal{E}^n$) „внутренним“ свойствам (т. е. свойствам, выраженным топологическими терминами, причем множество A рассматривается как пространство). Отсюда следует их топологическая инвариантность.

Здесь существенна роль пространства $\mathcal{E}^n$. Если в качестве пространства взять вместо $\mathcal{E}^n$ интервал $\mathcal{J}$, то указанные свойства не будут внутренними инвариантами.

Как мы увидим в § 35, IV, свойство быть G_δ-множеством есть внутренний инвариант по отношению к семейству полных пространств.

Все свойства пространства, его подмножеств, точек и т. д., рассматривавшиеся до сих пор, являются топологическими свойствами и, следовательно, инвариантами гомеоморфных преобразований пространства.

X. Топологический ранг. Пространство $\mathcal{X}$ называется *топологически содержащимся* [1]) в пространстве $\mathcal{Y}$, если оно гомеоморфно

[1]) Согласно П. С. Александрову.

некоторому подмножеству пространства $\mathcal{Y}$. Обозначение:

$$\mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{Y} \quad \text{(топологическое включение).}$$

Если пространство $\mathcal{X}$ топологически содержится в пространстве $\mathcal{Y}$, а пространство $\mathcal{Y}$ — в пространстве $\mathcal{X}$, то мы говорим, что $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют один и тот же *топологический ранг* [1]).

Если это отношение имеет место только в одну сторону, то мы говорим, что топологический ранг одного из пространств выше топологического ранга другого.

Разумеется, два пространства могут иметь один и тот же топологический ранг, не будучи гомеоморфным. Таковы, например, неограниченная прямая и замкнутый интервал. Тем не менее, в силу одной теоремы теории множеств (см. Банах [2]), имеет место следующее предложение: *если пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют один и тот же топологический ранг, то существуют множество $A \subset \mathcal{X}$ и множество $B \subset \mathcal{Y}$, такие, что A гомеоморфно B, а $\mathcal{X} - A$ гомеоморфно $\mathcal{Y} - B$.*

Топологические ранги двух пространств могут быть *несравнимыми*. Так будет, например, в случае окружности и множества, составленного из трех отрезков, имеющих один общий конец.

XI. Однородные множества. Множество A называется *однородным* в пространстве, если для каждой пары a, b его точек существует гомеоморфизм f пространства на себя (автоморфизм), такой, что $f(a) = b$ и $f(A) = A$.

В частности, все пространство однородно, если все его точки топологически эквивалентны (в смысле п. IX).

Таковы, например, окружность, n-мерное евклидово пространство. Эти пространства, кроме того, *биоднородны*, т. е. существует отображение, ставящее в соответствие точку b точке a и точку a точке b одновременно. Впрочем, следует заметить, что пространство может быть однородным, но не биоднородным (см. Куратовский [4]).

Из того же круга идей, доказано (см. там же, стр. 16), что если множество A одновременно замкнуто и открыто и a, b — две эквивалентные точки, такие, что $a \in A$ и $b \in 1 - A$, то точки a и b биэквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм f пространства на себя, такой, что $f(a) = b$ и $f(b) = a$ [2]).

Множество A может не быть однородным в содержащем его пространстве и быть однородным, если его рассматривать как пространство.

Из определения сразу вытекает, что *если множество A однородное, то каждое топологическое свойство, которое имеет место в одной точке множества A, имеет место и во всех остальных его точках.* В частности, рассмотрев свойства быть внутренней точкой, точкой накопления, точкой, где данное множе-

---

[1]) „Тип размерностей" по Фреше [2], или „Homoïe" по Мало.

[2]) В работе Данцига [1], стр. 102, рассматриваются другие виды однородности, в частности однородность относительно инволюции. Эти понятия могут быть также локализованы.

ство является множеством первой категории, мы получим соответственно, что *всякое однородное множество A есть*:

1° *либо открытое, либо граничное множество*;

2° *плотное в себе, либо дискретное множество*;

3° *либо множество первой категории, либо множество, не являющееся множеством первой категории ни в одной из своих точек.*

Справедлива также следующая теорема [1]):

*Теорема. Пусть $\mathfrak{H}$ — *семейство автоморфизмов данного топологического пространства, такое, что каждой паре точек x, y соответствует автоморфизм h, принадлежащий этому семейству и удовлетворяющий равенству $y = h(x)$. Пусть Z — такое множество, что для каждого элемента h, принадлежащего семейству $\mathfrak{H}$,*

$$(4) \qquad \text{либо } Z = h(Z), \text{ либо } Z \cap h(Z) = 0.$$

При этих предположениях, если множество Z обладает свойством Бэра, то оно является или множеством первой категории, или множеством, одновременно замкнутым и открытым.

Для доказательства заметим сначала (см. п. IX), что если точка z принадлежит множеству Z и множество Z обладает некоторым (топологическим) свойством в точке z, то множество $h(Z)$ обладает тем же свойством в точке $h(z)$. Кроме того, множество Z однородно, ибо каждой точке $z_1 \in Z$ можно поставить в соответствие автоморфизм h, такой, что $z_1 = h(z)$, и так как $z_1 \in Z \cap h(Z)$, то, в силу условия (4), $Z = h(Z)$. Согласно утверждению 3°, отсюда вытекает, что если Z — не множество первой категории, то оно не является множеством первой категории ни в одной из своих точек. В силу свойства Бэра (§ 11, IV, следствие 2), отсюда следует, что существует точка $z \in Z$, в которой $1 - Z$ является множеством первой категории. Пусть тогда G — открытое множество, такое, что $z \in G$ и множество $G - Z$ первой категории. Покажем, что $G - Z = 0$.

Предположим, что $p \in G - Z$. Пусть h — автоморфизм, принадлежащий семейству $\mathfrak{H}$, такой, что $p = h(z)$. Так как $p \in h(Z) - Z$, то, согласно условию (4), $Z \cap h(Z) = 0$, откуда $h(Z) \subset 1 - Z$, и, следовательно, имеет место включение $G \cap h(Z) \subset G - Z$, из которого вытекает, что $G \cap h(Z)$ есть множество первой категории. Следовательно, $h(Z)$ есть множество первой категории в точке $p = h(z)$. Но это противоречит замечанию, сделанному в начале доказатель-

[1]) Эта теорема представляет собой распространение на топологические пространства теоремы Банаха, относящейся к топологическим группам (см. следующий пункт). Теорема Банаха имеет важные приложения в функциональном анализе, см. Банах [8], а также Куратовский [24].

ства, потому что Z не является множеством первой категории в точке z.

Таким образом, включение $G \subset Z$ установлено; из него вытекает, что точка z есть внутренняя точка множества Z, следовательно (согласно 1°), в силу однородности множества Z, оно открыто. Остается показать, что множество Z замкнуто.

Пусть $p \in \bar{Z}$ и $z \in Z$. Положим, как выше, $p = h(z)$. Так как множество Z открыто и h — автоморфизм пространства, множество $h(Z)$ также открыто. Следовательно, из включений $p \in \bar{Z}$ и $p \in h(Z)$ вытекает, что $Z \cap h(Z) \neq 0$, откуда $Z = h(Z)$. Поэтому $p \in Z$, что и требовалось доказать.

***XII. Приложения к топологическим группам.** Топологическое пространство (обозначим его через $\mathcal{G}$) называется *топологической группой*, если каждой паре точек x, y из $\mathcal{G}$ поставлена в соответствие их сумма $z = x + y$ таким образом, что:

1° $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2° существует нулевой элемент θ, такой, что $x + \theta = x = \theta + x$;

3° существует элемент $(-x)$, такой, что $x + (-x) = \theta$;

4° операции $x + y$ и $-x$ непрерывны[1]).

Положим $h_a(x) = a + x$. Очевидно, что из условия $y = h_a(x)$ следует, что $x = h_{-a}(y)$. Поэтому $h_a(x)$ (при фиксированном a) есть автоморфизм пространства, а семейство $\mathfrak{H}$ всех функций h_a удовлетворяет условиям теоремы п. XI.

Подгруппой называется каждое подмножество, которое вместе с точкой x содержит $(-x)$ и вместе с точками x и y содержит $x + y$. Легко проверить, что если множество Z — подгруппа, то выполняется условие XI (4). Следовательно, согласно предыдущему, *каждая подгруппа однородна* (в частности, каждая топологическая группа однородна). В силу теоремы п. XI, *всякая подгруппа, обладающая свойством Бэра, является либо множеством первой категории, либо множеством, одновременно замкнутым и открытым.*

XIII. Открытые отображения. Замкнутые отображения. Согласно предложениям IV (3) и (4), если отображение f непрерывно, то прообраз открытого множества открыт, а прообраз замкнутого множества замкнут. Однако, как показывают простые примеры, для образов это неверно.

Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. Непрерывное отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется *открытым*, если образ $f(G)$ каждого открытого множества $G \subset \mathcal{X}$ открыт в пространстве $\mathcal{Y}$.

[1]) См., например, Понтрягин [2] и Монтгомери и Циппин [1].

Аналогично можно определить *замкнутые* отображения, заменив термин „открытый“ термином „замкнутый“.

Например, проекция плоскости $\mathscr{E}^2$ на одну из осей есть открытое отображение, но оно не является замкнутым, так как проекция гиперболы $y = 1/x$ на ось x не замкнута.

Любое непрерывное отображение интервала $\mathscr{I}$ замкнуто (это верно, как мы увидим позже, для каждого компактного пространства).

Очевидно, что *всякое взаимно однозначное непрерывное открытое* (*или замкнутое*) *отображение является гомеоморфизмом* [1]).

Теорема 1. *Пусть* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — *открытое* (*замкнутое*) *отображение, и пусть* $B \subset \mathscr{Y}$. *Положим* $g = f \mid f^{-1}(B)$. *Тогда отображение* $g: f^{-1}(B) \to B$ *открыто* (*замкнуто*).

Доказательство. Пусть множество H открыто в $f^{-1}(B)$, т. е. $H = G \cap f^{-1}(B)$, где множество G открыто в пространстве $\mathscr{X}$. Тогда, согласно формуле § 3, III (13), имеем

$$g(H) = g\left(G \cap f^{-1}(B)\right) = f\left(G \cap f^{-1}(B)\right) = f(G) \cap B.$$

Следовательно, множество $g(H)$ открыто относительно B.

В случае, когда отображение f замкнуто, доказательство проводится аналогично.

Теорема 2. *Пусть* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — *непрерывное отображение на и* $g: \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ — *непрерывное отображение. Если* $h = gf$ — *открытое* (*замкнутое*) *отображение, то и* g — *открытое* (*замкнутое*) *отображение.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \mathscr{Y} \arrow[d, "g"] \\ & \mathscr{Z} \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть отображение h открыто, и пусть $G \subset \mathscr{Y}$ — открытое множество. Так как f — отображение на, то $G = ff^{-1}(G)$. Следовательно,

$$g(G) = gff^{-1}(G) = hf^{-1}(G).$$

Поскольку отображение f непрерывно, а отображение h открыто, множество $hf^{-1}(G)$ открыто.

Случай замкнутого отображения h рассматривается аналогично.

---

[1]) Открытые отображения называются также *внутренними*, см. Стоилов [1].

См. также Уайберн [1], [4]; Архангельский [3], Уоллес [2].

XIV. Отображения, открытые и замкнутые в данной точке.

Определение. Непрерывное отображение $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ называется *открытым в точке* $y_0\in\mathcal{Y}$, если для каждого множества G, открытого в пространстве $\mathcal{X}$,

$$(1)\qquad y_0\in f(G)\Rightarrow y_0\in \operatorname{Int}(f(G)),$$

или, эквивалентно, если для каждого множества $A\subset\mathcal{X}$

$$(2)\qquad [y_0\in f(\operatorname{Int}(A))]\Rightarrow[y_0\in \operatorname{Int}(f(A))].$$

Отображение f называется *замкнутым в точке* y_0, если для каждого множества F, замкнутого в пространстве $\mathcal{X}$,

$$(3)\qquad (y_0\in\overline{f(F)})\Rightarrow(y_0\in f(F)),$$

или, эквивалентно, если для каждого множества $A\subset\mathcal{X}$

$$(4)\qquad (y_0\in\overline{f(A)})\Rightarrow(y_0\in f(\bar{A})).$$

Очевидно, что *если отображение f открыто (замкнуто) в каждой точке y пространства $\mathcal{Y}$, то оно открыто (замкнуто)*.

Теорема 1. *Отображение f открыто в точке y_0 тогда и только тогда, когда для любого множества $B\subset\mathcal{Y}$ имеем*

$$(5)\qquad (y_0\in\bar{B})\Rightarrow\left(f^{-1}(y_0)\subset\overline{f^{-1}(B)}\right).$$

Доказательство. 1. Предположим, что отображение f открыто в точке y_0 и что включение в формуле (5) не выполняется. Положим $G=\mathcal{X}-\overline{f^{-1}(B)}$. Тогда $f^{-1}(y_0)\cap G\neq 0$, поэтому

$$y_0\in f(G)=f\left(\mathcal{X}-\overline{f^{-1}(B)}\right)\subset ff^{-1}(\mathcal{Y}-B)\subset\mathcal{Y}-B.$$

С другой стороны, так как $y_0\in f(G)$, то мы имеем, согласно (1),

$$y_0\in\operatorname{Int}(f(G))\subset\operatorname{Int}(\mathcal{Y}-B)=\mathcal{Y}-\bar{B},$$

т. е. $y_0\notin\bar{B}$. Таким образом, условие (5) является необходимым.

2. Предположим теперь, что G — открытое множество и точка y_0 не принадлежит $\operatorname{Int}(f(G))$, т. е. $y_0\in\overline{\mathcal{Y}-f(G)}$. Предположим далее, что условие (5) выполнено для множества $B=\mathcal{Y}-f(G)$. По предположению $y_0\in\bar{B}$. Следовательно,

$$f^{-1}(y_0)\subset\overline{f^{-1}(B)}=\overline{f^{-1}(\mathcal{Y})-f^{-1}f(G)}\subset\overline{\mathcal{X}-G}=\mathcal{X}-G,$$

так как $f^{-1}f(G)\supset G$. Итак, $f^{-1}(y_0)\cap G=0$, и окончательно получаем, что точка y_0 не принадлежит множеству $f(G)$.

Отсюда следует, что условие (5) является достаточным.

Следствие [1]). *Отображение f открыто тогда и только тогда, когда для каждого множества $B \subset \mathscr{Y}$ имеет место включение*

$$f^{-1}(\bar{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}, \tag{6}$$

или, эквивалентно (см. IV (2)), *когда*

$$f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}. \tag{7}$$

Очевидно, что *отображение f замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого множества $A \subset \mathscr{X}$ имеет место включение*

$$\overline{f(A)} \subset f(\bar{A}), \tag{8}$$

или, эквивалентно (см. IV (1)), *когда*

$$\overline{f(A)} = f(\bar{A}). \tag{9}$$

Теорема 3. *Отображение f замкнуто в точке y_0 тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества $G \subset \mathscr{X}$, такого, что $f^{-1}(y_0) \subset G$, существует открытое множество $H \subset \mathscr{Y}$, такое, что*

$$y_0 \in H, \tag{10}$$

$$f^{-1}(H) \subset G. \tag{11}$$

Доказательство. 1. Предположим, что отображение f замкнуто в точке y_0, множество G открыто и $f^{-1}(y_0) \subset G$. Положим $H = \mathscr{Y} - \overline{f(\mathscr{X} - G)}$. Предположим далее, что $y_0 \notin H$, т. е. $y_0 \in \overline{f(\mathscr{X} - G)}$. Тогда, согласно (3), $y_0 \in f(\mathscr{X} - G)$, но это противоречит включению $f^{-1}(y_0) \subset G$. Следовательно, включение (10) верно. Включение (11) также верно, поскольку

$$f^{-1}(H) = \mathscr{X} - f^{-1}\overline{f(\mathscr{X} - G)} \subset \mathscr{X} - f^{-1}f(\mathscr{X} - G) \subset G.$$

Итак, наше условие является необходимым.

2. Предположим теперь, что наше условие выполняется, множество F замкнуто и $y_0 \notin f(F)$. Покажем, что $y_0 \notin \overline{f(F)}$. Положим $G = \mathscr{X} - F$. Так как $y_0 \notin f(F)$, мы имеем $f^{-1}(y_0) \cap F = 0$, т. е. $f^{-1}(y_0) \subset G$. Следовательно, по предположению, существует открытое множество $H \subset \mathscr{Y}$, удовлетворяющее включениям (10) и (11). Согласно включению (11), $f^{-1}(H) \cap F = 0$, следовательно, $H \cap f(F) = 0$. Отсюда следует, что $H \cap \overline{f(F)} = 0$ (так как множе-

[1]) См. Сикорский [5], стр. 13, Уоллес [2].

ство H открыто), поэтому, в силу включения (10), $y_0 \notin \overline{f(F)}$. Это означает, что наше условие является достаточным.

Замечание 1. Если $y_0 \in \mathcal{Y} - \overline{f(\mathcal{X})}$, то отображение f открыто в точке y_0; если $y_0 \in \mathcal{Y} - \overline{f(\mathcal{X})}$, то отображение f замкнуто в точке y_0. Это непосредственно следует из соотношений (1) и (3).

Замечание 2. Область изменения множества G в (1) может быть ограничена до открытой базы пространства $\mathcal{X}$.

Это следует из § 3, III (1a), и § 6, II (1′).

Замечание 3. Определение, данное в этом разделе, можно обобщить следующим образом:

отображение f открыто в множестве $B \subset \mathcal{Y}$, если для каждого G, открытого в $\mathcal{X}$,

$$(12)\qquad [B \cap \operatorname{Int}(f(G)) = 0] \Rightarrow [B \cap f(G) = 0];$$

отображение f замкнуто в множестве $B \subset \mathcal{Y}$, если для каждого F, замкнутого в $\mathcal{X}$,

$$(13)\qquad [B \cap f(F) = 0] \Rightarrow [B \cap \overline{f(F)} = 0].$$

Без ограничения общности можно считать, что в (12) $B \subset f(\mathcal{X})$, а в (13) $B \subset \overline{f(\mathcal{X})}$.

XV. Взаимно непрерывные отображения. Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на. Если множество $G \subset \mathcal{Y}$ открыто, то множество $f^{-1}(G)$ также открыто. Обратное утверждение в общем случае неверно. Это приводит к следующему определению.

Определение. Отображение f называется *взаимно непрерывным*[1]), если оно есть отображение на и если

(1) (A — открытое множество) $\equiv$ ($f^{-1}(A)$ — открытое множество), или эквивалентно, если

(2) (A — замкнутое множество) $\equiv$ ($f^{-1}(A)$ — замкнутое множество).

Теорема 1. *Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — открытое или замкнутое отображение на. Тогда отображение f взаимно непрерывно.*

Доказательство. Пусть отображение f и множество $f^{-1}(A)$ открыты. Так как f — отображение на, мы имеем $A = ff^{-1}(A)$; поскольку отображение f открыто, множество $ff^{-1}(A)$ открыто.

Случай замкнутого отображения рассматривается аналогично.

---

[1]) Его называют также *квазикомпактным* (и непрерывным), см. Уайберн [4], стр. 69, или *сильно непрерывным*, см. Александров, Хопф [1], § 5, 4.

Теорема 2. *Если отображение f взаимно непрерывно и взаимно однозначно, то оно является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть множество $G \subset \mathfrak{X}$ открыто. Так как отображение f взаимно однозначно, то $G = f^{-1}f(G)$. Следовательно, множество $f(G)$ открыто. Итак, отображение f открыто; отсюда следует, что f — гомеоморфизм.

Теорема 3. *Пусть отображение $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ взаимно непрерывно, и пусть задано некоторое отображение $g: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$. Если отображение $h = gf$ непрерывно, то и g непрерывно. Если h взаимно непрерывно, то и g взаимно непрерывно.*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \mathfrak{Y} \arrow[d, "g"] \\ & \mathfrak{Z} \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть множество $G \subset \mathfrak{Z}$ открыто. Тогда множество $h^{-1}(G)$ открыто. Но $h^{-1}(G) = f^{-1}[g^{-1}(G)]$. Так как отображение f взаимно непрерывно, то множество $g^{-1}(G)$ открыто.

Предположим далее, что отображение h взаимно непрерывно и множество $g^{-1}(A)$ открыто. Тогда множество $f^{-1}[g^{-1}(A)]$ открыто. Но $f^{-1}[g^{-1}(A)] = h^{-1}(A)$. Следовательно, поскольку отображение h взаимно непрерывно, множество A открыто.

Замечания. Существуют взаимно непрерывные отображения, которые не являются ни открытыми, ни замкнутыми. Это следует из существования замкнутых неоткрытых отображений и открытых незамкнутых отображений.

С другой стороны, любое отображение дискретного пространства в недискретное пространство является непрерывным, но не является взаимно непрерывным.

Понятие взаимной непрерывности играет большую роль при изучении фактортопологии (см. § 19).

§ 14. Вполне регулярные пространства. Нормальные пространства

I. Вполне регулярные пространства. Топологическое пространство $\mathfrak{X}$ называется *вполне регулярным*, если для всякой точки p и всякого не содержащего ее замкнутого множества F пространства $\mathfrak{X}$ существует непрерывное отображение $f: \mathfrak{X} \to \mathcal{J}$, такое, что

$$(1) \qquad f(p) = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in F \text{[1]}.$$

Вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство называется также *пространством Тихонова*.

---

[1]) См. Тихонов [2], стр. 545. Ср. Урысон [1], стр. 292.

Теорема 1. *Каждое вполне регулярное пространство регулярно.*

Доказательство. Пусть точка p, множество F и отображение f такие же, как выше. Положим $G = \mathop{\mathsf{E}}\limits_x \left[f(x) < \frac{1}{2} \right]$. Тогда множество G открыто, $p \in G$ и $\overline{G} \cap F = 0$.

Теорема 2. *Любое подмножество вполне регулярного пространства вполне регулярно.*

Доказательство очевидно.

Теорема 3. *Область изменения множества F в определении вполне регулярного пространства может быть ограничена любой замкнутой подбазой пространства $\mathscr{X}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала конечную систему $F_1, \ldots, F_n$ замкнутых множеств, точку $p \in \mathscr{X} - F_0$, где $F_0 = F_1 \cup \ldots \cup F_n$, и систему непрерывных функций $f_1, \ldots, f_n$, удовлетворяющих условиям (1). Положим

$$f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x). \tag{2}$$

Очевидно, что функция f удовлетворяет условиям (1) для множества F_0. Более того, отображение f непрерывно. Это следует (ср. § 13, VI, 2) из тождества

$$\mathop{\mathsf{E}}\limits_x [u < f(x) < v] = \bigcup_{i=1}^{n} \mathop{\mathsf{E}}\limits_x [u < f_i(x)] \cap \bigcap_{j=1}^{n} \mathop{\mathsf{E}}\limits_x [f_j(x) < v],$$

согласно которому множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_x [u < f(x) < v]$ открыто для любой пары действительных чисел $u < v$.

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое множество F, не содержащее точку p. Покажем, что существует непрерывное отображение f, удовлетворяющее условию (1).

Пусть $\boldsymbol{B}$ — замкнутая база пространства $\mathscr{X}$. Тогда существует система $F_1, \ldots, F_n$ элементов базы $\boldsymbol{B}$, такая, что $p \in \mathscr{X} - F_0$ и $F \subset F_0$, где $F_0 = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. Очевидно, что функция f, определяемая формулой (2), удовлетворяет условию (1).

Замечание 1. Каждая топологическая группа вполне регулярна[1]).

Замечание 2. Регулярное пространство может не быть вполне регулярным. Более того, существуют регулярные $\mathcal{T}_1$-пространства, на которых каждая действительная непрерывная функция есть константа[2]).

[1]) Это теорема Понтрягина. Ср. Монтгомери и Циппин [1], стр. 29.
[2]) См. Хьюит [1], стр. 503, и Новак [1], стр. 58.

II. Нормальные пространства.

Определение [1]). Топологическое пространство называется *нормальным*, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_0 и F_1 существуют два открытых множества G_0 и G_1, таких, что

$$F_0 \subset G_0, \quad F_1 \subset G_1 \quad \text{и} \quad G_0 \cap G_1 = 0, \tag{3}$$

или, эквивалентно, если для любых двух открытых множеств G_0 и G_1, таких, что $\mathscr{X} = G_0 \cup G_1$, существуют два замкнутых множества F_0 и F_1, таких, что

$$F_0 \subset G_0, \quad F_1 \subset G_1 \quad \text{и} \quad F_0 \cup F_1 = \mathscr{X}. \tag{4}$$

Можно считать, что в условии (4) множества F_0 и F_1 имеют вид

$$F_0 = \overline{H}_0 \quad \text{и} \quad F_1 = \overline{H}_1, \tag{5}$$

где множества H_0 и H_1 открыты. В самом деле, пусть $\mathscr{X}$ — нормальное пространство. Предположим, что условие (4) выполнено. Тогда существуют два открытых множества H_0 и K_0, таких, что

$$F_0 \subset H_0, \quad \mathscr{X} - G_0 \subset K_0 \quad \text{и} \quad H_0 \cap K_0 = 0.$$

Следовательно, $H_0 \subset \mathscr{X} - K_0$, откуда $\overline{H}_0 \subset \mathscr{X} - K_0 \subset G_0$. Аналогичным образом, существует открытое множество H_1, такое, что $F_1 \subset H_1$ и $\overline{H}_1 \subset G_1$.

Подобное же рассуждение показывает, что в условии (3) тождество $G_0 \cap G_1 = 0$ можно заменить тождеством

$$\overline{G}_0 \cap \overline{G}_1 = 0. \tag{6}$$

Наконец, заметим, что (3) можно заменить следующим условием (аналогичным условию (2) из § 5, X): существует открытое множество G, такое, что

$$F_0 \subset G \quad \text{и} \quad \overline{G} \cap F_1 = 0. \tag{7}$$

Замечание. Любое нормальное пространство вполне регулярно. Это следует непосредственно из леммы Урысона, которая будет доказана в п. IV.

С другой стороны, существуют вполне регулярные пространства, которые не являются нормальными. (См. ван Ист и Фрейденталь [1], стр. 365. См. также пример Немыцкого, указанный в работе Александрова и Хопфа [1], стр. 31.)

---

[1]) Ср. Титце [2], стр. 301.

Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Регулярное пространство Линделёфа* (см. § 5, VII) *нормально*[1]).

Доказательство. Пусть $A=\bar{A}$, $B=\bar{B}$ и $A\cap B=0$. Определим два открытых множества G и H, таких, что $A\subset G$, $B\subset H$ и $G\cap H=0$.

В силу регулярности пространства, для каждой точки $a\in A$ существует открытое множество G_a, такое, что $a\in G_a$ и $\bar{G}_a\cap B=0$. Семейство, составленное из множеств G_a $(a\in A)$ и множества $-A$, является покрытием. Это покрытие содержит счетное подпокрытие $-A$, G_{a_1}, G_{a_2}, ... Следовательно, $A\subset G_{a_1}\cup G_{a_2}\cup\ldots$.

Аналогичным образом $B\subset H_{b_1}\cup H_{b_2}\cup\ldots$, где множества H_{b_n} открыты и $\bar{H}_{b_n}\cap A=0$.

Положим $U_1=G_{a_1}$, $V_1=H_{b_1}-\bar{U}_1$, для $n>1$

$$U_n=G_{a_n}-(\bar{V}_1\cup\ldots\cup\bar{V}_{n-1}),\qquad V_n=H_{b_n}-(\bar{U}_1\cup\ldots\cup\bar{U}_n),$$

и

$$G=U_1\cup U_2\cup\ldots,\qquad H=V_1\cup V_2\cup\ldots.$$

Так как $A\cap\bar{V}_n\subset A\cap\bar{H}_{b_n}=0$, мы имеем $A\subset G$. Аналогично $B\subset H$. Наконец, $G\cap H=0$, т. е. $U_n\cap V_m=0$. Действительно, если $m\leqslant n-1$, то мы имеем (по определению U_n) $U_n\cap\bar{V}_m=0$, а если $n\leqslant m$, то $\bar{U}_n\cap V_m=0$.

Следствие 1a. *Регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство со счетной базой нормально.*

В самом деле, по теореме § 5, п. XI, любое топологическое пространство со счетной базой есть пространство Линделёфа.

Теорема 2. *Свойство пространства быть нормальным есть инвариант относительно замкнутых отображений на.*

Пусть $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ — замкнутое отображение на. Пусть $\mathcal{Y}\supset G_j$, $j=0, 1$, где G_j — открытые множества, и $\mathcal{Y}=G_0\cup G_1$. Тогда множество $f^{-1}(G_j)$ открыто и

$$\mathcal{X}=f^{-1}(G_0)\cup f^{-1}(G_1).$$

Так как $\mathcal{X}$ — нормальное пространство, то существуют два замкнутых множества F_0 и F_1, таких, что (ср. (4))

$$F_0\subset f^{-1}(G_0),\quad F_1\subset f^{-1}(G_1)\quad\text{и}\quad F_0\cup F_1=\mathcal{X}.$$

[1]) Теорема Тихонова. См. Тихонов [1].

Отсюда следует, что

$$f(F_0)\subset G_0, \quad f(F_1)\subset G_1 \quad \text{и} \quad f(F_0)\cup f(F_1)=\mathcal{Y}.$$

Так как, по предположению, отображение f замкнуто, то множества $f(F_j)$ замкнуты и, следовательно, пространство $\mathcal{Y}$ нормально.

Замечание. Это свойство не инвариантно относительно *открытых* отображений (см. § 17).

Покажем, что в определении нормальных пространств *непересекающиеся замкнутые множества* можно заменить *отделимыми F_σ-множествами.*

Теорема 3[1]). *Пусть пространство $\mathcal{X}$ нормально, и пусть A и B — отделимые F_σ-множества. Тогда существуют два открытых множества G и H, таких, что*

$$(8) \qquad A\subset G, \quad B\subset H \quad \text{и} \quad G\cap H=0.$$

Доказательство. Положим $A=A_1\cup A_2\cup\ldots$ и $B=B_1\cup \cup B_2\cup\ldots$, где A_i и B_j замкнуты. Определим две последовательности открытых множеств $G_1, G_2, \ldots$ и $H_1, H_2, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$(9) \qquad A_i\subset G_i, \quad B_j\subset H_j, \quad \overline{G}_i\cap\overline{H}_j=0 \quad \text{для} \quad i, j=1, 2, \ldots,$$

и положим $G=G_1\cup G_2\cup\ldots$ и $H=H_1\cup H_2\cup\ldots$. Таким образом, условия (8) выполнены.

Продолжим по индукции. Так как $A_1\cap\overline{B}=0=B_1\cap\overline{A}$, существуют открытые множества (ср. (6)) P_1, Q_1, U_1 и V_1, такие, что

$$A_1\subset P_1, \quad \overline{B}\subset Q_1, \quad B_1\subset U_1, \quad \overline{A}\subset V_1,$$
$$\overline{P}_1\cap\overline{Q}_1=0=\overline{U}_1\cap\overline{V}_1.$$

Положим $G_1=P_1\cap V_1$ и $H_1=U_1\cap Q_1$. Очевидно, что условия (9) выполняются для $i=1=j$. Кроме того,

$$(10) \qquad \overline{G}_1\cap\overline{B}=0=\overline{H}_1\cap\overline{A}.$$

Предположим теперь, что условия (9) и (10) выполняются для индексов, не превосходящих n. Как и в случае $n=1$, существуют открытые множества P_{n+1}, Q_{n+1}, U_{n+1} и V_{n+1}, такие, что

$$A_{n+1}\subset P_{n+1}, \quad \overline{H}_1\cup\ldots\cup\overline{H}_n\cup\overline{B}\subset Q_{n+1}, \quad \overline{P}_{n+1}\cap\overline{Q}_{n+1}=0,$$
$$B_{n+1}\subset U_{n+1}, \quad \overline{G}_1\cup\ldots\cup\overline{G}_n\cup\overline{A}\subset V_{n+1}, \quad \overline{U}_{n+1}\cap\overline{V}_{n+1}=0.$$

Положим

$$G_{n+1}=P_{n+1}\cap V_{n+1} \quad \text{и} \quad H_{n+1}=U_{n+1}\cap Q_{n+1}.$$

[1]) См. Чех [4], стр. 107.

Легко проверить, что условия (9) и (10) выполняются для $i, j \leqslant n+1$. Это завершает доказательство.

III. Системы множеств, подобные в комбинаторном смысле, в нормальных пространствах. Две конечные системы множеств $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ называются *подобными в комбинаторном смысле* (см. Александров, *Ann. Math.*, **30** (1929), стр. 16), если имеет место тождество

$$(1) \qquad \{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} = 0\} \equiv \{B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k} = 0\},$$

какова бы ни была система индексов ($\leqslant n$).

Это же определение применимо к *бесконечным* последовательностям множеств, удовлетворяющим условию (1) для *каждого* k.

Теорема[1]). *Пусть в нормальном пространстве задана конечная система замкнутых множеств $F_1, \ldots, F_n$. Тогда каждое множество $F_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ содержится в некотором открытом множестве G_i, причем система множеств $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n$ подобна данной системе в комбинаторном смысле.*

В самом деле, рассмотрим все пересечения вида $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}$, где $F_1 \cap F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} = 0$. Пусть S — их объединение. Так как множество S замкнуто и не пересекается с F_1, то существует открытое множество G_1, такое, что $F_1 \subset G_1$ и $\overline{G}_1 \cap S = 0$. Покажем, что система $\overline{G}_1, F_2, \ldots, F_n$ подобна системе $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Для этого рассмотрим пустое пересечение, члены которого принадлежат второй системе; покажем, что пересечение соответствующих им множеств первой системы тоже пусто. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда среди этих множеств находится F_1. Тогда рассматриваемое пересечение имеет вид $F_1 \cap F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} = 0$. Отсюда следует, что $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} \subset S$, и так как $\overline{G}_1 \cap S = 0$, то и $\overline{G}_1 \cap F_{i_1} \cap \ldots$ $\ldots \cap F_{i_k} = 0$.

Далее применим индукцию. Предположим, что система $F_1, \ldots, F_n$ подобна системе $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{k-1}, F_k, \ldots, F_n$, где $F_1 \subset G_1, \ldots$ $\ldots, F_{k-1} \subset G_{k-1}$. Тогда существует, как мы только что показали, открытое множество G_k, такое, что $F_k \subset G_k$ и что система

$$\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \ldots, F_n$$

подобна системе

$$\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{k-1}, \overline{G}_k, F_{k+1}, \ldots, F_n.$$

[1]) См. Гуревич [3]. Эта теорема представляет собой обобщение определения II (3). Что касается обобщения на случай бесконечной последовательности множеств, см. Куратовский [27], стр. 259; см. также Морита [2], стр. 22, и Катетов [2], стр. 336.

Эта последняя система подобна системе $F_1, \ldots, F_n$, поскольку отношение подобия транзитивно.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Следствие. *Если задана система открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$, такая, что $\mathscr{X} = G_1 \cup \ldots \cup G_n$, то существует система открытых множеств $H_1, \ldots, H_n$, такая, что $\mathscr{X} = H_1 \cup \ldots \ldots \cup H_n$ и $\bar{H}_i \subset G_i$.*

Применяя предыдущую теорему к множествам $F_i = \mathscr{X} - G_i$, докажем существование открытых множеств V_i, таких, что $F_i \subset V_i$ и $\bar{V}_1 \cap \ldots \cap \bar{V}_n = 0$. Положим $H_i = \mathscr{X} - \bar{V}_i$. Тогда

$$\bar{H}_i = \overline{\mathscr{X} - \bar{V}_i} \subset \overline{\mathscr{X} - V_i} = \mathscr{X} - V_i \subset \mathscr{X} - F_i \subset G_i$$

и

$$H_1 \cup \ldots \cup H_n = \mathscr{X} - (\bar{V}_1 \cap \ldots \cap \bar{V}_n) = \mathscr{X}.$$

Замечание. В *метрических* пространствах предыдущее утверждение можно распространить на семейства открытых множеств *произвольной* мощности (см. § 21, XII).

IV. Действительные функции, определенные на нормальных пространствах. Следующее свойство нормальных пространств (лемма Урысона) является усилением свойства I (1) вполне регулярных пространств. Как легко видеть, это — характеристическое свойство нормальных пространств.

Лемма Урысона[1]). *Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в нормальном пространстве $\mathscr{X}$. Тогда существует непрерывная функция $f: \mathscr{X} \to \mathscr{J}$, такая, что*

(1) $f(x) = 0$ *для* $x \in A$ *и* $f(x) = 1$ *для* $x \in B$.

Доказательство. Сначала поставим в соответствие каждой дроби вида $r = k/2^n$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$ открытое множество $G(r)$, такое, что

1° $A \subset G(0)$, $\mathscr{X} - B = G(1)$;

2° если $r < r'$, то $\overline{G(r)} \subset G(r')$.

Построение будем вести при помощи индукции по показателю n.

При $n = 0$ такое построение можно осуществить в силу условия II (7). Допустим, что система открытых множеств, удовлетворяющая условиям 1°, 2°, построена для $n - 1$. Мы должны определить множество $G(k/2^n)$ для нечетного k. По предположению индукции,

$$\overline{G[(k-1)/2^n]} \subset G[(k+1)/2^n].$$

[1]) Урысон [1], стр. 290.

Следовательно, в силу условия II (7), существует открытое множество, которое мы обозначим через $G(k/2^n)$, такое, что

$$\overline{G[(k-1)/2^n]} \subset G(k/2^n) \quad \text{и} \quad \overline{G(k/2^n)} \subset G[(k+1)/2^n].$$

Таким образом, открытое множество $G(r)$ определено для каждого r.

Положим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in G(0), \\ \sup\limits_{\mathop{\mathrm{E}}\limits_{r}[x \in \mathcal{X} - G(r)]} r, & x \notin G(0). \end{cases}$$

Согласно 1°, имеем $f(x)=0$ для $x \in A$ и $f(x)=1$ для $x \in B$.

Остается показать, что функция f непрерывна, т. е. (§ 13, VI, 1) что всякой точке x_0 и каждому натуральному числу n соответствует открытое множество H, содержащее точку x_0, такое, что из условия $x \in H$ следует неравенство $|f(x_0) - f(x)| < 1/2^n$.

Пусть r — (конечная двоичная) дробь, такая, что

$$(2) \qquad f(x_0) < r < f(x_0) + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Положим $H = G(r) - \overline{G(r-1/2^n)}$, считая, что $G(s)=0$ при $s<0$ и $G(s)=\mathcal{X}$ при $s>1$. Тогда прежде всего имеем $x_0 \in H$, так как из неравенства $f(x_0)<r$ следует, что $x_0 \in G(r)$, а из неравенства $r-1/2^{n+1} < f(x_0)$ следует, что

$$x_0 \in \mathcal{X} - G\left(r - 1/2^{n+1}\right) \subset \mathcal{X} - \overline{G\left(r-1/2^n\right)}.$$

Кроме того, из предположения $x \in H$ следует, что $x \in G(r)$, откуда $f(x) \leqslant r$; отсюда, кроме того, следует, что

$$x \in \mathcal{X} - \overline{G(r-1/2^n)} \subset \mathcal{X} - G(r-1/2^n),$$

поэтому $r - 1/2^n \leqslant f(x)$. Итак,

$$f(x_0) - \frac{1}{2^n} < f(x) < f(x_0) + \frac{1}{2^n}.$$

Лемма Урысона является частным случаем фундаментальной теоремы Титце, которая будет сформулирована ниже. В основе доказательства теоремы Титце лежит следующая

Вспомогательная теорема. *Пусть f — непрерывная функция, определенная в замкнутом подмножестве F нормального пространства $\mathcal{X}$ и удовлетворяющая условию $|f(x)| \leqslant c$, где $c>0$. Тогда существует непрерывная функция g, определенная на всем пространстве $\mathcal{X}$ и удовлетво-*

ряющая следующим условиям:

$$(3) \qquad |g(x)| \leqslant \frac{1}{3}c \quad \text{для} \quad x \in \mathscr{X},$$

$$(4) \qquad |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}c \quad \text{для} \quad x \in F.$$

Доказательство. Пусть

$$(5) \qquad A = \mathop{\mathsf{E}}_x \left[f(x) \leqslant -\frac{1}{3}c \right], \qquad B = \mathop{\mathsf{E}}_x \left[f(x) \geqslant \frac{1}{3}c \right],$$

$$J = \mathop{\mathsf{E}}_y \left[|y| \leqslant \frac{1}{3}c \right].$$

Множества A и B замкнуты и не пересекаются (ср. § 13, VI), поэтому, согласно лемме Урысона, существует непрерывное отображение $g: \mathscr{X} \to J$, такое, что $g(x) = -\frac{1}{3}c$ для $x \in A$ и $g(x) = \frac{1}{3}c$ для $x \in B$. Очевидно, что отображение g удовлетворяет условиям леммы.

Теорема продолжения Титце[1]). *Пусть f — непрерывная действительная функция, определенная на замкнутом подмножестве F нормального пространства $\mathscr{X}$. Тогда существует непрерывная действительная функция f^*, определенная на всем пространстве $\mathscr{X}$, такая, что*

$$(6) \qquad f^*(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in F.$$

Более того, *если функция f ограничена*

$$(7) \qquad |f(x)| \leqslant c, \quad \text{где} \quad c > 0,$$

то

$$(8) \qquad |f^*(x)| \leqslant c \quad \text{для} \quad x \in \mathscr{X}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функция f ограничена, т. е. когда выполняется неравенство (7). Положим

$$(9) \qquad f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x),$$

---

[1]) См. Титце [1]. По поводу доказательства см. Урысон [1], стр. 293. О различных обобщениях теоремы Титце см. Дугундьи [1], Ханнер [1], Даукер [2].

См. также Борсук [3], где продолжение функции f определяется так, что „операция продолжения" линейна по отношению к данным функциям.

где функции g_n определяются по индукции следующим образом.

Положим $g_0(x)\equiv 0$. Пусть $n \geqslant 0$. Допустим, что

$$(10) \qquad \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n c \quad \text{для} \quad x \in F$$

(это верно при $n=0$, согласно (7)).

Подставим в формулировку вспомогательной теоремы $f(x) - \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$ вместо $f(x)$ и $(2/3)^n c$ вместо c. Тогда получим, что существует непрерывная функция g_{n+1}, определенная на пространстве $\mathscr{X}$, такая, что

$$(11) \qquad |g_{n+1}(x)| \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} c \quad \text{для} \quad x \in \mathscr{X},$$

$$(12) \qquad \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n+1} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} c \quad \text{для} \quad x \in F.$$

Таким образом определяется последовательность функций $g_1, g_2, \ldots$, причем формулы (10) — (12) выполняются для каждого $n = 0, 1, \ldots$.

Так как функции g_n непрерывны и ряд (9) равномерно сходится в пространстве $\mathscr{X}$ (согласно (11)), то функция f^* непрерывна на $\mathscr{X}$ (по теореме 3, § 13, VI).

Формула (6) следует непосредственно из неравенства (10).

Наконец, (8) следует из (11): если $x \in \mathscr{X} - F$, то

$$|f^*(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |g_{n+1}(x)| \leqslant c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = c.$$

Итак, для ограниченной функции f теорема доказана. Случай неограниченной функции f может быть сведен к предыдущему следующим образом (см. Ковальский [2], стр. 135).

Так как прямая $\mathscr{E}$ гомеоморфна открытому интервалу $I_0 = (-1, 1)$, мы можем предположить, что $f: F \to I_0$. Тогда, как показано, существует непрерывное продолжение $f^*: \mathscr{X} \to \overline{I}_0$ отображения f. Обозначим через B двухэлементное множество $\{-1, 1\}$, и пусть $H = f^{*-1}(B)$. Множество H замкнуто, и $H \cap F = 0$. По лемме Урысона, существует непрерывное отображение $h: \mathscr{X} \to \mathscr{J}$, такое, что $h(x) = 0$ для $x \in H$ и $h(x) = 1$ для $x \in F$. Положим $g(x) = f^*(x)\, h(x)$. Тогда $g: \mathscr{X} \to I_0$, и g есть требуемое непрерывное продолжение отображения f.

V. Наследственно нормальные пространства.

Определение. Пространство называется *наследственно* (или *вполне*) *нормальным*, если каждое из его подмножеств нормально, или, эквивалентно, если каждое его открытое подмножество нормально (как легко показать, используя условие II (4)).

Замечание 1. Нормальное пространство может не быть наследственно нормальным. Таково пространство [1], определенное следующим образом. Пусть $\mathscr{X} = \underset{\alpha}{\mathsf{E}}\,(\alpha \leqslant \Omega)$ и $\mathscr{Y} = \underset{\beta}{\mathsf{E}}\,(\beta \leqslant \omega)$ — пространства с естественной топологией (порядка). Искомое пространство есть прямое произведение (см. § 15, I) $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Пусть $A = (\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - (\Omega, \omega)$. Тогда $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ — нормальное пространство, в то время как множество A не является нормальным, поскольку множества $\Omega \times \mathscr{Y}$ и $\mathscr{X} \times \omega$ с удаленной точкой (Ω, ω) не имеют непересекающихся окрестностей.

Заметим, что *каждое метрическое пространство наследственно нормально* (см. § 21).

Замечание 2. *Всякое F_σ-множество нормального пространства нормально.* Это следует из теоремы 3, п. II (поскольку всякие два непересекающиеся множества, замкнутые относительно множества типа F_σ, являются отделимыми F_σ-множествами).

В нижеследующих теоремах 1—4 пространство 1 предполагается наследственно нормальным [2].

Формула II (7), имеющая место для произвольных нормальных пространств, может быть уточнена для наследственно нормальных пространств следующим образом.

Теорема 1 [3]. *Если множества A и B отделимы, то существует открытое множество G, такое, что*

$$(1) \qquad A \subset G \quad \text{и} \quad \bar{G} \cap B = 0.$$

Следовательно (ср. § 6, V, теорема 6), $\mathrm{Fr}(G)$ *отделяет множество A от B.*

Доказательство. Пусть $E = 1 - (\bar{A} \cap \bar{B})$. Тогда множества $\bar{A} - \bar{B}$ и $\bar{B} - \bar{A}$ не пересекаются и замкнуты в E. Так как пространство наследственно нормально, то существует множество G, открытое в E (а следовательно, и в 1), такое, что

$$\bar{A} - \bar{B} \subset G \quad \text{и} \quad \bar{G} \cap E \cap (\bar{B} - \bar{A}) = 0.$$

По условию, $A \cap \bar{B} = 0$, следовательно, $A \subset \bar{A} - \bar{B} \subset G$. Так как $B \cap \bar{A} = 0$, то $\bar{G} \cap B \subset \bar{G} \cap \bar{B} - \bar{A} \subset \bar{G} \cap E \cap (\bar{B} - \bar{A}) = 0$. Это завершает доказательство.

---

[1]) Оно называется иногда тихоновской балкой. См. Келли [1], стр. 132, где дается детальное доказательство.

[2]) В случае метрических пространств доказательства, приведенные в этом пункте, могут быть существенно упрощены. См. § 21.

[3]) См. Титце [2], стр. 301; Александров и Урысон [2]; Урысон [1].

Теорема 2. *Для каждой пары замкнутых множеств A, B существует пара замкнутых множеств A^*, B^*, такая, что*

$$(2)\qquad A^* \cup B^* = 1, \quad A^* \cap (A \cup B) = A, \quad B^* \cap (A \cup B) = B.$$

Доказательство. По теореме 2, § 6, V, множества $A - B$ и $B - A$ отделимы. Следовательно, в силу теоремы 1, существует открытое множество G, такое, что

$$(3)\qquad A - B \subset G \quad \text{и} \quad \overline{G} \cap (B - A) = 0.$$

Положим

$$(4)\qquad A^* = \overline{G} \cup (A \cap B) \quad \text{и} \quad B^* = (-G) \cup (A \cap B).$$

Отсюда следует, что $A^* \cup B^* \supset \overline{G} \cup (-G) = 1$. Далее, $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$. Следовательно, согласно формулам (3) и (4),

$$A^* \cap (A \cup B) = [\overline{G} \cap (A - B)] \cup (A \cap B) \cup [\overline{G} \cap (B - A)] = \\ = (A - B) \cup (A \cap B) \cup 0 = A;$$

$$B^* \cap (A \cup B) = [(-G) \cap (A - B)] \cup (A \cap B) \cup [(-G) \cup (B - A)] = \\ = 0 \cup (A \cap B) \cup (B - A) = B.$$

Замечание 3. Покажем, что условие, сформулированное в теореме 2, является характеристическим для наследственно нормальных пространств.

Предположим, что в топологическом пространстве 1 выполнена теорема 2. Пусть $E \subset 1$. Мы должны показать, что множество E нормально.

Другими словами, пусть даны два непересекающихся множества M_0 и M_1, замкнутых в E, т. е.

$$(5)\qquad M_0 \cap M_1 = 0, \quad M_j = \overline{M}_j \cap E \qquad (j = 0,\ 1).$$

Мы должны построить (ср. II (4)) два множества F_0 и F_1, замкнутых в E, таких, что

$$(6)\qquad F_0 \cup F_1 = E, \qquad F_j \cap M_j = 0 \qquad (j = 0,\ 1).$$

По предположению, существуют два замкнутых множества C_0 и C_1, таких, что

$$(7)\qquad C_0 \cup C_1 = 1, \qquad C_j \cap (\overline{M}_0 \cup \overline{M}_1) = \overline{M}_j.$$

Положим $F_j = C_{1-j} \cap E$. Согласно (7), $F_0 \cup F_1 = (C_0 \cup C_1) \cap E = E$. Далее

$$F_j \cap M_j = C_{1-j} \cap M_j = C_{1-j} \cap (\overline{M}_0 \cup \overline{M}_1) \cap M_j = \overline{M}_{1-j} \cap M_j.$$

Но множества M_{1-j} и M_j отделимы, так как (см. § 6, V, теорема 5) они не пересекаются и замкнуты в E, следовательно, и в $M_0 \cup M_1$. Поэтому $\overline{M}_{1-j} \cap M_j = 0$, что завершает доказательство.

Из теоремы 1 вытекает следующее несколько более общее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $A \cap \overline{B} = 0$. *Тогда существует открытое множество* G, *такое, что*

$$A \subset G, \qquad G \cap \overline{B} = 0 \qquad и \qquad \overline{G} \cap B \subset \overline{A}.$$

Доказательство. Множества A и $B - \overline{A}$ отделимы, так как

$$A \cap \overline{B - \overline{A}} \subset A \cap \overline{B} = 0 = \overline{A} \cap (B - \overline{A}).$$

Следовательно, согласно теореме 1, существует открытое множество G_0, такое, что

$$A \subset G_0 \quad и \quad \overline{G}_0 \cap (B - \overline{A}) = 0, \quad т. е. \quad \overline{G}_0 \cap B \subset \overline{A};$$

мы полагаем $G = G_0 - \overline{B}$.

Теорема 4. *Пусть каждая пара множеств* A_i, A_j $(i \neq j)$, *принадлежащих данной системе множеств* $A_1, \ldots, A_n$, *отделима. Тогда существует система открытых множеств* $G_1, \ldots, G_n$, *такая, что*

$$(8) \qquad A_i \subset G_i \quad и \quad \overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \overline{G}_i \cap \overline{G}_j \quad для \quad i \neq j.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 2$ [1]). Положим $A = \overline{A}_1 - \overline{A}_2$ и $B = \overline{A}_2 - \overline{A}_1$. Так как множества A и B отделимы (согласно теореме 2, § 6, V), то по теореме 1 существует открытое множество G, такое, что

$$(9) \qquad \overline{A}_1 - \overline{A}_2 \subset G$$

и

$$(10) \qquad (\overline{G} \cap \overline{A}_2) \subset \overline{A}_1.$$

В силу той же самой теоремы, примененной к паре множеств $\overline{A}_2 - \overline{G}$ и $\overline{G} - \overline{A}_2$, существует открытое множество H, такое, что

$$(11) \qquad \overline{A}_2 - \overline{G} \subset H$$

и

$$(12) \qquad (\overline{H} \cap \overline{G}) \subset \overline{A}_2.$$

Теперь, так как множества A_1 и A_2 отделимы, мы имеем $A_1 = A_1 - \overline{A}_2$ и $A_2 = A_2 - \overline{A}_1$. Поэтому, согласно (9), $A_1 \subset G$ и, согласно (10) и (11),

$$A_2 = A_2 - \overline{A}_1 \subset A_2 - (\overline{G} \cap \overline{A}_2) = A_2 - \overline{G} \subset H,$$

[1]) См. Менгер [6], стр. 16.

откуда $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \subset (\bar{G} \cap \bar{H})$. Обратное включение следует из (12) и (10):

$$(\bar{H} \cap \bar{G}) \subset (\bar{G} \cap \bar{A}_2) \subset (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2).$$

Это завершает доказательство для случая $n=2$.

Далее применим индукцию. Допустим, что теорема верна для $n-1$. Тогда существует система открытых множеств $G_1, \ldots, G_{n-2}$, H, такая, что

$$A_1 \subset G_1, \ \ldots, \ A_{n-2} \subset G_{n-2}, \qquad (A_{n-1} \cup A_n) \subset H$$

и

$$\bar{A}_i \cap \bar{A}_j = \bar{G}_i \cap \bar{G}_j, \quad \bar{A}_i \cap \overline{A_{n-1} \cup A_n} = \bar{G}_i \cap \bar{H}$$
$$\text{для } j < i \leqslant n-2.$$

Как показано выше, существуют открытые множества H_1 и H_2, такие, что

$$A_{n-1} \subset H_1, \quad A_n \subset H_2, \quad \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 = \bar{A}_{n-1} \cap \bar{A}_n.$$

Далее, положим $G_{n-1} = H \cap H_1$ и $G_n = H \cap H_2$. Тогда система $G_1, \ldots, G_n$ удовлетворяет условиям (8).

Действительно, если $i \leqslant n-2$, то

$$(\bar{G}_i \cap \bar{G}_{n-1}) \subset (\bar{G}_i \cap \bar{H} \cap \bar{H}_1) = (\bar{A}_i \cap \overline{A_{n-1} \cup A_n} \cap \bar{H}_1) \subset$$
$$\subset (\bar{A}_i \cap \bar{A}_{n-1}) \cup (\bar{A}_i \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_1) = (\bar{A}_i \cap \bar{A}_{n-1}) \cup (\bar{A}_i \cap \bar{A}_{n-1} \cap \bar{A}_n) =$$
$$= (\bar{A}_i \cap \bar{A}_{n-1}) \subset (\bar{G}_i \cap \bar{G}_{n-1}),$$

следовательно, $\bar{A}_i \cap \bar{A}_{n-1} = \bar{G}_i \cap \bar{G}_{n-1}$. С другой стороны,

$$(\bar{G}_{n-1} \cap \bar{G}_n) \subset (\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2) = (\bar{A}_{n-1} \cap \bar{A}_n) \subset (\bar{G}_{n-1} \cap \bar{G}_n),$$

следовательно, $\bar{A}_{n-1} \cap \bar{A}_n = \bar{G}_{n-1} \cap \bar{G}_n$.

Замечание 4. Множества $G_1, \ldots, G_n$ *не пересекаются*, ибо, по теореме 2, § 8, IV, множество $\bar{A}_i \cap \bar{A}_j$ нигде не плотно.

Замечание 5. В метрических пространствах справедливы некоторые обобщения теоремы 4 на бесконечные системы (см. § 21, XI). К другому обобщению приводит понятие *коллективно нормальных* пространств[1]).

VI. Совершенно нормальные пространства.

Определение. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *совершенно нормальным*[2]), если для каждой пары непересекаю-

---

[1]) См. Бинг [1], стр. 176. Ср. Катетов [5], стр. 145—151.

[2]) Ср. с „F-свойством“ Урысона [1], стр. 286. См. Чех [1] и [4], стр. 110.

щихся замкнутых множеств A и B существует непрерывная функция $f: \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такая, что

$$(1) \qquad [f(x)=0] \equiv (x \in A) \quad \text{и} \quad [f(x)=1] \equiv (x \in B).$$

Легко видеть, что это условие сильнее, чем условие IV (1) в лемме Урысона. Поэтому *всякое совершенно нормальное пространство нормально.*

Более того, *всякое совершенно нормальное пространство наследственно нормально*[1]).

В самом деле, всякое открытое подмножество есть множество типа F_σ (см. теорему 2 ниже), а всякое F_σ-множество нормально (см. V, замечание 2).

С другой стороны, наследственно нормальное пространство может не быть совершенно нормальным.

Таково пространство $\mathcal{X}$, определенное следующим образом[2]): $\mathcal{X}$ — несчетное пространство, содержащее одну „сингулярную“ точку p, такую, что каждое множество, содержащее p, замкнуто. Кроме таких множеств, замкнутыми являются еще конечные множества и только они.

Легко видеть, что одноэлементное множество (p) не является множеством типа G_δ, следовательно, пространство $\mathcal{X}$ не является совершенно нормальным (в силу теоремы 2, которая будет доказана ниже).

Как мы увидим позже, *любое метрическое пространство совершенно нормально.*

Теорема 1. *Пусть A — замкнутое подмножество совершенно нормального пространства $\mathcal{X}$. Тогда существует непрерывная функция $f: \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такая, что*

$$(2) \qquad [f(x)=0] \equiv [x \in A].$$

Это непосредственно следует из определения, если положить $B=0$.

Для того чтобы установить важное свойство, характеризующее совершенно нормальные пространства, мы сначала докажем следующую лемму[3]).

Лемма. *Пусть A — замкнутое G_δ-множество в нормальном пространстве, и пусть множество B замкнуто и $A \cap B = 0$.*

Тогда существует непрерывная функция $f: \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, удовлетворяющая формуле (2) и условию

$$(3) \qquad (x \in B) \Rightarrow (f(x)=1).$$

Доказательство. Положим

$$(4) \qquad A = G_1 \cap G_2 \cap \ldots, \text{ где } G_n \text{ — открытые множества.}$$

---

[1]) Эта теорема принадлежит Урысону [1], стр. 286.

[2]) Этот пример принадлежит Е. Чеху.

[3]) По поводу этой леммы и теоремы 2 см. Веденисов [1], стр. 235; см. также Веденисов [3], где доказана теорема, обратная к теореме 1.

Мы можем предположить, что $G_n \cap B = 0$, так как в противном случае мы могли бы заменить G_n множеством $G_n - B$.

Согласно лемме Урысона (см. п. IV), для каждого n существует непрерывное отображение $f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такое, что

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \in A, \\ 1 & \text{для} \quad x \in \mathcal{X} - G_n. \end{cases}$$

Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x).$$

Так как этот ряд равномерно сходится, то функция f непрерывна (ср. § 13, VI, 3) и $f : \mathcal{X} \to \mathcal{J}$.

Условие (3) выполняется, так как для каждого n имеем $B \subset \mathcal{X} - G_n$ и, следовательно, $f_n(x) = 1$ для $x \in B$.

Так как $A \subset G_n$, то для $x \in A$ мы имеем $f_n(x) = 0$, следовательно, $f(x) = 0$.

Остается показать, что если $x \notin A$, то $f(x) \neq 0$. Пусть $x \notin A$. Тогда, согласно (4), существует индекс n, такой, что $x \notin G_n$, откуда $f_n(x) = 1$. Отсюда следует, что $f(x) > 0$.

Теорема 2 (теорема Веденисова). *Пространство $\mathcal{X}$ совершенно нормально тогда и только тогда, когда оно нормально и каждое замкнутое множество в нем является множеством типа $\boldsymbol{G}_\delta$.*

Доказательство. 1. Пусть A — замкнутое подмножество совершенно нормального пространства, и пусть f — функция, рассматриваемая в теореме 1. Положим

$$G_n = \mathop{\mathrm{E}}_x \left[f(x) < \frac{1}{n} \right].$$

Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \mathop{\mathrm{E}}_x \bigwedge_n \left[f(x) < \frac{1}{n} \right] = \mathop{\mathrm{E}}_x [f(x) = 0] = A.$$

2. Пусть $\mathcal{X}$ — нормальное пространство, такое, что каждое замкнутое его подмножество есть множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$. Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся множества. Определим непрерывное отображение $f : \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, удовлетворяющее соотношениям (1).

В силу леммы, существует непрерывная функция $g : \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такая, что

$$(x \in A) \equiv [g(x) = 0] \quad \text{и} \quad (x \in B) \Rightarrow [g(x) = 1].$$

Положим

$$G = \mathop{\mathrm{E}}_x \left[g(x) < \frac{1}{2} \right], \quad F = \mathop{\mathrm{E}}_x \left[g(x) = \frac{1}{2} \right], \quad H = \mathop{\mathrm{E}}_x \left[g(x) > \frac{1}{2} \right].$$

Тогда множества $G \cup F$ и $H \cup F$ замкнуты и $(G \cup F) \cap B = 0$. Следовательно, можно применить лемму к множествам $G \cup F$ и B (взяв интервал $(^1/_2, 1)$ вместо интервала $(0, 1)$); таким образом, существует непрерывная функция h, определенная на пространстве $\mathscr{X}$, такая, что

$$\frac{1}{2} \leqslant h(x) \leqslant 1, \quad [x \in (G \cup F)] \Rightarrow \left[h(x) = \frac{1}{2}\right],$$
$$(x \in B) \equiv [h(x) = 1].$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{для} \quad x \in (G \cup F), \\ h(x) & \text{для} \quad x \in (H \cup F). \end{cases}$$

Функция f определена и непрерывна, так как $(G \cup F) \cap (H \cup F) = F$ и для $x \in F$ мы имеем $g(x) = {}^1/_2 = h(x)$. Кроме того, $(G \cup F) \cup \cup (H \cup F) = \mathscr{X}$, следовательно, $f : \mathscr{X} \to \mathscr{J}$ (ср. § 13, V, 3).

Наконец, легко видеть, что условие (1) выполнено.

Теорема 3. *Каждое регулярное $\mathscr{T}_1$-пространство с σ-локально конечной базой* $\boldsymbol{B}$ (ср. § 5, VII) *совершенно нормально* (*и даже метризуемо*, см. § 21, XVII).

Доказательство. Пусть

(5) $\quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 \cup \boldsymbol{B}_2 \cup \ldots \quad$ и $\quad \boldsymbol{B}_n = \{G_{n,t}\}$, где $t \in T_n$,

и семейства $\boldsymbol{B}_n$ локально конечны.

Сначала докажем, что пространство $\mathscr{X}$ нормально.

Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества. Так как пространство $\mathscr{X}$ регулярно, каждой точке $x \in A$ можно сопоставить пару индексов $n(x)$ и $t(x)$, таких, что

(6) $\quad x \in G_{n(x),\, t(x)} \quad$ и $\quad B \cap \overline{G}_{n(x),\, t(x)} = 0.$

Положим

(7) $\quad M_k = \mathop{\mathsf{E}}_x (n(x) = k) \quad$ и $\quad G_k = \bigcup_{x \in M_k} G_{n(x),\, t(x)}.$

Отсюда следует, что

$$A = M_1 \cup M_2 \cup \ldots,$$

поэтому

(8) $\quad A \subset G_1 \cup G_2 \cup \ldots .$

Так как семейство $\boldsymbol{B}_k$ локально конечно, то из равенства (7) вытекает, в силу теоремы § 5, VII, что

$$\overline{G}_k = \overline{\bigcup_{x \in M_k} G_{n(x),\, t(x)}} = \bigcup_{x \in M_k} \overline{G}_{n(x),\, t(x)}.$$

Следовательно, согласно (6),

(9) $\quad B \cap \overline{G}_k = 0.$

Аналогично существует последовательность открытых множеств $H_1, H_2, \ldots$, таких, что

$$(10)\qquad B\subset H_1\cup H_2\cup\ldots \quad \text{и} \quad A\cap\overline{H}_k=0.$$

Положим

$$U=\bigcup_{k=1}^{\infty}[G_k-(\overline{H}_1\cup\ldots\cup\overline{H}_k)] \text{ и } V=\bigcup_{k=1}^{\infty}[H_k-(\overline{G}_1\cup\ldots\cup\overline{G}_k)].$$

Тогда $U\cap V=0$ и, согласно формулам (8) — (10), $A\subset U$ и $B\subset V$. Так как множества U и V открыты, это означает, что пространство нормально.

Теперь покажем, что пространство $\mathscr{X}$ совершенно нормально. В силу теоремы 2, остается показать, что каждое открытое множество A есть F_δ-множество.

Обозначим через x некоторую точку множества A и через B — множество $\mathscr{X}-A$. Тогда формулы (6) — (9) выполняются. Согласно (9), мы имеем $\overline{G}_k\subset A$, откуда, согласно (8), $A=\overline{G}_1\cup\overline{G}_2\cup\ldots$. Это завершает доказательство.

З а м е ч а н и е. Следствие 1a, п. II, утверждающее, что каждое регулярное $\mathscr{T}_1$-пространство со счетной базой нормально, является, очевидно, также и следствием теоремы 3.

§ 15. Прямое произведение $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ топологических пространств

I. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два топологических пространства; топология в множестве $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ (см. § 2, I) вводится следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Множество $A\subset\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ называется *открытым* в пространстве $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ тогда и только тогда, когда оно является объединением прямых произведений $G\times H$, где G и H — открытые множества соответственно в пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$.

Другими словами, семейство всех таких множеств $G\times H$ есть база пространства $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$.

Согласно § 2, II (2), $(G_1\times H_1)\cap(G_2\times H_2)=(G_1\cap G_2)\times(H_1\cap H_2)$. Поэтому если G_1, G_2, H_1 и H_2 — открытые множества (соответственно в пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$), то и пересечение $(G_1\times H_1)\cap\cap(G_2\times H_2)$ открыто (в пространстве $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$). Следовательно, пересечение любых двух открытых множеств в пространстве $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ открыто.

Так как объединение произвольного семейства открытых множеств в пространстве $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ открыто, мы приходим к следующей теореме (см. § 5, II, замечание 2).

Т е о р е м а 1. *Прямое произведение двух топологических пространств есть топологическое пространство.*

Так как $(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - (x_0, y_0) = ((\mathscr{X} - x_0) \times \mathscr{Y}) \cup (\mathscr{X} \times (\mathscr{Y} - y_0))$ (согласно § 2, II (6)), то справедлива

Теорема 2. *Прямое произведение двух $\mathscr{T}_1$-пространств есть $\mathscr{T}_1$-пространство.*

Эта теорема следует также из теоремы 5, приведенной ниже.

Пример. В плоскости $\mathscr{E}^2$ естественная топология согласуется с введенной выше. Действительно, каждое открытое множество в плоскости $\mathscr{E}^2$ может быть представлено как объединение квадратов со сторонами, параллельными осям $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$.

Легко показать, что справедлива (ср. § 2, II (8))

Теорема 3. *Если $\{B_\iota\}$ — база пространства $\mathscr{X}$, а $\{C_\varkappa\}$ — база пространства $\mathscr{Y}$, то $\{B_\iota \times C_\varkappa\}$ — база пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.*

То же самое утверждение остается верным для подбаз.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — топологические пространства. Семейство множеств $G \times \mathscr{Y}$ и семейство множеств $H \times \mathscr{X}$, где множество G открыто в пространстве $\mathscr{X}$, а H — в пространстве $\mathscr{Y}$, есть подбаза пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.*

Действительно, $G \times H = (G \times \mathscr{Y}) \cap (\mathscr{X} \times H)$.

Имеет место также (см. § 5, XI, замечание 4)

Теорема 5. *Множества $F \times \mathscr{Y}$, так же как и множества $\mathscr{X} \times K$, где F замкнуто в пространстве $\mathscr{X}$, а K — в пространстве $\mathscr{Y}$, замкнуты, и семейство этих множеств является замкнутой подбазой пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.*

Замечание. Напомним (см. § 2, VII), что отношение определяет подмножество пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, а именно множество $\underset{x,\, y}{\mathrm{E}}\, x\rho y$. Отношение называется *замкнутым*, если это множество замкнуто (в $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$).

II. Проекции и непрерывные отображения. Пусть дана точка $z = (x, y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Рассмотрим x как функцию z. Положим $x = f(z)$ и аналогично $y = g(z)$. Таким образом,

$$f : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{X} \quad \text{и} \quad g : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}.$$

Отображения f и g называются *проекциями* пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ на оси $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$; $f(z)$ есть абсцисса точки z, а $g(z)$ — ее ордината.

Теорема 1. *Проекции являются открытыми отображениями.*

Доказательство. Пусть множество G открыто в пространстве $\mathscr{X}$. Тогда мы имеем $f^{-1}(G) = G \times \mathscr{Y}$, а это множество является открытым по определению.

Таким образом, отображение f непрерывно. Оно также является открытым. Предположим, что множества G и H открыты (соответственно в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$). Тогда множество $f(G\times H)=G$ открыто.

Теорема 2. *Пусть $h:\mathcal{T}\to\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Положим $h(t)=(h_1(t), h_2(t))$, где $h_1(t)\in\mathcal{X}$ и $h_2(t)\in\mathcal{Y}$. Отображение h непрерывно тогда и только тогда, когда отображения h_1 и h_2 непрерывны.*

Более точно: *отображение h непрерывно в точке t_0 тогда и только тогда, когда отображения h_1 и h_2 непрерывны в точке t_0.*

Доказательство. Предположим, что отображение h непрерывно в точке t_0. Так как $h_1(t)=fh(t)$, где f — проекция пространства $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ на ось $\mathcal{X}$, то, в силу теоремы 1, отображение h_1 непрерывно в точке t_0.

Предположим, что отображения h_1 и h_2 непрерывны в точке t_0. Пусть множество $G\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ открыто, и пусть $t_0\in h^{-1}(G)$. Мы должны показать, что $t_0\in\operatorname{Int}\left(h^{-1}(G)\right)$. Согласно § 13, III (5), можно предположить, что множество G принадлежит подбазе пространства $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Положим (см. I, теорема 4) $G=G_1\times\mathcal{Y}$. Тогда (см. § 3, II (23)) $h^{-1}(G)=h_1^{-1}(G_1)$, и поэтому $t_0\in h_1^{-1}(G_1)$. Так как отображение h_1 непрерывно в точке t_0, то $t_0\in\operatorname{Int} h_1^{-1}(G_1)=\operatorname{Int} h^{-1}(G)$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(x, y)$ — функция высказываний, такая, что множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,y}\varphi(x, y)$ открыто в пространстве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Тогда множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x}\bigvee\limits_{y}\varphi(x, y)$ открыто в пространстве $\mathcal{X}$.*

Если предположить, что множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,y}\varphi(x, y)$ замкнуто, то множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x}\bigwedge\limits_{y}\varphi(x, y)$ также будет замкнутым.

Это следует непосредственно из теоремы 1.

III. Действия над прямыми произведениями. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — два топологических пространства. Пусть $A\subset\mathcal{X}$ и $B\subset\mathcal{Y}$.

Имеют место следующие формулы:

$$\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}; \tag{1}$$

$$\operatorname{Int}(A\times B)=\operatorname{Int}(A)\times\operatorname{Int}(B); \tag{2}$$

$$\operatorname{Fr}(A\times B)=(\operatorname{Fr}(A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\operatorname{Fr}(B)); \tag{3}$$

$$(A\times B)^d=(A^d\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times B^d). \tag{4}$$

Доказательство. (1) Пусть $z=(x, y) \in \overline{A \times B}$; положим (как в II) $f(z)=x$. Так как отображение f непрерывно (согласно II, 1), то $z \in \overline{A \times B}$ влечет за собой $f(z) \in \overline{f(A \times B)}$, т. е. $x \in \bar{A}$. Аналогично $y \in \bar{B}$. Следовательно, $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$.

Предположим, далее, что $x \in \bar{A}$ и $y \in \bar{B}$. Пусть $(x, y) \in G$, где G — открытое множество. Тогда существуют открытые множества G' и H', такие, что $(x, y) \in G' \times H' \subset G$. Отсюда следует, что $x \in G'$ и $y \in H'$; значит, по предположению, $G' \cap A \neq 0 \neq H' \cap B$. Следовательно, $(G' \times H') \cap (A \times B) \neq 0$, поэтому $G \cap (A \times B) \neq 0$, откуда вытекает, что $(x, y) \in \overline{A \times B}$.

(2) Напомним (§ 2, II (6)), что

$$(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - (A \times B) = ((\mathscr{X} - A) \times \mathscr{Y}) \cup (\mathscr{X} \times (\mathscr{Y} - B)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\operatorname{Int}(A \times B) &= (\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - \overline{(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - (A \times B)} = \\
&= [(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - \overline{(\mathscr{X} - A) \times \mathscr{Y}}] \cap [(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - \overline{\mathscr{X} \times (\mathscr{Y} - B)}] = \\
&= [(\mathscr{X} \times \mathscr{Y} - \overline{\mathscr{X} - A}) \times \mathscr{Y}] \cap [(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - (\overline{\mathscr{X}} \times \overline{\mathscr{Y} - B})] = \\
&= [(\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - A}) \times \mathscr{Y}] \cap [\mathscr{X} \times (\mathscr{Y} - (\overline{\mathscr{Y} - B}))] = \\
&= (\operatorname{Int}(A) \times \mathscr{Y}) \cap (\mathscr{X} \times \operatorname{Int}(B)) = \operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B).
\end{aligned}$$

(3) Имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr}(A \times B) &= \overline{A \times B} \cap \overline{(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - (A \times B)} = \\
&= (\bar{A} \times \bar{B}) \cap [(\overline{\mathscr{X} - A} \times \bar{\mathscr{Y}}) \cup (\bar{\mathscr{X}} \times \overline{\mathscr{Y} - B})] = \\
&= (\operatorname{Fr}(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \operatorname{Fr}(B)).
\end{aligned}$$

(4) Имеем

$$\begin{aligned}
[(a, b) \in (A \times B)^d] &\equiv [(a, b) \in \overline{(A \times B) - (a, b)}] \equiv \\
&\equiv [(a, b) \in \overline{((A - a) \times B) \cup (A \times (B - b))}] \equiv \\
&\equiv [(a, b) \in (\overline{A - a} \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times (\overline{B - b}))] \equiv \\
&\equiv [(a \in \overline{A - a} \text{ и } b \in \bar{B}) \text{ или } (a \in \bar{A} \text{ и } b \in \overline{B - b})] \equiv \\
&\equiv [(a, b) \in A^d \times \bar{B} \text{ или } (a, b) \in \bar{A} \times B^d] \equiv \\
&\equiv [(a, b) \in (A^d \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times B^d)].
\end{aligned}$$

IV. Диагональ. *Диагональю* пространства $\mathscr{X}^2 = \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ назовем множество

$$(1) \qquad \Delta = \mathop{\mathsf{E}}_{x, y}(x = y).$$

Теорема 1. $\Delta \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}$.

Искомым гомеоморфизмом является проекция $(x, y) \to x$.

Теорема 2. *Если пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то его диагональ замкнута (в $\mathscr{X}^2$).*

Доказательство. Положим $\nabla = \mathscr{X}^2 - \Delta$. Мы должны показать, что множество ∇ открыто, т. е. что если дана точка (x, y), принадлежащая множеству ∇, то существуют два открытых множества G и H, таких, что $x \in G$, $y \in H$ и $G \times H \subset \nabla$. Так как $x \neq y$, то, поскольку пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово, существуют два открытых множества G и H, таких, что $x \in G$, $y \in H$ и $G \cap H = 0$. Следовательно, $(G \times H) \cap \Delta = 0$, т. е. $(G \times H) \subset \nabla$.

Теорему 2 можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. *Пусть отображения $f_j : \mathscr{X}_j \to \mathscr{Y}$ непрерывны ($j = 0, 1$). Если $\mathscr{Y}$ — хаусдорфово пространство, то множество*

$$\Gamma = \underset{x_0,\, x_1}{\mathsf{E}} (f_0(x_0) = f_1(x_1))$$

замкнуто (в пространстве $\mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_1$).

Другими словами (см. п. I, замечание), *отношение*

$$(x_0 \rho x_1) \equiv (f_0(x_0) = f_1(x_1))$$

замкнуто.

Доказательство. Положим $g(x_0, x_1) = (f_0(x_0), f_1(x_1))$. Тогда $g : \mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_1 \to \mathscr{Y}^2$, и, согласно предложению II, 2, отображение g непрерывно. Следовательно (если Δ—диагональ пространства $\mathscr{Y}^2$), множество $g^{-1}(\Delta)$ замкнуто. Но $g^{-1}(\Delta) = \Gamma$, потому что

$$[(x_0, x_1) \in g^{-1}(\Delta)] \equiv [g(x_0, x_1) \in \Delta] \equiv [(f_0(x_0), f_1(x_1)) \in \Delta] \equiv$$
$$\equiv [f_0(x_0) = f_1(x_1)];$$

это завершает доказательство теоремы.

В частном случае, когда $\mathscr{X}_0 = \mathscr{X}_1$, мы имеем

Следствие 3a. *Если отображение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно и $\mathscr{Y}$ — хаусдорфово пространство, то индуцированное отношение эквивалентности*

$$(x_0 \sim x_1) \equiv (f(x_0) = f(x_1))$$

замкнуто.

Для открытых отображений верна теорема, обратная теореме 3.

Теорема 4. *Пусть $f_j : \mathscr{X}_j \to \mathscr{Y}$ — открытое отображение на. Если множество Γ замкнуто, то пространство $\mathscr{Y}$ хаусдорфово.*

В частности, *если множество Δ замкнуто, то пространство $\mathcal{X}$ хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $y_0 \neq y_1$; положим $y_j = f_j(x_j)$. Тогда $(x_0, x_1) \in (\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1) - \Gamma$. Так как множество $(\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1) - \Gamma$ открыто, существуют множества G_j $(j = 0, 1)$, открытые в $\mathcal{X}_j$ и такие, что $x_j \in G_j$ и $(G_0 \times G_1) \cap \Gamma = 0$.

Следовательно, $f_0(G_0) \cap f_1(G_1) = 0$, так как иначе существовали бы точки $x'_j \in G_j$, такие, что $f_0(x'_0) = f_1(x'_1)$, и тогда $(x'_0, x'_1) \in \Gamma$.

Поскольку отображение f_j открыто, $f_0(G_0)$ и $f_1(G_1)$ — открытые непересекающиеся множества, содержащие соответственно точки y_0 и y_1.

Замечание 1. Понятие диагонали можно рассматривать для более общего случая, когда X и Y — подмножества данного пространства. Это не влияет на определение (1). Тогда вместо теоремы 1 мы получим более общую теорему

$$\Delta \underset{\text{top}}{=} X \cap Y.$$

Если пространство $X \cup Y$ хаусдорфово, то множество Δ замкнуто в $X \times Y$.

Замечание 2. Рассмотрим функцию высказываний $\varphi(x, y)$, где $x, y \in \mathcal{X}$, и некоторое топологическое свойство множества $\underset{x, y}{\mathsf{E}}\, \varphi(x, y) \wedge (x = y)$ относительно диагонали $\Delta = \underset{x, y}{\mathsf{E}}\, (x = y)$; тогда множество $\underset{x}{\mathsf{E}}\, \varphi(x, x)$ обладает тем же свойством относительно оси $\mathcal{X}$.

Это следует непосредственно из теоремы 1.

V. Свойства отображения f, рассматриваемого как подмножество пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Как известно, отображение f можно отождествить с множеством (называемым *графиком* f)

$$\mathfrak{J} = \underset{x, y}{\mathsf{E}}\, (y = f(x)).$$

Теорема 1. *Если отображение f непрерывно, то $\mathfrak{J} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{X}$.*

Действительно, положим $\mathfrak{z}(x) = (x, f(x))$. Тогда $\mathfrak{z}$ есть гомеоморфизм $\mathcal{X}$ на $\mathfrak{J}$ (согласно теоремам 1 и 2, п. II).

Теорема 2. *Если $\mathcal{Y}$ — хаусдорфово пространство и отображение f непрерывно, то множество $\mathfrak{J}$ замкнуто (в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$).*

Положим $\mathfrak{y}(x, y) = (f(x), y)$. Тогда $\mathfrak{y}^{-1}(\Delta) = \mathfrak{J}$, где Δ — диагональ пространства $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$. Так как множество Δ замкнуто (согласно IV, 2) и отображение $\mathfrak{y}$ непрерывно, то множество $\mathfrak{J}$ замкнуто.

Теорема 3. *Положим* $\mathfrak{r}(x, y)=(x, f(x))$. *Тогда, если отображение* f *непрерывно, то отображение* $\mathfrak{r}: \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathfrak{I}$ *является ретракцией.*

Теорему 2 можно обобщить следующим образом.

Теорема 4. *Если* $\mathcal{Y}$ — *хаусдорфово пространство и отображение* f *непрерывно в точке* x_0, *то*

$$(1) \qquad [(x_0, y)\in\overline{\mathfrak{I}}]\Rightarrow[(x_0, y)\in\mathfrak{I}];$$

это означает, что $y=f(x_0)$.

Доказательство. Положим $y_0=f(x_0)$. Пусть $y_1\neq y_0$. Тогда в пространстве $\mathcal{Y}$ существуют два открытых множества H_0 и H_1, таких, что

$$(2) \qquad y_0\in H_0, \quad y_1\in H_1 \quad \text{и} \quad H_0\cap H_1=0.$$

Так как отображение f непрерывно в точке x_0, существует множество G, открытое в пространстве $\mathcal{X}$, такое, что

$$(3) \qquad x_0\in G \quad \text{и} \quad (x\in G)\Rightarrow(f(x)\in H_0),$$
$$\text{т. е.} \ (\mathfrak{I}\cap(G\times\mathcal{Y}))\subset G\times H_0.$$

Согласно (2), $H_0\cap H_1=0$, следовательно,

$$(4) \qquad (\mathfrak{I}\cap(G\times H_1))\subset(G\times H_0)\cap(G\times H_1)=0.$$

Так как множество $G\times H_1$ является окрестностью точки (x_0, y_1), то из формулы (4) следует, что точка (x_0, y_1) не принадлежит $\overline{\mathfrak{I}}$.

Теорема 5. *Предположим, что пространство* $\mathcal{Y}$ *является хаусдорфовым и плотным в себе и что множество* D_f *точек разрыва отображения* f *является граничным. Тогда множество* $\mathfrak{I}$ *нигде не плотно.*

Доказательство. Допустим, что множество $\mathfrak{I}$ не является нигде не плотным, т. е. $\overline{\mathfrak{I}}$ содержит открытое множество $(\neq 0)$. Тогда существуют множество G, открытое в пространстве $\mathcal{X}$, и множество H, открытое в пространстве $\mathcal{Y}$ (оба не пустые), такие, что $G\times H\subset\overline{\mathfrak{I}}$. Пусть $x\in G$. Тогда множество $x\times H$ открыто в $x\times\mathcal{Y}$; следовательно, оно плотно в себе и поэтому содержит более чем одну точку. С другой стороны,

$$x\times H\subset G\times H\subset\overline{\mathfrak{I}}, \quad \text{откуда} \quad x\times H\subset\overline{\mathfrak{I}}\cap(x\times\mathcal{Y}),$$

и поэтому $\overline{\mathfrak{I}}\cap(x\times\mathcal{Y})$ не сводится к одной точке.

Согласно теореме 4, x есть точка разрыва отображения f. Таким образом, $G\subset D_f$, и, следовательно, D_f не является граничным множеством.

VI. Горизонтальные и вертикальные сечения. Цилиндр на множестве $A \subset \mathcal{X}$. Назовем *горизонтальным сечением пространства* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ множество

$$\mathcal{X} \times (y_0) = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} (y = y_0). \tag{1}$$

Множество $(x_0) \times \mathcal{Y}$ называется *вертикальным сечением пространства* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Более общо, пусть $A \subset \mathcal{X}$. Назовем *цилиндром* на A множество

$$A \times \mathcal{Y} = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} (x \in A). \tag{2}$$

Теорема 1. *Каждое горизонтальное сечение гомеоморфно пространству* $\mathcal{X}$, *т. е.*

$$\mathcal{X} \times (y_0) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{X}, \text{ *следовательно*, } \mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \tag{3}$$

Проекция $(x, y_0) \to x$ является искомым гомеоморфизмом.

Доказательство очевидно (теорема, конечно, является частным случаем теоремы V, 1, а именно случаем, когда f — константа).

Легко доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть задана функция высказываний* $\varphi(x, y)$. *Тогда проекция на ось* $\mathcal{X}$ *отображает множество* $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} \varphi(x, y) \cap \cap (\mathcal{X} \times (y_0))$ *на множество* $\mathop{\mathsf{E}}_{x} \varphi(x, y_0)$.

VII. Инварианты прямого произведения

Теорема 1. *Пусть* $A \subset \mathcal{X}$, $B \subset \mathcal{Y}$, $A \neq 0 \neq B$. *Тогда множество* $A \times B$ *замкнуто, открыто, всюду плотно тогда и только тогда, когда оба множества* A *и* B *обладают соответствующими свойствами.*

Доказательство. Это следует из III (1) и (2) (ср. также § 2, II (7)):

$$(\overline{A \times B} = A \times B) \equiv (\bar{A} \times \bar{B} = A \times B) \equiv (\bar{A} = A \text{ и } \bar{B} = B);$$

$$\{\operatorname{Int}(A \times B) = A \times B\} \equiv \{\operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B) = A \times B\} \equiv$$
$$\equiv \{\operatorname{Int}(A) = A \text{ и } \operatorname{Int}(B) = B\};$$

$$(\overline{A \times B} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \equiv (\bar{A} \times \bar{B} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \equiv (\bar{A} = \mathcal{X} \text{ и } \bar{B} = \mathcal{Y}).$$

Следствие 1а. *Точка* (a, b) *является изолированной точкой пространства* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *тогда и только тогда, когда* a — *изолированная точка в пространстве* $\mathcal{X}$, *а* b — *в пространстве* $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Точка (a, b) является изолированной в пространстве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ тогда и только тогда, когда множество, состоящее из этой точки, открыто в $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Но, согласно теореме 1, это эквивалентно допущению, что множество (a) открыто в пространстве $\mathcal{X}$, а множество (b) — в пространстве $\mathcal{Y}$.

Теорема 2. *Множество $A\times B$ является граничным, нигде не плотным, плотным в себе тогда и только тогда, когда одно из множеств A или B обладает соответствующим свойством.*

Доказательство. Это следует из тождеств:

$$\{\mathrm{Int}(A\times B)=0\}\equiv\{\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)=0\}\equiv$$
$$\equiv\{\mathrm{Int}(A)=0 \text{ или } \mathrm{Int}(B)=0\};$$
$$\{\mathrm{Int}(\overline{A\times B})=0\}\equiv\{\mathrm{Int}(\bar{A}\times\bar{B})=0\}\equiv\{\mathrm{Int}(\bar{A})=0 \text{ или } \mathrm{Int}(\bar{B})=0\}.$$

Заключительная часть теоремы вытекает непосредственно из следствия 1а.

Следствие 2а[1]). *Пусть $A\subset\mathcal{X}$. Если множество A обладает одним из следующих свойств: является замкнутым, открытым, типа F_σ, типа G_δ, граничным, нигде не плотным, множеством первой категории, множеством, обладающим свойством Бэра, множеством плотным в себе, то множество $A\times\mathcal{Y}$ обладает соответствующим свойством.*

Другими словами, если для данной функции высказываний $\varphi(x)$ множество $\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)$ обладает одним из указанных свойств, то и множество $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)$ обладает этим свойством.

Теорема 3. *Следующие свойства инвариантны относительно операции прямого умножения:*

(а) *быть хаусдорфовым пространством;*

(б) *быть регулярным пространством;*

(в) *быть вполне регулярным пространством.*

Доказательство. (а) Предположим, что пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — хаусдорфовы. Пусть $\mathfrak{z}_1=(x_1, y_1)$, $\mathfrak{z}_2=(x_2, y_2)$, и пусть $\mathfrak{z}_1\neq\mathfrak{z}_2$. Тогда либо $x_1\neq x_2$, либо $y_1\neq y_2$. Предположим, что $x_1\neq x_2$. Так как $\mathcal{X}$ — хаусдорфово пространство, существуют два открытых множества $G_1\subset\mathcal{X}$ и $G_2\subset\mathcal{X}$, таких, что $x_1\in G_1$, $x_2\in G_2$ и $G_1\cap G_2=0$. Следовательно, $\mathfrak{z}_1\in G_1\times\mathcal{Y}$, $\mathfrak{z}_2\in G_2\times\mathcal{Y}$ и множества $G_1\times\mathcal{Y}$ и $G_2\times\mathcal{Y}$ открыты и не пересекаются.

(б) Пусть $\mathfrak{z}=(x, y)\in\mathfrak{G}$, где множество $\mathfrak{G}$ открыто в пространстве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Покажем, что существует открытое множество $\mathfrak{H}$, такое, что $z\in\mathfrak{H}$ и $\bar{\mathfrak{H}}\subset\mathfrak{G}$.

[1]) См. также § 22, IV. Ср. Окстоби [1].

Очевидно, мы можем ограничиться случаем, когда множество $\mathfrak{G}$ принадлежит базе пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Тогда можно положить $\mathfrak{G} = A \times B$, где множества A и B открыты соответственно в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Так как пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ регулярны, существуют открытые множества C и D, такие, что

$$a \in C, \quad \overline{C} \subset A \quad \text{и} \quad b \in D, \quad \overline{D} \subset B.$$

Положим $\mathfrak{H} = C \times D$. Следовательно, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{H}$ и

$$\overline{\mathfrak{H}} = \overline{C \times D} = \overline{C} \times \overline{D} \subset A \times B = \mathfrak{G}.$$

(в) Пусть $\mathfrak{z}_0 = (x_0, y_0) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) - \mathfrak{F}$, где множество $\mathfrak{F}$ замкнуто. При доказательстве того, что пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ вполне регулярно, мы можем ограничиться случаем, когда множество $\mathfrak{F}$ принадлежит замкнутой базе пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, т. е. случаем, когда $\mathfrak{F} = A \times \mathcal{Y}$, где $A = \overline{A} \subset \mathcal{X}$ (см. теорему 3, § 14, I). Тогда $x_0 \in \mathcal{X} - A$. Далее, так как предполагается, что пространство $\mathcal{X}$ вполне регулярно, существует непрерывное отображение $g: \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такое, что $g(x_0) = 0$ и $g(x) = 1$ при $x \in A$. Положим $f(x, y) = g(x)$. Тогда $f(\mathfrak{z}_0) = 0$ и $f(\mathfrak{z}) = 1$ при $\mathfrak{z} \in \mathfrak{F}$.

Замечание 1. Теорема, обратная теореме 3, также верна; это означает, что если пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ обладает одним из свойств (а) — (в), то оба пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ обладают соответствующим свойством.

Это следует из того, что эти свойства наследственны и что $\mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (см. VI (3)).

Замечание 2. Нормальность не является инвариантом прямого произведения[1]).

Более того, произведение нормального пространства и метрического пространства может не быть нормальным[2]).

Замечание 3. Следствие 2a не имеет места для свойства Бэра в узком смысле (см. § 40, VIII).

Лемма. *Пусть множество $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ плотно в себе, и пусть a — изолированная точка проекции A множества $\mathfrak{Z}$ на ось $\mathcal{X}$. Тогда множество $((a) \times \mathcal{Y}) \cap \mathfrak{Z}$ плотно в себе, и, следовательно, проекция множества $\mathfrak{Z}$ на ось $\mathcal{Y}$ содержит плотное в себе множество ($\neq 0$).*

Доказательство. Так как множество (a) открыто в A, существует множество G, открытое в пространстве $\mathcal{X}$, такое, что

---

[1]) См. Зоргенфрей [1], стр. 631, Келли [1], стр. 134. Что касается произведений наследственно нормальных пространств, см. Катетов [1].

[2]) См. Майкл [4], стр. 375, и Морита [4], стр. 148. См. также Дьедонне [2], стр. 29—32.

$(a)=G\cap A$. Поскольку A является проекцией множества $\mathfrak{Z}$ в пространство $\mathcal{X}$, имеем $\mathfrak{Z}\subset A\times\mathcal{Y}$. Поэтому (см. также § 2, II (2))

$$((a)\times\mathcal{Y})\cap\mathfrak{Z}=((G\cap A)\times\mathcal{Y})\cap\mathfrak{Z}=$$
$$=(G\times\mathcal{Y})\cap(A\times\mathcal{Y})\cap\mathfrak{Z}=(G\times\mathcal{Y})\cap\mathfrak{Z}.$$

Таким образом, множество $((a)\times\mathcal{Y})\cap\mathfrak{Z}$ открыто в $\mathfrak{Z}$ (так как множество $G\times\mathcal{Y}$ открыто в пространстве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ в силу теоремы 1) и, следовательно, плотно в себе (см. § 9, V, 3). Наконец, поскольку $(a)\times\mathcal{Y}\underset{\text{top}}{=}\mathcal{Y}$, пространство $\mathcal{Y}$ содержит множество, гомеоморфное множеству $((a)\times\mathcal{Y})\cap\mathfrak{Z}$, и, следовательно, плотное в себе $(\neq 0)$ множество.

Теорема 4[1]. *Пространство $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ является разреженным тогда и только тогда, когда пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ разреженны* $(\mathcal{X}\neq 0\neq\mathcal{Y})$.

Доказательство. Предположим, что одно из множеств $A\subset\mathcal{X}$ или $B\subset\mathcal{Y}$ плотно в себе $(\neq 0)$. Тогда, согласно теореме 2, множество $A\times B$ плотно в себе, и пространство $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ не является разреженным.

Обратно, если множество $\mathfrak{Z}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ плотно в себе $(\neq 0)$, то, согласно лемме, либо проекция множества $\mathfrak{Z}$ в пространство $\mathcal{X}$, либо проекция множества $\mathfrak{Z}$ в пространство $\mathcal{Y}$ содержит плотное в себе множество $(\neq 0)$.

Теорема 5. *Пусть даны отображения $f_j:\mathcal{X}_j\to\mathcal{Y}_j$, $j=0,\ 1$. Отображение $f=f_0\times f_1$ пространства $\mathcal{X}_0\times\mathcal{X}_1$ в пространство $\mathcal{Y}_0\times\mathcal{Y}_1$* (см. § 3, III) *открыто тогда и только тогда, когда отображения f_0 и f_1 открыты.*

Более точно: *отображение f открыто в точке $(y_0,\ y_1)\in\in f(\mathcal{X}_0\times\mathcal{X}_1)$ тогда и только тогда, когда отображения f_j открыты в точках y_j, $j=0,\ 1$.*

Доказательство. (1) Предположим, что отображение f открыто в точке $(y_0,\ y_1)$. Пусть $y_0\in\overline{B}\subset\mathcal{Y}_0$. Мы должны показать (ср. § 13, XIV (5)), что $f_0^{-1}(y_0)\subset\overline{f_0^{-1}(B)}$.

Пусть $\mathfrak{B}=B\times\mathcal{Y}_1$. Согласно III (1), $\overline{\mathfrak{B}}=\overline{B}\times\mathcal{Y}_1$, следовательно, $(y_0,\ y_1)\in\overline{\mathfrak{B}}$. Так как отображение f открыто в точке $(y_0,\ y_1)$, то, согласно § 13, XIV (5) (см. также § 3, III (25)), отсюда следует, что

$$f^{-1}(y_0,\ y_1)\subset\overline{f^{-1}(\mathfrak{B})}=\overline{f^{-1}(B\times\mathcal{Y}_1)}=\overline{f_0^{-1}(B)\times f_1^{-1}(\mathcal{Y}_1)}=$$
$$=\overline{f_0^{-1}(B)}\times\overline{f_1^{-1}(\mathcal{Y}_1)}=\overline{f_0^{-1}(B)}\times\mathcal{X}_1.$$

---

[1]) См. Улам и Куратовский [1], стр. 248.

Но, согласно § 3, III (25),

$$f^{-1}(y_0, y_1) = f_0^{-1}(y_0) \times f_1^{-1}(y_1),$$

следовательно,

$$f_0^{-1}(y_0) \times f_1^{-1}(y_1) \subset \overline{f_0^{-1}(B)} \times \mathcal{X}_1.$$

Так как $f^{-1}(y_0, y_1) \neq 0$ и, следовательно, $f_1^{-1}(y_1) \neq 0$, то отсюда окончательно получаем (см. § 2, II (4)), что

$$f_0^{-1}(y_0) \subset \overline{f_0^{-1}(B)}.$$

(2) Предположим, что отображения f_j открыты в точках y_j, $j=0, 1$. Пусть множество $\mathfrak{G}$ открыто в пространстве $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1$ и $(y_0, y_1) \in f(\mathfrak{G})$. Предположим, что (ср. § 13, XIV, замечание 2) множество $\mathfrak{G}$ принадлежит базе пространства $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1$. Тогда $\mathfrak{G} = G_0 \times G_1$, где множества G_j открыты в пространствах $\mathcal{X}_j$. Так как (см. § 3, III (24)) $f(G_0 \times G_1) = f_0(G_0) \times f_1(G_1)$, то мы имеем $y_j \in f_j(G_j)$; поскольку отображения f_j открыты в точках y_j, отсюда следует, что $y_j \in \operatorname{Int} f_j(G_j)$. Поэтому (ср. III (2))

$$(y_0, y_1) \in [\operatorname{Int} f_0(G_0)] \times [\operatorname{Int} f_1(G_1)] = \\ = \operatorname{Int}[f_0(G_0) \times f_1(G_1)] = \operatorname{Int} f(G_0 \times G_1).$$

Итак, отображение f открыто в точке (y_0, y_1).

§ 16. Обобщенные прямые произведения

I. Определение. Напомним, что, по определению произведения $\prod_t \mathcal{X}_t$, где $t \in T$, мы имеем (ср. § 3, VIII (0))

$$(0) \qquad \mathfrak{z} \in \prod_t \mathcal{X}_t \equiv \bigwedge_t \mathfrak{z}^t \in \mathcal{X}_t,$$

где $\mathfrak{z}^t$ есть t-я координата точки $\mathfrak{z}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{X}_t$ — топологическое пространство для каждого $t \in T$. В пространстве $\prod_t \mathcal{X}_t$ введем топологию (называемую тихоновской топологией) при помощи следующего определения.

Определение[1]). Семейство множеств вида $\prod_t X_t^*$, где $X_{t_0}^* = G$ для данного t_0 и для данного открытого множества G в пространстве $\mathcal{X}_{t_0}$ и $X_t^* = \mathcal{X}_t$ при $t \neq t_0$, есть *подбаза* пространства $\prod_t \mathcal{X}_t$.

[1]) См. Тихонов [2], стр. 544 и [3], стр. 763.

Иначе говоря, подбаза состоит из множеств $\mathfrak{G}$ вида

$$\mathfrak{G}_{t,G} = \underset{\mathfrak{z}}{\mathrm{E}}\,(\mathfrak{z}^t \in G), \tag{1}$$

где множество G открыто в пространстве $\mathscr{X}_t$.

Отсюда следует, что база пространства $\prod_t \mathscr{X}_t$ имеет своими элементами множества вида $\prod_t G_t$, где множества G_t открыты в пространствах $\mathscr{X}_t$ и только для конечного множества индексов из T отличны от пространств $\mathscr{X}_t$. Кроме того, можно считать, что множество G_t принадлежит базе пространства $\mathscr{X}_t$.

В том случае, когда множество T состоит из двух элементов, приведенное выше определение совпадает с определением, данным в § 15, I.

В частном случае канторова дисконтинуума $\mathscr{C} = (0, 2)^{\aleph_0}$ и пространства иррациональных чисел $\mathscr{N} = \mathscr{D}^{\aleph_0}$ определенная нами топология совпадает с обычной топологией множеств $\mathscr{C}$ и $\mathscr{N}$, рассматриваемых как подмножества пространства $\mathscr{E}$ (см. примеры 2 и 3, § 3, IX).

Многие теоремы, установленные в § 15 для произведения двух пространств, можно легко распространить на более общий случай произведения произвольного семейства пространств.

В частности, справедлива

Теорема 1. *Множества вида $\prod_t F_t$, где F_t замкнуто в пространстве $\mathscr{X}_t$ и $F_t = \mathscr{X}_t$ при всех t, за исключением одного, замкнуты. Семейство всех таких множеств является замкнутой подбазой пространства $\prod_t \mathscr{X}_t$.*

Теорема 2. *Если для каждой точки $t \in T$ пространство $\mathscr{X}_t$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство, то $\prod_t \mathscr{X}_t$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство.*

Доказательство. Пусть $\{a_t\}_{t \in T}$ — точка пространства $\prod_t \mathscr{X}_t$. Положим $F_{t_0} = \prod X_t^*$, где $X_{t_0}^* = (a_{t_0})$ и $X_t^* = \mathscr{X}_t$ при $t \neq t_0$. Тогда, согласно теореме 1, множество F_{t_0} замкнуто, поэтому и множество $\prod_t (a_t) = \bigcap_t F_t$ тоже замкнуто.

II. Проекции и непрерывные отображения. Рассмотрим $\mathfrak{z}^t$ как функцию точки $\mathfrak{z}$ (назовем ее *проекцией* на ось $\mathscr{X}_t$):

$$\mathrm{pr}_t(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^t \quad \text{и} \quad \mathrm{pr}_{t_0} : \left(\prod_t \mathscr{X}_t\right) \to \mathscr{X}_{t_0}. \tag{1}$$

Очевидно, что если $A \subset \mathscr{X}_{t_0}$, то

$$(2) \qquad \mathrm{pr}_{t_0}^{-1}(A) = \underset{\mathfrak{z}}{\mathsf{E}}(\mathfrak{z}^{t_0} \in A) = \prod_t X_t^*,$$

где $X_{t_0}^* = A$ и $X_t^* = \mathscr{X}_t$ при $t \neq t_0$.

Теорема 1. *Проекции являются открытыми отображениями прямого произведения пространств на оси.*

Действительно, если множество A открыто в пространстве $\mathscr{X}_{t_0}$, то множество $\mathrm{pr}_{t_0}^{-1}(A)$ открыто в прямом произведении пространств, в силу соотношений (2) и I (1).

С другой стороны, если множество $\mathfrak{G}$ открыто в пространстве $\prod_t \mathscr{X}_t$, то и множество $\mathrm{pr}_t(\mathfrak{G})$ открыто. Можно, очевидно, предположить, что множество $\mathfrak{G}$ является элементом базы; положим

$$\mathfrak{G} = G_{t_1} \times \ldots \times G_{t_n} \times \prod_t \mathscr{X}_t \quad \text{при} \quad t \neq t_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда $\mathrm{pr}_{t_k}(\mathfrak{G}) = G_{t_k}$ и $\mathrm{pr}_t(\mathfrak{G}) = \mathscr{X}_t$ при $t \neq t_k$. В случае, когда $\mathscr{X}_t = \mathscr{Y}$ для каждого $t \in T$, из теоремы 1 выводится следующая

Теорема 2. *Пусть $g \in (\mathscr{Y}^T)_{\mathrm{set}}$, т. е. $g : T \to \mathscr{Y}$. Тогда для переменного g функция $f_t : (\mathscr{Y}^T)_{\mathrm{set}} \to \mathscr{Y}$, определенная равенством*

$$f_t(g) = g(t),$$

непрерывна.

Теорема 3. *Пусть $\varphi : \mathfrak{Z} \to \prod_t \mathscr{X}_t$, т. е. $\varphi^t : \mathfrak{Z} \to \mathscr{X}_t$. Тогда мы имеем*

$$(\varphi \textit{ непрерывно в точке } z_0) \equiv \bigwedge_t (\varphi^t \textit{ непрерывно в точке } z_0).$$

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2, § 15, II. Во второй части доказательства мы предполагаем, что $\mathfrak{G} = \prod_t X_t^*$, где множество $X_{t_0}^* = G$ открыто в пространстве $\mathscr{X}_{t_0}$ и $X_t^* = \mathscr{X}_t$ при $t \neq t_0$, и затем пользуемся формулой (см. § 3, VIII (9))

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{G}) = (\varphi^{t_0})^{-1}(G).$$

Теорема 4. (Ассоциативность прямого умножения.) *Пусть $t_0 \in T$ и $\mathscr{Y} = \prod_{t \neq t_0} \mathscr{X}_t$. Тогда*

$$\prod_t \mathscr{X}_t \underset{\mathrm{top}}{=} \mathscr{X}_{t_0} \times \mathscr{Y}.$$

А именно положим для $\mathfrak{z} \in \prod_t \mathscr{X}_t$

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^{t_0}, \qquad \mathfrak{y}(\mathfrak{z}) = \{\mathfrak{z}^t\}_{t \neq t_0} \quad \text{и} \quad \mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = (\mathfrak{x}(\mathfrak{z}), \mathfrak{y}(\mathfrak{z})).$$

Тогда $\mathfrak{w}$ — искомый гомеоморфизм.

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{w}$ — взаимно однозначное отображение на. В силу теорем 1 и 3, отображения $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ непрерывны, следовательно (согласно теореме 3), отображение $\mathfrak{w}$ тоже непрерывно.

Остается показать, что отображение $\mathfrak{w}$ переводит открытые множества в открытые. Достаточно рассмотреть лишь открытые множества, принадлежащие подбазе пространства $\prod\limits_t \mathscr{X}_t$. Итак, допустим, что множество G открыто в пространстве $\mathscr{X}_t$, и положим $\mathfrak{G} = \mathop{\mathsf{E}}\limits_{\mathfrak{z}} (\mathfrak{z}^t \in G)$. Покажем, что множество $\mathfrak{w}(\mathfrak{G})$ открыто.

Если $t = t_0$, то $\mathfrak{w}(\mathfrak{G}) = G \times \mathscr{Y}$. Если же $t = t_1 \neq t_0$, то $\mathfrak{w}(\mathfrak{G}) = \mathscr{X}_{t_0} \times \prod\limits_{t \neq t_0} X_t^*$, где $X_{t_1}^* = G$ и $X_t^* = \mathscr{X}_t$ для $t_0 \neq t \neq t_1$.

Следовательно, множество $\prod\limits_{t \neq t_0} X_t^*$ открыто в пространстве $\mathscr{Y}$, поэтому множество $\mathfrak{w}(\mathfrak{G})$ открыто в пространстве $\mathscr{X}_{t_0} \times \mathscr{Y}$.

Теорему 1, § 15, VI можно распространить на случай произвольного множества T следующим образом.

Теорема 5. *Пусть $t_0 \in T$ и $\mathfrak{z}_0 \in \prod\limits_t \mathscr{X}_t$. Тогда*

$$\mathop{\mathsf{E}}\limits_{\mathfrak{z}} \bigwedge_{t \neq t_0} (\mathfrak{z}^t = \mathfrak{z}_0^t) \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}_{t_0}.$$

Таким образом, $\mathscr{X}_{t_0} \underset{\text{top}}{\subset} \prod\limits_t \mathscr{X}_t$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{Y} = \prod\limits_{t \neq t_0} \mathscr{X}_t$ и $\mathfrak{y}_0 = \{\mathfrak{z}_0^t\}_{t \neq t_0}$. Тогда множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{\mathfrak{z}} \bigwedge\limits_{t \neq t_0} (\mathfrak{z}^t = \mathfrak{z}_0^t)$ гомеоморфно пространству $\mathscr{X}_{t_0} \times \mathfrak{y}_0$, а это, согласно § 15, VI (3), завершает доказательство.

Пусть T и U — произвольные множества и $f: U \to T$ — взаимно однозначное отображение на.

Тогда, очевидно, мы имеем

$$\prod_{t \in T} \mathscr{X}_t \underset{\text{top}}{=} \prod_{u \in U} \mathscr{X}_{f(u)}, \tag{3}$$

и искомый гомеоморфизм $\mathfrak{h}$ можно определить условием

$$\mathfrak{h}^u(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^{\mathfrak{h}(u)} \quad \text{для каждой точки} \quad \mathfrak{z} \in \prod_{t \in T} \mathscr{X}_t \quad \text{и} \quad u \in U.$$

В частном случае, когда $\mathscr{X}_t = \mathscr{X}$ при каждом $t \in T$, мы имеем

$$\mathscr{X}^T \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}^U. \tag{4}$$

Это приводит к следующей теореме.

Теорема 6. $\mathscr{X}^{\aleph_\alpha} \times \mathscr{X}^{\aleph_\alpha} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}^{\aleph_\alpha} \underset{\text{top}}{=} (\mathscr{X}^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha}$.

Доказательство следует непосредственно из формул (1), (3) и (5), § 3, XII (см. также § 3, XII (4)).

Следствие 6а. *Пусть $\mathcal{C}$ — канторов дисконтинуум. Тогда мы имеем*

(5) $$\mathcal{C}^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{C};$$

(6) $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *(так же как и $\mathcal{J}^n$) есть непрерывный образ $\mathcal{C}$.*

Формула (5) следует из теоремы 6, так как множество $\mathcal{C}$ можно представить в виде $(0, 1)^{\aleph_a}$.

Чтобы доказать (6), заметим сначала, что интервал $\mathcal{J}$ есть непрерывный образ множества $\mathcal{C}$. А именно пусть дана точка $x \in \mathcal{C}$, тогда

(7) $$x = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_m}{3^m} + \ldots \qquad (c_m = 0 \text{ или } 2),$$

и мы полагаем[1])

(8) $$f(x) = \frac{c_1}{2^2} + \frac{c_2}{2^3} + \ldots + \frac{c_m}{2^{m+1}} + \ldots .$$

Очевидно, что f — непрерывное отображение множества $\mathcal{C}$ на интервал $\mathcal{J}$.

Отображение f индуцирует непрерывное отображение g множества $\mathcal{C}^n$ на $\mathcal{J}^n (n \leqslant \aleph_0)$. А именно положим

(9) $$g^i(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}^i) \quad \text{для} \quad \mathfrak{z} \in \mathcal{C}^n.$$

Этим завершается доказательство, так как $\mathcal{C}^n$ является непрерывным образом $\mathcal{C}$ (согласно формуле (5)).

Следствие 6б. (Обобщенная теорема Пеано.)[2]) *Куб $\mathcal{J}^n (n \leqslant \aleph_0)$ является непрерывным образом интервала $\mathcal{J}$.*

Пусть, в соответствии с следствием 6а, $h: \mathcal{C} \to \mathcal{J}^n$—отображение на. На каждом интервале, смежном с $\mathcal{C}$, продолжим отображение h линейно. Полученное продолжение отображает отрезок $\mathcal{J}$ на куб $\mathcal{J}^n$.

Следствие 6в. (Обобщенная теорема продолжения Титце.) *Пусть пространство $\mathcal{X}$ нормально, $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ и отображение $f: F \to \mathcal{J}^n$ (соответственно $\mathcal{E}^n$) непрерывно $(n \leqslant \aleph_0)$. Тогда $f \subset g: \mathcal{X} \to \mathcal{J}^n$ (соответственно $\mathcal{E}^n$), где g — непрерывное отображение.*

---

[1]) Это „ступенчатая" функция (которую легко можно продолжить на весь интервал $\mathcal{J}$). См. Кантор [7] и Лебег [1], стр. 210.

[2]) См. Пеано [1], стр. 157, и Лебег [1].

Доказательство. Отображение $f^i : F \to \mathcal{J}$ непрерывно, в силу непрерывности отображения $f : F \to \mathcal{J}^n$. Отсюда, по теореме Титце (§ 14, IV), существует непрерывное продолжение $g^i : \mathcal{X} \to \mathcal{J}^n$ отображения f^i. Но тогда, в силу теоремы 3, отображение $g : \mathcal{X} \to \mathcal{J}$ непрерывно.

Следствие 6г. *Пусть* $\{A_t\}$, $t \in T$,*—семейство подмножеств пространства* $\mathcal{X}$. *Характеристическая функция этого семейства* $f : \mathcal{X} \to (0, 1)^T$ *непрерывна тогда и только тогда, когда каждое множество* A_t *одновременно замкнуто и открыто.*

По определению (см. § 3, VII (9)), f^t есть характеристическая функция множества A_t. Следовательно, функция f^t непрерывна тогда и только тогда, когда множество A_t одновременно замкнуто и открыто (в силу теоремы 5, § 13, VI).

III. Действия над прямыми произведениями. Формулу III (1) из § 15 можно распространить на общий случай, когда $A_t \subset \mathcal{X}_t$ и $t \in T$, а именно

$$(1) \qquad \overline{\prod_t A_t} = \prod_t \overline{A}_t.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{z} \in \overline{\prod\limits_t A_t}$. Так как проекция pr_t непрерывна, имеем

$$\mathfrak{z}^t = \mathrm{pr}_t(\mathfrak{z}) \in \overline{\mathrm{pr}_t\left(\prod_s A_s\right)} = \overline{A}_t.$$

Следовательно, $\mathfrak{z} \in \prod\limits_t \overline{A}_t$.

С другой стороны, пусть $\mathfrak{a} \in \prod\limits_t \overline{A}_t$. Покажем, что если $\mathfrak{G}$ — открытое множество, содержащее точку $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{G}$ содержит точку множества $\prod\limits_t A_t$. Достаточно рассмотреть случай, когда множество $\mathfrak{G}$ принадлежит базе, т. е. когда

$$\mathfrak{a} \in \mathfrak{G} = \underset{\mathfrak{z}}{\mathrm{E}}\,(\mathfrak{z}^{t_1} \in G_{t_1}) \ldots (\mathfrak{z}^{t_n} \in G_{t_n}),$$

где множества G_{t_k} открыты в пространствах $\mathcal{X}_{t_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Так как $\mathfrak{a}^{t_k} \in G_{t_k}$, то $G_{t_k} \cap \overline{A}_{t_k} \neq 0$, следовательно, $G_{t_k} \cap A_{t_k} \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{b} = \{\mathfrak{b}^t\}$, где $\mathfrak{b}^{t_k} \in G_{t_k} \cap A_{t_k}$ и $\mathfrak{b}^t \in A_t$ при $t \neq t_k$. Тогда $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G} \cap \prod\limits_t A_t$.

Следующая формула является обобщением формулы § 15, III (2):

(2) $$\operatorname{Int}\Big(\prod_t A_t\Big) \subset \prod_t \operatorname{Int}(A_t),$$

и если $A_t = \mathscr{X}_t$, за исключением конечного числа индексов t, то

(3) $$\operatorname{Int}\Big(\prod_t A_t\Big) = \prod_t \operatorname{Int}(A_t).$$

Более того, *если* $\operatorname{Int}\Big(\prod\limits_t A_t\Big) \neq 0$, *то существует конечная система индексов* $t_1, \ldots, t_n$, такая, что $A_t = \mathscr{X}_t$ для $t \neq t_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Для доказательства второй части приведенного выше утверждения положим $\mathfrak{z} \in \operatorname{Int}\Big(\prod\limits_t A_t\Big)$ и обозначим через $\mathfrak{G}$ элемент базы (рассмотренной в п. I), содержащий точку $\mathfrak{z}$ и содержащийся в $\operatorname{Int}\Big(\prod\limits_t A_t\Big)$. Очевидно, можно предположить, что множество $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$\mathfrak{G} = G_{t_1} \times G_{t_2} \times \ldots \times G_{t_n} \times \prod_{t \neq t_k} \mathscr{X}_t.$$

Так как $\mathfrak{z} \in \mathfrak{G} \subset \operatorname{Int}(\prod\limits_t A_t)$, то $G_{t_k} \subset A_{t_k}$ и $\mathscr{X}_t = A_t$ для $t \neq t_k$. Следовательно, $\mathfrak{z}^{t_k} \in \operatorname{Int}(A_{t_k})$ и окончательно $z \in \prod\limits_t \operatorname{Int}(A_t)$.

IV. Диагональ. Пусть $\mathscr{X}_t = \mathscr{X}$ для каждого $t \in T$. *Диагональю* пространства $\prod\limits_t \mathscr{X}_t = (\mathscr{X}^T)_{\text{set}}$ называется множество

$$\Delta = \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} \bigwedge_{t, t'} (\mathfrak{z}^t = \mathfrak{z}^{t'}).$$

Теорема 1. $\Delta \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}$.

Искомым гомеоморфизмом является pr_{t_0}, где t_0 произвольно (см. II, 1 и 3).

Теорема 2. *Если пространство* $\mathscr{X}$ *хаусдорфово, то диагональ* Δ *пространства* $(\mathscr{X}^T)_{\text{set}}$ *замкнута.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, § 15, IV. Рассмотрим дополнение к диагонали Δ, т. е. множество

$$\nabla = \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} \bigvee_{t, t'} (\mathfrak{z}^t \neq \mathfrak{z}^{t'}) = \bigcup_{t, t'} \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} (\mathfrak{z}^t \neq \mathfrak{z}^{t'}).$$

Пусть дана точка $\mathfrak{z}_0 \in \nabla$ и такие индексы t и t', что $\mathfrak{z}_0^t \neq \mathfrak{z}_0^{t'}$. Так как пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то существуют открытые множества G и H, такие, что $\mathfrak{z}_0^t \in G$, $\mathfrak{z}_0^{t'} \in H$ и $G \cap H = 0$. Положим

$$\mathfrak{A} = \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} (\mathfrak{z}^t \in G)(\mathfrak{z}^{t'} \in H).$$

Очевидно, что множество $\mathfrak{A}$ открыто и $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{A}$. Более того $\mathfrak{A} \subset \nabla$, ибо в противном случае существовала бы точка $\mathfrak{z} \in \mathfrak{A}$, такая, что

$\mathfrak{z}^t = \mathfrak{z}^{t'}$, но это невозможно, так как $G \cap H = 0$. Следовательно, множество ∇ открыто, а множество Δ замкнуто.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f_t\colon \mathscr{X}_t \to \mathscr{Y}$ и положим

(1) $$\mathfrak{Z} = \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} \bigwedge_{t', t''} (f_{t'}(\mathfrak{z}^{t'}) = f_{t''}(\mathfrak{z}^{t''})).$$

Для $\mathfrak{z} \in \prod_t \mathscr{X}_t$ рассмотрим точку $\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) \in (\mathscr{Y}^T)_{\text{set}}$, определенную следующим образом:

(2) $$\mathfrak{f}^t(\mathfrak{z}) = \{f_t(\mathfrak{z}^t)\}.$$

Теорема 3. *Для каждого $t_0 \in T$ имеет место соотношение*

(3) $$f_{t_0} \circ \mathrm{pr}_{t_0}(\mathfrak{Z}) = \bigcap_t f_t(\mathscr{X}_t).$$

Доказательство. Пусть $y = f_{t_0} \circ \mathrm{pr}_{t_0}(\mathfrak{z}) = f_{t_0}(\mathfrak{z}^{t_0}) = f_t(\mathfrak{z}^t)$ для каждого $t \in T$ и $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$. Тогда $y \in f_t(\mathscr{X}_t)$ для каждого $t \in T$.

С другой стороны, если $y \in \bigcap_t f_t(\mathscr{X}_t)$, то существует точка $\mathfrak{z} \in \prod_t \mathscr{X}_t$, такая, что $y = f_t(\mathfrak{z}^t)$ для каждого t. Поэтому $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ и $y \in f_t \circ \mathrm{pr}_t(\mathfrak{Z})$.

Теорема 4. *Если отображения f_t взаимно однозначны (соответственно гомеоморфны), то и отображения $f_t \circ \mathrm{pr}_t | \mathfrak{Z}$ тоже взаимно однозначны (соответственно гомеоморфны).*

Доказательство. Предположим, что отображения f_t взаимно однозначны. Тогда, согласно равенству (2),

$$[f(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{y})] \equiv \bigwedge_t [f_t(\mathfrak{z}^t) = f_t(\mathfrak{y}^t)] \Rightarrow \bigwedge_t (\mathfrak{z}^t = \mathfrak{y}^t) \equiv (\mathfrak{z} = \mathfrak{y}).$$

С другой стороны, отображение f^{-1} определено на множестве $f(\mathfrak{Z})$, и точка $f^{-1}(\mathfrak{y})$ имеет координаты $f_t^{-1}(\mathfrak{y})$, $t \in T$. Если мы предположим, что отображения f_t^{-1} непрерывны, то отображение f^{-1} непрерывно (согласно II, 3).

Теорема 5. *Если пространство $\mathscr{Y}$ хаусдорфово, то множество $\mathfrak{Z}$ замкнуто.*

Это следует из того, что отображение $f\colon \prod_t \mathscr{X}_t \to (\mathscr{Y}^T)_{\text{set}}$ непрерывно и что $\mathfrak{Z} = f^{-1}(\Delta)$, где Δ—диагональ пространства $(\mathscr{Y}^T)_{\text{set}}$. Так как диагональ Δ замкнута (согласно теореме 2), то и множество $\mathfrak{Z}$ замкнуто.

Замечание. Как и в случае двух множителей, можно рассматривать диагональ пространства $\prod_t \mathscr{X}_t$, где $\mathscr{X}_t \subset \mathscr{X}$ для каждого t.

Определение (1) остается в силе, а теорема 1 переходит в следующее утверждение:

$$\Delta \underset{\text{top}}{=} \prod_t \mathscr{X}_t.$$

Если пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то множество Δ замкнуто в $\prod_t \mathscr{X}_t$.

V. Инварианты прямого произведения.

Теорема 1. *Пусть $0 \neq A_t \subset \mathscr{X}_t$. Множество $\prod_t A_t$ замкнуто или плотно в пространстве $\prod_t \mathscr{X}_t$ тогда и только тогда, когда каждое множество A_t соответственно замкнуто или плотно в пространстве $\mathscr{X}_t$.*

Это утверждение следует из III (1) (см. § 2, II (7)):

$$\left(\overline{\prod_t A_t} = \prod_t A_t\right) \equiv \left(\prod_t \bar{A}_t = \prod_t A_t\right) \equiv \bigwedge_t (\bar{A}_t = A_t),$$

$$\left(\overline{\prod_t A_t} = \prod_t \mathscr{X}_t\right) \equiv \left(\prod_t \bar{A}_t = \prod_t \mathscr{X}_t\right) \equiv \bigwedge_t (\bar{A}_t = \mathscr{X}_t).$$

Теорема 2. *Если для бесконечного множества значений t пространство $\mathscr{X}_t$ содержит более чем одну точку, то множество $\prod_t \mathscr{X}_t$ плотно в себе.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — элемент базы, содержащий данную точку $\mathfrak{z} \in \prod_t \mathscr{X}_t$. Можно предположить, что множество $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$G_{t_1} \times \ldots \times G_{t_n} \times \prod_t \mathscr{X}_t, \quad \text{где} \quad t \neq t_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $\mathfrak{y}$ — такая точка, что $\mathfrak{y}^{t_k} = \mathfrak{z}^{t_k}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\mathfrak{y}^t \neq \mathfrak{z}^t$ для бесконечного множества значений t. Тогда $\mathfrak{y} \in \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{y} \neq \mathfrak{z}$.

Таким образом любая окрестность точки $\mathfrak{z}$ содержит точку, отличную от $\mathfrak{z}$. Следовательно, $\mathfrak{z}$ есть точка накопления множества $\prod_t \mathscr{X}_t$.

Теорема 3. *Множество $\prod_t A_t$ является граничным тогда и только тогда, когда либо один из сомножителей является граничным множеством, либо $A_t \neq \mathscr{X}_t$ для бесконечного множества значений t.*

Множество $\prod_t A_t$ нигде не плотно тогда и только тогда, когда либо один из сомножителей является нигде не плотным множеством, либо $\bar{A}_t \neq \mathscr{X}_t$ для бесконечного множества значений t.

Доказательство следует непосредственно из III (2).

Теорема 3′. *Если одно из множеств A_t есть множество первой категории, то и $\prod_t A_t$ — множество первой категории.*

Доказательство. Предположим, что множество A_{t_0} первой категории. Тогда, согласно следствию 2а, § 15, VII, $A_{t_0}\times\prod_{t\neq t_0}\mathscr{X}_t$ есть множество первой категории в пространстве $\prod_t\mathscr{X}_t$. Это завершает доказательство, так как $\prod_t A_t\subset\left(A_{t_0}\times\prod_{t\neq t_0}\mathscr{X}_t\right)$.

Теорема 4. *Следующие свойства пространства инвариантны относительно произвольного прямого произведения: хаусдорфовость, регулярность, вполне регулярность.*

Доказательство по существу такое же, как и в случае двух множителей (теорема 3, § 15, VII).

Следствие 4а. *Пусть α — произвольное порядковое число. Тогда множество $\mathscr{J}^{\aleph_\alpha}$, так же как и любое его подмножество, вполне регулярно.*

Это следует из того, что интервал $\mathscr{J}$ вполне регулярен, а свойство быть вполне регулярным пространством наследственно.

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ — вполне регулярное $\mathscr{T}_1$-пространство. Тогда $\mathscr{X}\underset{\mathrm{top}}{\subset}\mathscr{J}^{\aleph_\alpha}$ для достаточно большого α.*

Более точно: $\aleph_\alpha$ *является мощностью множества* $\Phi=\mathscr{J}^{\mathscr{X}}$ *и*

(1) $$\mathscr{X}\underset{\mathrm{top}}{\subset}(\mathscr{J}^{\Phi})_{\mathrm{set}}.$$

Доказательство. Каждой точке $x\in\mathscr{X}$ сопоставим функцию $\mathfrak{z}(x)$ (переменной $f\in\Phi$), определенную условием

(2) $$\mathfrak{z}^f(x)=f(x).$$

Тогда $\mathfrak{z}(x)\in(\mathscr{J}^{\Phi})_{\mathrm{set}}$. Покажем, что

(3) $\mathfrak{z}$ — искомый гомеоморфизм, необходимый для доказательства формулы (1).

Очевидно, что для данной функции $f\in\Phi$ функция $\mathfrak{z}^f$ непрерывна (в силу равенства (2)). Поэтому функция $\mathfrak{z}$ непрерывна (согласно теореме 3, п. II) и взаимно однозначна. В самом деле, пусть $x_0\neq x_1$. Так как $\mathscr{X}$—вполне регулярное $\mathscr{T}_1$-пространство, существует функция $f\in\Phi$, такая, что $f(x_0)=0$ и $f(x_1)=1$. Поэтому, в силу равенства (2), $\mathfrak{z}^f(x_0)\neq\mathfrak{z}^f(x_1)$ и, следовательно, $\mathfrak{z}(x_0)\neq\mathfrak{z}(x_1)$.

Теперь предположим, что множество G открыто в пространстве $\mathscr{X}$; покажем, что множество $\mathfrak{z}(G)$ открыто в множестве $\mathfrak{z}(\mathscr{X})$. Достаточно показать, что для $x_0\in G$ существует открытое множество $\mathfrak{G}$, для которого $\mathfrak{z}(x_0) \in \mathfrak{G}$ и

(4) $$\mathfrak{G} \cap \mathfrak{z}(\mathcal{X}) \subset \mathfrak{z}(G).$$

Пусть функция $f \in \Phi$ такова, что

(5) $$f(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in \mathcal{X} - G.$$

Положим $\mathfrak{G} = \underset{\mathfrak{y}}{\mathsf{E}}(\mathfrak{y}^f \neq 1)$, где $\mathfrak{y} \in (\mathcal{J}^{\Phi})_{\text{set}}$. Так как проекция точки $\mathfrak{y}$ — непрерывная функция точки $\mathfrak{y}$ (согласно II, 1), то множество $\mathfrak{G}$ открыто в пространстве $(\mathcal{J}^{\Phi})_{\text{set}}$. Более того, $\mathfrak{z}(x_0) \in \mathfrak{G}$, так как $\mathfrak{z}^f(x_0) = f(x_0) \neq 1$, в силу равенств (2) и (5).

Наконец, для доказательства соотношения (4) положим $\mathfrak{y} \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{z}(\mathcal{X})$. Тогда $\mathfrak{y}^f \neq 1$, и существует точка x, такая, что $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}(x)$. Следовательно, $\mathfrak{y}^f \neq \mathfrak{z}^f(x)$, откуда, в силу (2), $\mathfrak{y}^f = f(x)$ и поэтому $f(x) \neq 1$. Следовательно, в силу (5), $x \in G$. Так как $x \in G$ и $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}(x)$, мы имеем $\mathfrak{y} \in \mathfrak{z}(G)$.

Замечания. Итак, вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство есть с топологической точки зрения не что иное, как подмножество обобщенного куба $\mathcal{J}^{\aleph_\alpha}$. Как мы увидим позже, подмножества куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ топологически эквивалентны метрическим сепарабельным пространствам.

Во втором томе (гл. 4) мы также увидим, что замкнутые подмножества пространства $\mathcal{J}^{\aleph_\alpha}$ топологически эквивалентны компактным хаусдорфовым пространствам.

Замкнутые подмножества пространства $\mathcal{E}^{\aleph_\alpha}$ топологически эквивалентны Q-пространствам Хьюита [1]).

Теорема 6 [2]). *Если пространства $\mathcal{X}_n$ сепарабельны, $n = 1, 2, \ldots$, то счетное произведение $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ также сепарабельно.*

В частности, $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ и $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ — сепарабельные пространства.

Доказательство. Пусть R_n — счетное всюду плотное множество в пространстве $\mathcal{X}_n$, а r_n — фиксированная точка множества R_n. Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество всех точек $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}^1, \mathfrak{r}^2, \ldots)$, таких, что:

1° $\mathfrak{r}^n \in \mathcal{X}_n$ для каждого n,

2° для достаточно больших m (зависящих от $\mathfrak{r}$) имеют место равенства

$$\mathfrak{r}^m = r_m, \quad \mathfrak{r}^{m+1} = r_{m+1}, \quad \ldots .$$

1) См. Хьюит [3]; Катетов [3]; Сирота [1], Гилман и Джерисон [1]. См. также Мрувка [5] и Энгелькинг и Мрувка [1], где подчеркивается аналогия с компактными пространствами.

2) Эта теорема остается справедливой для прямого произведения континуума сепарабельных пространств, см. Пондичери [1], стр. 835, Хьюит [2], Марчевский [1].

Очевидно, что множество $\mathfrak{R}$ счетно и имеет общие точки с каждым множеством вида $G_1 \times \ldots \times G_k \times \mathscr{X}_{k+1} \times \mathscr{X}_{k+2} \times \ldots$, где G_i — непустое открытое множество в пространстве $\mathscr{X}_i$, $i \leqslant k$. Следовательно, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{G} \neq 0$ для каждого открытого множества $\mathfrak{G}\,(\neq 0)$. Это завершает доказательство.

Замечание. Если $\mathscr{X}_n = \mathscr{E}$ (или $\mathscr{I}$) при $n = 1, 2, \ldots$, то можно предположить, что множество $\mathfrak{R}$ образовано последовательностями, все члены которых рациональны, причем только конечное число членов этих последовательностей отлично от нуля.

Теорема 7. *Если множества A_n обладают свойством Бэра при $n = 1, 2, \ldots$, то множество $\prod\limits_n A_n$ тоже обладает свойством Бэра.*

Доказательство. В силу § 3, VIII (1), имеем

$$\prod_n A_n = \bigcap_n (\mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_{n-1} \times A_n \times \mathscr{X}_{n+1} \times \ldots),$$

а в силу следствия 2а, § 15, VII, множество в скобках обладает свойством Бэра. Это завершает доказательство, так как свойство Бэра счетно-мультипликативно (см. § 11, III, теорема 1).

Замечание. Множество $\prod\limits_n A_n$ может обладать свойством Бэра (более того, быть нигде не плотным), даже если ни одно из множеств A_n не обладает этим свойством. Примером является случай, когда $\mathscr{X}_i = \mathscr{I}$ и A_i — множество, не обладающее свойством Бэра, принадлежащее интервалу $(0, 1/2)$.

Теорема 8. *Пусть $f_t : \mathscr{X}_t \to \mathscr{Y}_t$ при $t \in T$, и пусть $\mathfrak{f}$ — отображение-произведение: $\prod\limits_t \mathscr{X}_t \to \prod\limits_t \mathscr{Y}_t$, т. е.* (см. § 3, VII (11))

$$[\mathfrak{y} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x})] \equiv \bigwedge_t [\mathfrak{y}^t = f_t(\mathfrak{x}^t)].$$

Если отображение $\mathfrak{f}$ открыто в точке $\mathfrak{y}_0 \in \mathfrak{f}\left(\prod\limits_t \mathscr{X}_t\right)$, то отображение f_t открыто в точке $\mathfrak{y}_0^t$ для каждого $t \in T$.

Обратно, если для каждого t отображение f_t открыто в точке $\mathfrak{y}_0^t$ и для каждого t, за исключением конечного числа, f_t есть отображение на, то отображение $\mathfrak{f}$ открыто в точке $\mathfrak{y}_0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5, § 15, VII, за исключением того, что в первой части вместо формулы § 3, III (25), следует использовать формулу § 3, VIII (13). Во второй части предполагается, что множество $\mathfrak{G}$ (принадлежащее базе пространства $\prod\limits_t \mathscr{X}_t$) имеет вид

$$\mathfrak{G} = G_{t_1} \times \ldots \times G_{t_n} \times \prod_{t'} \mathscr{X}_{t'}, \quad \text{где} \quad t' \neq t_k \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n,$$

и вместо III (2) и § 3, III (24) следует использовать III (3) и § 3, VIII (12).

VI. Пределы обратных спектров. Рассмотрим обратный спектр $(T, \mathscr{X}, f)$, где (см. § 3, XIII) T — направленное множество, $\mathscr{X}_t$ — топологическое пространство, определенное для каждого $t \in T$, и $f_{t_0 t_1}$ — непрерывное отображение, определенное для пар t_0, t_1, таких, что $t_0 \leqslant t_1$; $f_{t_0 t_1} : \mathscr{X}_{t_1} \to \mathscr{X}_{t_0}$. Так же как в § 3 (XIII (2) и (3)), отображение f обладает свойством транзитивности (для любых элементов $t_1 < t_2 < t_3$ множества T имеет место равенство $f_{t_1 t_2} f_{t_2 t_3} = f_{t_1 t_3}$) и тождественности (для любого $t \in T$ отображение f_{tt} тождественное). Напомним, что предел обратного спектра $(T, \mathscr{X}, f)$, обозначаемый $\mathscr{X}_\infty$, определяется условиями

$$(1) \qquad \mathscr{X}_\infty \subset \prod_t \mathscr{X}_t \quad \text{и} \quad (\mathfrak{z} \in \mathscr{X}_\infty) \equiv \bigwedge_{t_0 < t_1} [f_{t_0 t_1}(\mathfrak{z}^{t_1}) = \mathfrak{z}^{t_0}].$$

Теорема 1. *Если каждое пространство $\mathscr{X}_t$, $t \in T$, хаусдорфово (соответственно вполне регулярно), то и пространство $\mathscr{X}_\infty$ хаусдорфово (соответственно вполне регулярно).*

Более того, множество $\mathscr{X}_\infty$ замкнуто в пространстве $\prod_t \mathscr{X}_t$.

Доказательство. В силу теоремы 4, п. V, пространство $\prod_t \mathscr{X}_t$ хаусдорфово (соответственно вполне регулярно). Следовательно, и пространство $\mathscr{X}_\infty$ также хаусдорфово (вполне регулярно).

Для доказательства того, что множество $\mathscr{X}_\infty$ замкнуто, положим $\mathfrak{z} \in \left(\prod_t \mathscr{X}_t\right) - \mathscr{X}_\infty$. Мы должны определить открытое множество $\mathfrak{G}$, такое, что

$$(2) \qquad \mathfrak{z} \in \mathfrak{G} \quad \text{и} \quad \mathfrak{G} \cap \mathscr{X}_\infty = 0.$$

Так как $\mathfrak{z} \notin \mathscr{X}_\infty$, то, в силу формулы (1), существует пара $t_0 < t_1$, такая, что $f_{t_0 t_1}(\mathfrak{z}^{t_1}) \neq \mathfrak{z}^{t_0}$. Так как пространство $\mathscr{X}_{t_0}$ хаусдорфово, существуют множества U и V, открытые в $\mathscr{X}_{t_0}$, такие, что

$$(3) \qquad \mathfrak{z}^{t_0} \in U, \qquad f_{t_0 t_1}(\mathfrak{z}^{t_1}) \in V \quad \text{и} \quad U \cap V = 0.$$

Положим

$$(4) \qquad \mathfrak{G} = \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{y}} (\mathfrak{y}^{t_0} \in U)[f_{t_0 t_1}(\mathfrak{y}^{t_1}) \in V].$$

Множество $\mathfrak{G}$ открыто, так как отображение $f_{t_0 t_1}$ и проекция непрерывны. Очевидно, что $\mathfrak{z} \in \mathfrak{G}$, поэтому окончательно мы имеем $\mathfrak{G} \cap \mathscr{X}_\infty = 0$, так как если $\mathfrak{y} \in \mathscr{X}_\infty$ и $f_{t_0 t_1}(\mathfrak{y}^{t_1}) \in V$, то из формулы (1) следует, что $\mathfrak{y}^{t_0} \in V$. Значит, $\mathfrak{y}^{t_0} \notin U$, поскольку $U \cap V = 0$, и тогда $\mathfrak{y} \notin \mathfrak{G}$.

Теорема 2. *Семейство множеств $f_t^{-1}(G_t) = \mathscr{X}_\infty \cap \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} (\mathfrak{z}^t \in G_t)$, где $t \in T$ и G_t пробегает все открытые подмножества пространства $\mathscr{X}_t$, является базой пространства $\mathscr{X}_\infty$.*

Доказательство. Так как семейство множеств $\mathrm{pr}_t^{-1}(G_t)$ является подбазой пространства $\prod_t \mathscr{X}_t$ (см. I (1) и II (2)), то множества $\mathscr{X}_\infty \cap \mathrm{pr}_t^{-1}(G_t)$ образуют подбазу пространства $\mathscr{X}_\infty$. В действительности эта подбаза является базой пространства $\mathscr{X}_\infty$. Это означает, что пересечение любого конечного числа множеств такого вида есть множество того же вида. В самом деле, пусть $G_{t_1}, \ldots, G_{t_k}$ — конечная система множеств, открытых соответственно в пространствах $\mathscr{X}_{t_1}, \ldots, \mathscr{X}_{t_k}$, и пусть $t \geqslant t_i$ для каждого $i \leqslant k$. Положим

$$(5) \qquad G_t = f_{t_1 t}^{-1}(G_{t_1}) \cap \ldots \cap f_{t_k t}^{-1}(G_{t_k}).$$

Отсюда следует (см. § 3, XIII (7)) равенство

$$f_t^{-1}(G_t) = f_t^{-1} f_{t_1 t}^{-1}(G_{t_1}) \cap \ldots \cap f_t^{-1} f_{t_k t}^{-1}(G_{t_k}) = \\ = f_{t_1}^{-1}(G_{t_1}) \cap \ldots \cap f_{t_k}^{-1}(G_{t_k}).$$

Теорема 3. *Для каждого множества* $\mathfrak{Z} \subset \mathscr{X}_\infty$ *мы имеем*

$$(\mathfrak{z} \in \overline{\mathfrak{Z}}) \equiv \bigwedge_t (\mathfrak{z}^t \in \overline{\mathfrak{Z}}^t), \quad \text{где} \quad \mathfrak{z} \in \mathscr{X}_\infty.$$

Иначе говоря, $\overline{\mathfrak{Z}} = \bigcap_t \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} (\mathfrak{z}^t \in \overline{\mathfrak{Z}}^t) = \bigcap_t \mathrm{pr}_t^{-1}(\overline{\mathfrak{Z}}^t)$, *где* $\mathfrak{Z}^t$ — *множество таких точек* $\mathfrak{z}^t$, *что* $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$.

Доказательство. Импликация $(\mathfrak{z} \in \overline{\mathfrak{Z}}) \Rightarrow (\mathfrak{z}^t \in \overline{\mathfrak{Z}}^t)$ следует из непрерывности проекции. Обратно, пусть $\mathfrak{z} \in \mathscr{X}_\infty - \overline{\mathfrak{Z}}$. Тогда, в силу теоремы 2, существуют $t \in T$ и открытое множество G_t в пространстве $\mathscr{X}_t$, такие, что $\mathfrak{z}^t \in G_t$ и $\mathfrak{Z} \cap \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{y}} (\mathfrak{y}^t \in G_t) = 0$. Это означает, что $\mathfrak{Z}^t \cap G_t = 0$. Следовательно, $\overline{\mathfrak{Z}}^t \cap G_t = 0$ (множество G_t открыто). Отсюда вытекает, что $\mathfrak{z}^t \notin \overline{\mathfrak{Z}}^t$.

Теорема 4. *Пусть* $(T, \mathscr{X}, f)$ *и* $(T, \mathscr{Y}, g)$ — *два обратных спектра, и пусть отображение* $h_t : \mathscr{X}_t \to \mathscr{Y}_t$ *непрерывно, а отображение* $h_\infty : \mathscr{X}_\infty \to \mathscr{Y}_\infty$ *удовлетворяет условию коммутативности* (§ 3, XIII). *Тогда отображение* h_∞ *непрерывно.*

Это сразу следует из формулы (см. § 3, XIII (11))

$$h_\infty^t(\mathfrak{z}) = h_t(\mathfrak{z}^t),$$

так как проекция и отображение h_t непрерывны.

Следствие 4a. *В предположениях теоремы 4 допустим, что* h_t — *гомеоморфизм на. Тогда* h_∞ — *гомеоморфизм пространства* $\mathscr{X}_\infty$ *на пространство* $\mathscr{Y}_\infty$.

Это предложение следует из теоремы 4 и из замечания (12), сделанного в § 3, XIII, утверждающего, что если каждое h_t — взаимно однозначное отображение на, то и h_∞ — взаимно однозначное отображение на.

§ 17. Пространство $2^{\mathscr{X}}$. Экспоненциальная топология

I. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ — топологическое пространство; обозначим через $2^{\mathscr{X}}$ множество всех замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$:

$$(1) \qquad (F \in 2^{\mathscr{X}}) \equiv (F = \bar{F}).$$

Пусть теперь $A \subset \mathscr{X}$. По определению, 2^A *есть множество всех замкнутых подмножеств множества* A. Таким образом, для множества $F \in 2^{\mathscr{X}}$ мы имеем

$$(2) \qquad (F \in 2^A) \equiv (F \subset A), \quad \text{т. е.} \quad 2^A = \mathop{\mathrm{E}}_F (F \subset A).$$

Следовательно, для множеств $F \in 2^{\mathscr{X}}$

$$(3) \qquad \mathop{\mathrm{E}}_F (F \cap A \neq 0) = 2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - A}.$$

Топология в множестве $2^{\mathscr{X}}$ (называемая *экспоненциальной* топологией) есть слабейшая топология, в которой множества 2^A открыты (в $2^{\mathscr{X}}$) для открытых A и замкнуты (в $2^{\mathscr{X}}$) для замкнутых A.

Иными словами, мы предполагаем, что семейство всех множеств 2^G и всех множеств $2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - G}$, где G открыто в пространстве $\mathscr{X}$, является открытой *подбазой* множества $2^{\mathscr{X}}$.

Введем следующие обозначения: пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — некоторая конечная совокупность произвольных множеств ($n \geqslant 0$); положим

$$(4) \quad \boldsymbol{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n) = 2^{A_0} \cap (2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - A_1}) \cap \ldots \cap (2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - A_n}),$$

т. е.

$$(4') \quad F \in \boldsymbol{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n) \equiv (F \subset A_0)(F \cap A_1 \neq 0) \ldots (F \cap A_n \neq 0).$$

Таким образом, множества $\boldsymbol{B}(G_0, G_1, \ldots, G_n)$, где $G_0, \ldots, G_n$ открыты, образуют открытую базу пространства $2^{\mathscr{X}}$.

Мы можем, конечно, считать, что $A_i \subset A_0$ для $i = 1, \ldots, n$, поскольку $\boldsymbol{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n) = \boldsymbol{B}(A_0, A_1 \cap A_0, \ldots, A_n \cap A_0)$.

Множество $2^{\mathscr{X}}$ с топологией, определенной таким образом, является топологическим пространством [1]).

Пустое множество является изолированным элементом этого пространства.

---

[1]) См. Майкл [1], Вьеторис [1], Шоке [1], Фринк [1].

II. Основные свойства. Следующие формулы справедливы в произвольном $\mathcal{T}_1$-пространстве $\mathscr{X}$:

(1) $$2^{A_0 \cap A_1} = 2^{A_0} \cap 2^{A_1}, \text{ и вообще } 2^{\bigcap_t A_t} = \bigcap_t 2^{A_t},$$

(2) $$(A \subset B) \equiv (2^A \subset 2^B), \text{ откуда } (A = B) \equiv (2^A = 2^B),$$

(3) $$\overline{2^A} = 2^{\overline{A}},$$

(4) $$\mathrm{Int}(2^A) = 2^{\mathrm{Int}(A)}.$$

Формулы (1) и (2) очевидны. Кроме того, из (2) следует, что

$$2^A \subset 2^{\overline{A}} \quad \text{и} \quad 2^{\mathrm{Int}(A)} \subset 2^A,$$

откуда $\overline{2^A} \subset 2^{\overline{A}}$ и $2^{\mathrm{Int}(A)} \subset \mathrm{Int}(2^A)$, поскольку множество $2^{\overline{A}}$ замкнуто, а множество $2^{\mathrm{Int}(A)}$ открыто (в $2^{\mathscr{X}}$).

Остается показать, что

(3') $$2^{\overline{A}} \subset \overline{2^A},$$

(4') $$\mathrm{Int}(2^A) \subset 2^{\mathrm{Int}(A)}.$$

Доказательство формулы (3'). Пусть $F_0 \in 2^{\overline{A}}$, т. е. $F_0 \subset \overline{A}$. Пусть $\boldsymbol{B}(G_0, \ldots, G_n)$ — произвольный элемент базы, содержащий F_0. Тогда $F_0 \subset G_0$ и $F_0 \cap G_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $F_0 \subset \overline{A}$, существует такое p_i, что $p_i \in A \cap G_0 \cap G_i$. Положим $F = (p_1, \ldots, p_n)$. Тогда $F \subset A \cap G_0$ и $F \cap G_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $F \in 2^A \cap \boldsymbol{B}(G_0, \ldots, G_n)$. Отсюда $F_0 \in \overline{2^A}$.

Доказательство формулы (4'). Пусть $F_0 \notin 2^{\mathrm{Int}(A)}$, т. е. $F_0 \not\subset \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - A}$. Тогда $F_0 \cap \overline{\mathscr{X} - A} \neq 0$. Пусть $\boldsymbol{B}(G_0, \ldots, G_n)$ — произвольный элемент базы, содержащий F_0. Тогда $F_0 \subset G_0$ и $F_0 \cap G_i \neq 0$. Поскольку $F_0 \cap \overline{\mathscr{X} - A} \neq 0$, существует $p \in G_0 - A$. Положим $F = F_0 \cup (p)$. Тогда $F \not\subset A$. Кроме того, $F \subset G_0$ и $F \cap G_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, n$, т. е. $F \in \boldsymbol{B}(G_0, \ldots, G_n)$. Таким образом, каждая окрестность множества F_0 (в $2^{\mathscr{X}}$) содержит такое F, что $F \not\subset A$, т. е. $F \in 2^{\mathscr{X}} - 2^A$. Отсюда следует, что $F_0 \in \overline{2^{\mathscr{X}} - 2^A}$, т. е. $F_0 \notin \mathrm{Int}(2^A)$.

Формулы (3) и (4) являются частными случаями следующей формулы[1]) (которая будет использована в дальнейшем): *если* $A_i \subset A_0$ *для* $i = 1, \ldots, n$, *то*

(5) $$\overline{\boldsymbol{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n)} = \boldsymbol{B}(\overline{A}_0, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n).$$

Доказательство. Согласно I (4) и II (3) — (4), имеем

$$\overline{\boldsymbol{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n)} \subset \overline{2^{A_0}} \cap \overline{2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - A_1}} \cap \ldots \cap \overline{2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - A_n}} \subset$$
$$\subset 2^{\overline{A}_0} \cap \left(2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - \overline{A}_1}\right) \cap \ldots \cap \left(2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X} - \overline{A}_n}\right) = \boldsymbol{B}(\overline{A}_0, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n).$$

[1]) См. Майкл [1], стр. 156.

Докажем обратное включение; пусть

$$(6) \qquad F \in \boldsymbol{B}(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n) \quad \text{и} \quad F \in \boldsymbol{G},$$

где $\boldsymbol{G}$ открыто. Покажем, что

$$(7) \qquad \boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{B}(A_0, A_1, \ldots, A_n) \neq 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\boldsymbol{G}$ принадлежит базе пространства $2^{\mathscr{X}}$, т. е. что $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}(G_0, G_1, \ldots, G_m)$, где G_j открыты (при $j \geqslant 0$) и, кроме того, $G_j \subset G_0$.

Тогда, согласно (6) и I (4'), мы имеем

$$(8) \qquad \begin{aligned} &F \subset \bar{A}_0, \quad F \cap \bar{A}_i \neq 0 \quad \text{для} \quad i \geqslant 1, \\ &F \subset G_0, \quad F \cap G_j \neq 0 \quad \text{для} \quad j \geqslant 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G_0 \cap \bar{A}_i \neq 0 \neq G_j \cap \bar{A}_0, \quad \text{откуда} \quad G_0 \cap A_i \neq 0 \neq G_j \cap A_0.$$

Пусть $p_i \in G_0 \cap A_i$ и $q_j \in G_j \cap A_0$. Положим $K = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m)$. Легко проверить, что множество K принадлежит левой части соотношения (7). Это завершает доказательство.

Теорема 1. *Множества* $\underset{F}{\mathrm{E}}(F \subset A)$ *и* $\underset{F}{\mathrm{E}}(F \cap A \neq 0)$ *замкнуты (открыты) в пространстве* $2^{\mathscr{X}}$ *тогда и только тогда, когда* A *замкнуто (открыто) в* $\mathscr{X}$.

Достаточность этого условия следует непосредственно из определения экспоненциальной топологии. Его необходимость вытекает из формул (3) и (4).

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{X}$ *есть* $\mathscr{T}_1$*-пространство и* A — *произвольное его подмножество. Тогда множество* $\underset{F}{\mathrm{E}}(A \subset F)$ *замкнуто.*

Доказательство. Очевидно, что $(A \not\subset F) \equiv \bigvee_{x \in A} (F \subset \mathscr{X} - (x))$, поэтому

$$\underset{F}{\mathrm{E}}(A \not\subset F) = \bigcup_{x \in A} \underset{F}{\mathrm{E}}(F \subset \mathscr{X} - (x)).$$

Так как $\mathscr{X}$ является $\mathscr{T}_1$-пространством, множество $\mathscr{X} - (x)$ открыто, следовательно, и множество $\underset{F}{\mathrm{E}}(F \subset \mathscr{X} - (x))$ открыто, поэтому множество $\underset{F}{\mathrm{E}}(A \not\subset F)$ тоже открыто.

Теорема 3. *Если* $\mathscr{X}$ *есть* $\mathscr{T}_1$*-пространство, то* $2^{\mathscr{X}}$ *также* $\mathscr{T}_1$*-пространство.*

Доказательство. Пусть $K \in 2^{\mathcal{X}}$. Мы должны показать, что множество $\underset{F}{\mathsf{E}}(F = K)$ замкнуто. Известно, что

$$(F = K) \equiv [(F \subset K) \text{ и } (K \subset F)].$$

Поэтому

$$\underset{F}{\mathsf{E}}(F = K) = \underset{F}{\mathsf{E}}(F \subset K) \cap \underset{F}{\mathsf{E}}(K \subset F).$$

Так как два последних множества замкнуты (в силу теорем 1 и 2), их пересечение также замкнуто.

Теорема 4. *Семейство всех конечных подмножеств $\mathcal{T}_1$-пространства $\mathcal{X}$ плотно в пространстве $2^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{B}$ — элемент базы пространства $2^{\mathcal{X}}$ (см. I (4)). Тогда существует система открытых множеств $G_0, \ldots, G_n$ пространства $\mathcal{X}$, такая, что множество $\boldsymbol{B}$ представляет собой семейство всех множеств F, удовлетворяющих условию I (4). Покажем, что среди них есть конечное множество.

Если $G_0 = 0$ (и, следовательно, $n = 0$), то пустое множество, очевидно, удовлетворяет условию I (4). Предположим, что $G_0 \neq 0$. Пусть F — произвольное множество, удовлетворяющее условию I (4), и пусть

$$p_0 \in F \quad \text{и} \quad p_i \in F \cap G_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда множество $F^* = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ является искомым множеством.

Теорема 5. *Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на. Пусть $\boldsymbol{D}$ — семейство всех множеств $\overset{-1}{f}(y)$* (т. е. $\boldsymbol{D}$ определяет разбиение пространства $\mathcal{X}$, индуцированное отображением f) *и $\overset{1}{f}$ — отображение, обратное отображению $\overset{-1}{f}$* (т. е. $\overset{1}{f}(D) = \overset{1}{f}(D)$ для $D \in \boldsymbol{D}$, см. § 3, II (7)). *Тогда в случае, когда $\boldsymbol{D}$ имеет экспоненциальную топологию, а $\mathcal{Y}$ является $\mathcal{T}_1$-пространством, отображение $\overset{1}{f}: \boldsymbol{D} \to \mathcal{Y}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть множество $G \subset \mathcal{Y}$ открыто. Покажем, что множество $\overset{-1}{f}(G)$ открыто в $\boldsymbol{D}$, т. е. что оно представляет собой пересечение множества $\boldsymbol{D}$ с открытым подмножеством множества $2^{\mathcal{X}}$. Мы имеем (§ 3, III (17))

$$\overset{-1}{f}(G) = \boldsymbol{D} \cap \underset{F}{\mathsf{E}}\left[F \subset f^{-1}(G)\right], \quad \text{где} \quad F \in 2^{\mathcal{X}}.$$

Так как отображение f непрерывно, множество $f^{-1}(G)$ открыто, поэтому открыто и множество $\underset{F}{\mathsf{E}}\left[F \subset f^{-1}(G)\right]$.

III. Непрерывные многозначные отображения. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два топологических пространства, и пусть $F_t : \mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}}$. Имеют место следующие формулы, доказательство которых полностью аналогично доказательству соответствующих формул теории множеств (см. § 3, V):

(i) $$(F_0 \subset F_1) \Rightarrow [F_1^{-1}(2^A) \subset F_0^{-1}(2^A)];$$

(ii) $$(F_0 \cup F_1)^{-1}(2^A) = F_0^{-1}(2^A) \cap F_1^{-1}(2^A).$$

Если множество A *замкнуто*, то имеет место более общая формула

(iii) $$\left(\overline{\bigcup_t F_t}\right)^{-1}(2^A) = \bigcap_t F_t^{-1}(2^A),$$

а именно

$$\left(\overline{\bigcup_t F_t(y)} \subset A\right) \equiv \bigwedge_t (F_t(y) \subset A),$$

следовательно,

$$\left[y \in \left(\overline{\bigcup_t F_t}\right)^{-1}(2^A)\right] \equiv \left(\overline{\bigcup_t F_t(y)} \subset A\right) \equiv \bigwedge_t (F_t(y) \subset A) \equiv \left(y \in \bigcap_t F_t^{-1}(A)\right).$$

Теорема 1. *Отображение F непрерывно тогда и только тогда, когда множество*

(1) $$F^{-1}(2^A) = \mathop{\mathsf{E}}_y [F(y) \in 2^A] = \mathop{\mathsf{E}}_y [F(y) \subset A]$$

открыто в пространстве $\mathscr{Y}$, если A открыто в $\mathscr{X}$, и замкнуто в пространстве $\mathscr{Y}$, если A замкнуто в $\mathscr{X}$;

эквивалентно: *когда для каждого замкнутого (соответственно открытого) множества $A \subset \mathscr{X}$ множество*

(2) $$\mathscr{Y} - F^{-1}(2^{\mathscr{X} - A}) = \mathop{\mathsf{E}}_y [F(y) \cap A \neq 0]$$

замкнуто (соответственно открыто) в пространстве $\mathscr{Y}$.

Более точно: *отображение F непрерывно в точке y_0 тогда и только тогда, когда выполняются одновременно две импликации:*

(3) $$[y_0 \in F^{-1}(2^G)] \Rightarrow [y_0 \in \operatorname{Int}(F^{-1}(2^G))]$$

для любого множества G, открытого в пространстве $\mathscr{X}$, и

(4) $$[y_0 \in \overline{F^{-1}(2^K)}] \Rightarrow [y_0 \in F^{-1}(2^K)]$$

для любого множества K, замкнутого в пространстве $\mathscr{X}$.

Доказательство. В силу § 13, III (3), если отображение F непрерывно в точке y_0, то выполняются следующие импликации:

(5) $$[y_0 \in F^{-1}(\boldsymbol{G})] \Rightarrow [y_0 \in \operatorname{Int} F^{-1}(\boldsymbol{G})],$$

если множество $\boldsymbol{G}$ открыто в пространстве $2^{\mathscr{X}}$, и

$$(6)\qquad [y_0 \in \overline{F^{-1}(\boldsymbol{F})}] \Rightarrow [y_0 \in F^{-1}(\boldsymbol{F})],$$

если множество $\boldsymbol{F}$ замкнуто в пространстве $2^{\mathscr{X}}$. Заменяя множество $\boldsymbol{G}$ множеством 2^G в том случае, когда G открыто, и заменяя множество $\boldsymbol{F}$ множеством 2^K в том случае, когда множество K замкнуто, получим формулы (3) и (4).

Обратно, если импликация (5) истинна, то отображение F непрерывно в точке y_0 (в силу § 13, III (3)). Более того, область изменения множества $\boldsymbol{G}$ можно ограничить подбазой пространства $2^{\mathscr{X}}$ (см. § 13, III), так что можно предположить, что либо $\boldsymbol{G} = 2^A$, либо $\boldsymbol{G} = 2^{\mathscr{X}} - 2^{\mathscr{X}-A}$, где множество A открыто. В первом случае формула (5) следует непосредственно из формулы (3). Во втором случае ее легко вывести из формулы (4).

Следствие 1а. *Пусть $D(F)$ — множество точек разрыва отображения F* (см. § 13, III (3)). *Тогда*

$$(7)\qquad D(F) = \bigcup_G \{F^{-1}(2^G) - \operatorname{Int}[F^{-1}(2^G)]\} \cup \bigcup_K \{\overline{F^{-1}(2^K)} - F^{-1}(2^K)\},$$

где G пробегает все открытые подмножества пространства $\mathscr{X}$, а K — все его замкнутые подмножества.

Теорема 2. *Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение. Обратное отображение $f^{-1}: 2^{\mathscr{Y}} \to 2^{\mathscr{X}}$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение f одновременно замкнуто и открыто.*

В частности (*ср. следствие* 3а),

$$\{\overset{-1}{f}: \mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}} \text{ непрерывно}\} \equiv \{f \text{ открыто и замкнуто}\}.$$

Если отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ замкнуто, то отображение $f^1: 2^{\mathscr{X}} \to 2^{\mathscr{Y}}$ непрерывно.

Доказательство. Первая часть теоремы следует непосредственно из теоремы 1 (1), теоремы 1, II и из § 3, III (13‴) (ср. также § 3, II (3)).

Предположим теперь, что отображение f замкнуто. Пусть $B = \overline{B} \subset \mathscr{Y}$. Покажем, что множество $\underset{A}{\mathsf{E}}[f^1(A) \subset B]$ замкнуто, а множество $\underset{A}{\mathsf{E}}[f^1(A) \cap B = 0]$ открыто для всякого $A \in 2^{\mathscr{X}}$. Согласно § 3, III (13′)

и (13″), мы имеем

$$\mathop{\mathsf{E}}_{A}[f^1(A)\subset B]=\mathop{\mathsf{E}}_{A}[A\subset f^{-1}(B)],$$

$$\mathop{\mathsf{E}}_{A}[f^1(A)\cap B=0]=\mathop{\mathsf{E}}_{A}[A\cap f^{-1}(B)=0],$$

и поскольку $f^{-1}(B)\in 2^{\mathcal{X}}$, то в соответствии с определением топологии в пространстве $2^{\mathcal{X}}$ множество $\mathop{\mathsf{E}}_{A}[A\subset f^{-1}(B)]$ замкнуто, а множество $\mathop{\mathsf{E}}_{A}[A\cap f^{-1}(B)=0]$ открыто (A пробегает пространство $2^{\mathcal{X}}$).

Замечание 1. Теорему 2 можно сформулировать в следующем более общем виде:

Пусть отображение f непрерывно; отображение f^{-1} непрерывно в точке B тогда и только тогда, когда отображение f одновременно замкнуто и открыто в B.

Доказательство см. в § 18, III, теорема 5а.

Теорема 3. *Пусть отображение $f:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ непрерывно. Положим $F(y)=(f(y))$. Тогда отображение $F:\mathcal{Y}\to 2^{\mathcal{X}}$ непрерывно (в предположении, что $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство).*

Теорема 3 следует из равенства

$$\mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y)\subset A]=\mathop{\mathsf{E}}_{y}[f(y)\in A]=f^{-1}(A).$$

Следствие 3а. *Пусть $F(x)=(x)$. Тогда отображение $F:\mathcal{X}\to 2^{\mathcal{X}}$ есть гомеоморфизм, отображающий пространство $\mathcal{X}$ на множество $\boldsymbol{S}$ всех одноэлементных множеств (в предположении, что $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство).*

Отображение F непрерывно, в силу теоремы 3. Обратное отображение $(x)\to x$ тоже непрерывно, ибо семейство всех множеств (x), таких, что $x\in G$ (т. е. таких, что $(x)\subset G$), открыто в множестве $\boldsymbol{S}$, если множество G открыто в пространстве $\mathcal{X}$.

Теорема 4. *Объединение двух непрерывных функций $F=F_0\cup F_1$ непрерывно.*

Это предложение непосредственно вытекает из теоремы 1 и формулы (ii).

Замечание 2. Более точно: *объединение двух функций, непрерывных в точке y_0, непрерывно в точке y_0.* Это следует из аналогичного предложения для полунепрерывных функций (установленного в § 18).

Следствие 4а. *Объединение $K\cup L$, рассматриваемое как отображение пространства $2^{\mathcal{X}}\times 2^{\mathcal{X}}$ на пространство $2^{\mathcal{X}}$, непрерывно.*

Теорема 5. *Пусть множество E открыто-замкнуто в пространстве $\mathcal{X}$. Положим $F(K)=K\cap E$. Тогда F — непрерывное отображение пространства $2^{\mathcal{X}}$ в пространство 2^{E}.*

Доказательство. Согласно формуле (1), мы должны показать, что множество $\underset{K}{\mathsf{E}}(K \cap E \subset A)$ открыто всякий раз, когда множество A открыто, и замкнуто всякий раз, когда множество A замкнуто. Но $(K \cap E \subset A) \equiv (K \subset A \cup (-E))$, и требуемое заключение следует из теоремы 1, п. II, поскольку множество $A \cup (-E)$ открыто, если A открыто, и замкнуто, если A замкнуто.

Следствие 5а. *Пусть $\mathscr{X} = A_0 \cup A_1$, где $A_0 \cap A_1 = 0$ и множества A_0 и A_1 замкнуты. Тогда*

$$2^{A_0 \cup A_1} \underset{\text{top}}{=} 2^{A_0} \times 2^{A_1}.$$

Доказательство. Положим $F(K, L) = K \cup L$, где $K \in 2^{A_0}$ и $L \in 2^{A_1}$. Отображение F есть искомый гомеоморфизм, так как оно непрерывно, согласно теореме 4, взаимно однозначно (поскольку $A_0 \cap A_1 = 0$), является, очевидно, отображением на и, наконец, обратное к нему отображение непрерывно; в самом деле, отображения $X \cap A_j$ непрерывны $\left(\text{при } X \in 2^{A_0 \cup A_1}\right)$, в силу теоремы 5.

Замечание 3. Предположение о том, что множество E в теореме 5 открыто, существенно. Это видно из такого примера: пусть $\mathscr{X} = \mathscr{I}$, а E — одноэлементное множество. См. также § 18, V.

IV. Случай, когда пространство $\mathscr{X}$ регулярно.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}$ — регулярное $\mathscr{T}_1$-пространство; тогда множества $\underset{K, L}{\mathsf{E}}(K \subset L)$ и $\underset{x, K}{\mathsf{E}}(x \in K)$ замкнуты в $2^{\mathscr{X}} \times 2^{\mathscr{X}}$, соответственно в $\mathscr{X} \times 2^{\mathscr{X}}$.*

Доказательство. Пусть $K \not\subset L$. Так как пространство $\mathscr{X}$ регулярно, то существует открытое множество G, такое, что

$$K \cap G \neq 0 \quad \text{и} \quad L \subset \mathscr{X} - \bar{G}.$$

Таким образом,

$$(K \not\subset L) \equiv \bigvee_G (K \cap G \neq 0)(L \subset \mathscr{X} - \bar{G}) \qquad (G \text{ — открыто})$$

и, следовательно (ср. § 2, VI (3)),

$$\underset{K, L}{\mathsf{E}}(K \not\subset L) = \bigcup_G \left[\underset{K}{\mathsf{E}}(K \cap G \neq 0) \times \underset{L}{\mathsf{E}}(L \subset \mathscr{X} - \bar{G})\right].$$

Множества $\underset{K}{\mathsf{E}}(K \cap G \neq 0)$ и $\underset{L}{\mathsf{E}}(L \subset \mathscr{X} - \bar{G})$ открыты (согласно теореме 1, п. II), поэтому и множество в квадратных скобках открыто (относительно пространства $2^{\mathscr{X}} \times 2^{\mathscr{X}}$). Следовательно, множество $\underset{K, L}{\mathsf{E}}(K \not\subset L)$ открыто.

Это завершает доказательство первой части теоремы. Для доказательства второй части заменим в предыдущих рассуждениях множество K множеством (x).

Обратная теорема справедлива для любых $\mathcal{T}_1$-пространств.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство. Если множество $\underset{x,\,K}{\mathrm{E}}(x \in K)$ замкнуто при любом K, то пространство $\mathcal{X}$ регулярно.*

Доказательство. Пусть $x_0 \notin K_0$. Покажем, что существуют открытые множества U и V, такие, что

(1) $$x_0 \in U, \quad K_0 \subset V \quad \text{и} \quad U \cap V = 0.$$

Положим $\boldsymbol{G} = \underset{x,\,K}{\mathrm{E}}(x \notin K)$. Тогда $(x_0, K_0) \in \boldsymbol{G}$. Так как множество $\boldsymbol{G}$, по предположению, открыто, существуют открытые множества U, V, $G_1, \ldots, G_n$, такие, что

$$(x_0, K_0) \in [U \times \boldsymbol{B}(V, G_1, \ldots, G_n)] \subset \boldsymbol{G}.$$

Иначе говоря,

(2) $$x_0 \in U, \quad K_0 \in \boldsymbol{B}(V, G_1, \ldots, G_n),$$

т. е. $K_0 \subset V$, $K_0 \cap G_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, n$,

(3) $(x \in U,\ K \subset V,\ K \cap G_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, n) \Rightarrow (x, K) \in \boldsymbol{G}$,

т. е. $x \notin K$.

Остается доказать, что $U \cap V = 0$. Допустим противное, т. е. что $x \in U \cap V$. Пусть $K = K_0 \cup (x)$. Тогда из (2) и (3) следует, что $x \notin K$, вопреки предположению.

Теорема 3. *Если $\mathcal{X}$ регулярно, то $2^{\mathcal{X}}$ хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $K, L \in 2^{\mathcal{X}}$ и $K \neq L$. Докажем, что существуют два открытых подмножества $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{H}$ пространства $2^{\mathcal{X}}$, таких, что $K \in \boldsymbol{G}$, $L \in \boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{H} = 0$.

Очевидно, можно считать, что $K - L \neq 0$. Пусть $p \in K - L$. Так как пространство $\mathcal{X}$ регулярно, то существует открытое множество $U \subset \mathcal{X}$, такое, что $p \in U$ (откуда $K \cap U \neq 0$) и $L \cap \overline{U} = 0$.

Легко видеть, что множества

$$\boldsymbol{G} = \underset{F}{\mathrm{E}}(F \cap U \neq 0) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{H} = \underset{F}{\mathrm{E}}(F \cap \overline{U} = 0)$$

являются искомыми.

Теорема 4. *Если $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство, а пространство $2^{\mathcal{X}}$ хаусдорфово, то $\mathcal{X}$ регулярно*[1]).

---

[1]) По поводу теорем 3 и 4 см. Майкл [1] и Фринк [1], стр. 577.

Доказательство. Пусть K_0 замкнуто и $x_0 \notin K_0$. Покажем, что существуют два открытых множества U и V, удовлетворяющих условиям (1).

Очевидно, что $K_0 \neq K_0 \cup (x_0)$. Так как пространство $2^{\mathscr{X}}$ хаусдорфово, имеем

(4) $K_0 \in \boldsymbol{B}(G_0, G_1, \ldots, G_m)$, $(K_0 \cup (x_0)) \in \boldsymbol{B}(H_0, H_1, \ldots, H_n)$,

(5) $\boldsymbol{B}(G_0, G_1, \ldots, G_m) \cap \boldsymbol{B}(H_0, H_1, \ldots, H_n) = 0.$

Докажем существование индекса j_0, такого, что

$$x_0 \in H_{j_0} \quad \text{и} \quad G_0 \cap H_0 \cap H_{j_0} = 0.$$

Тем самым доказательство теоремы будет завершено, ибо $x_0 \in H_0 \cap H_{j_0}$ и $K_0 \subset G_0$.

Допустим, что $(x_0 \in H_j) \Rightarrow (G_0 \cap H_0 \cap H_j \neq 0)$ для каждого $j = 0, 1, \ldots, n$. Положим $p_j \in (G_0 \cap H_0 \cap H_j)$, каково бы ни было $x_0 \in H_j$, и обозначим через L множество, состоящее из таких p_j. Положим $A = K \cup L$. Легко проверить, что

$$A \subset G_0, \qquad A \cap G_i \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$A \subset H_0, \qquad A \cap H_j \neq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Но это означает, что $A \in \boldsymbol{B}(G_0, \ldots, G_m) \cap \boldsymbol{B}(H_0, \ldots, H_n)$, вопреки формуле (5).

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *пространство $\mathscr{X}$ регулярно;*

(ii) *множество $\underset{K, L}{\mathsf{E}}(K \subset L)$ замкнуто в $2^{\mathscr{X}} \times 2^{\mathscr{X}}$;*

(iii) *множество $\underset{x, K}{\mathsf{E}}(x \in K)$ замкнуто в $\mathscr{X} \times 2^{\mathscr{X}}$;*

(iv) *пространство $2^{\mathscr{X}}$ хаусдорфово.*

V. Случай, когда пространство $\mathscr{X}$ нормально.

Теорема 1. *Если пространство $\mathscr{X}$ нормально, то множество $\underset{K, L}{\mathsf{E}}(K \cap L = 0)$ открыто в пространстве $2^{\mathscr{X}} \times 2^{\mathscr{X}}$; более общо, множество $\underset{K_1, \ldots, K_n}{\mathsf{E}}(K_1 \cap \ldots \cap K_n = 0)$ открыто в пространстве $(2^{\mathscr{X}})^n$.*

Доказательство. Так как пространство $\mathscr{X}$ нормально, то имеем

(1) $$(K \cap L = 0) \equiv \bigvee_{G, H} (K \subset G)(L \subset H)(G \cap H = 0),$$

где G и H открыты. Иначе говоря (ср. § 2, VI (3)),

$$\mathop{\mathsf{E}}_{K,L}(K\cap L=0)=\bigcup_{G\cap H=0}\mathop{\mathsf{E}}_{K,L}(K\subset G)(L\subset H)=\bigcup_{G\cap H=0}(2^G\times 2^H).$$

Это завершает доказательство, так как 2^G и 2^H открыты.

Чтобы доказать вторую часть утверждения, применим вместо формулы (1) более общую формулу (§ 14, III)

$$(2)\quad (K_1\cap\ldots\cap K_n=0)\equiv$$
$$\equiv\bigvee_{G_1,\ldots,G_n}[(G_1\cap\ldots\cap G_n=0)(K_i\subset G_i\ \text{ для }\ i=1,\ldots,n)].$$

Установим теперь обратную теорему.

Теорема 2. *Если $\mathscr{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство и множество $\mathop{\mathsf{E}}_{K,L}(K\cap L=0)$ открыто, то $\mathscr{X}$ нормально.*

Доказательство. Пусть $K_0\cap L_0=0$. Так как множество $\mathop{\mathsf{E}}_{K,L}(K\cap L=0)$ открыто, в пространстве $2^{\mathscr{X}}$ существуют два открытых множества $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, таких, что

$$(3)\quad K_0\in\boldsymbol{U},\qquad L_0\in\boldsymbol{V}\quad\text{и}\quad (K\in\boldsymbol{U})(L\in\boldsymbol{V})\Rightarrow(K\cap L=0).$$

Очевидно можно считать, что $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ принадлежат базе пространства $2^{\mathscr{X}}$, определенной в п. I. Это означает (см. I (4)), что существуют две системы открытых множеств $G_0,\ldots,G_m$ и $H_0,\ldots,H_n$, такие, что

$$(4)\quad \begin{array}{lll} K_0\subset G_0, & K_0\cap G_i\neq 0 & (i\leqslant m),\\ L_0\subset H_0, & L_0\cap H_j\neq 0 & (j\leqslant n)\end{array}$$

и

$$(5)\quad [(K\subset G_0)(K\cap G_i\neq 0)(L\subset H_0)(L\cap H_j\neq 0)]\Rightarrow(K\cap L=0).$$

Мы покажем, что $G_0\cap H_0=0$, закончив тем самым доказательство.

Пусть это не так; предположим, что $p\in G_0\cap H_0$. Пусть $a_i\in K_0\cap G_i$ для $i\leqslant m$ и $b_j\in L_0\cap H_j$ для $j\leqslant n$. Положим

$$K=(p,\ a_1,\ \ldots,\ a_m)\quad\text{и}\quad L=(p,\ b_1,\ \ldots,\ b_n).$$

Согласно (5), $K\cap L=0$, но это противоречит тому, что $p\in(K\cap L)$.

Теорема 3. *Если $\mathscr{X}$ нормально, то $2^{\mathscr{X}}$ регулярно.*

Доказательство. Пусть $F_0=\overline{F}_0\in\boldsymbol{G}$, где $\boldsymbol{G}$ открыто (в $2^{\mathscr{X}}$). Покажем, что существуют открытые множества $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, такие, что

$$(6)\qquad F_0\in\boldsymbol{U},\qquad \boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{V}=0\quad\text{и}\quad 2^{\mathscr{X}}-\boldsymbol{G}\subset\boldsymbol{V}.$$

Очевидно, можно считать, что $\boldsymbol{G}$ принадлежит базе пространства $2^{\mathscr{X}}$, т. е. существует такая система открытых множеств G_0,

$G_1, \ldots, G_n$, что $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}(G_0, G_1, \ldots, G_n)$. Это означает, что

(7) $$F_0 \subset G_0,$$

(8) $$F_0 \cap G_i \neq 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как пространство $\mathscr{X}$ нормально, существуют (согласно (7)) открытые множества C_0 и D_0, такие, что

(9) $$F_0 \subset C_0, \quad C_0 \cap D_0 = 0, \quad \mathscr{X} - G_0 \subset D_0.$$

Пусть, в соответствии с (8), $q_i \in F_0 \cap G_i$. Пусть далее C_i и D_i — такие открытые множества, что

(10) $$q_i \in C_i, \quad C_i \cap D_i = 0, \quad \mathscr{X} - G_i \subset D_i.$$

Определим множества $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ следующим образом:

$$(F \subset \boldsymbol{U}) \equiv \{F \subset C_0 \text{ и } F \cap C_i \neq 0 \text{ для } i = 1, \ldots, n\},$$

$$(F \subset \boldsymbol{V}) \equiv \{\text{либо } F \cap D_0 \neq 0, \text{ либо } F \subset D_i \text{ при некотором } i \leqslant n\}.$$

Согласно первым включениям из формул (9) и (10), $F_0 \in \boldsymbol{U}$. Средние равенства в этих формулах показывают, что $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{V} = 0$.

Пусть теперь $F \in 2^{\mathscr{X}} - \boldsymbol{G}$, т. е. либо $F \not\subset G_0$, либо $F \cap G_i = 0$ при некотором $i \leqslant n$. Тогда, согласно третьим включениям в (9) и (10), мы имеем либо $F \cap D_0 \neq 0$, либо $F \subset D_i$ при некотором $i \leqslant n$. Это означает, что $F \in \boldsymbol{V}$. Таким образом, условия (6) выполняются.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство, а пространство $2^{\mathscr{X}}$ регулярно, тогда $\mathscr{X}$ нормально.*

Доказательство. Допустим, что $K_0 \cap L_0 = 0$. Покажем, что существует открытое множество G, такое, что

(11) $$K_0 \subset G \quad \text{и} \quad \overline{G} \cap L_0 = 0, \text{ т. е. } \overline{G} \subset H, \text{ где } H = \mathscr{X} - L_0.$$

Поскольку $K_0 \subset H$, имеем $K_0 \in 2^H$. Множество 2^H открыто в (регулярном) пространстве $2^{\mathscr{X}}$, поэтому существуют открытые множества $G_0, \ldots, G_n$, такие, что

(12) $$K_0 \in \boldsymbol{B}(G_0, \ldots, G_n), \quad \overline{\boldsymbol{B}(G_0, \ldots, G_n)} \subset 2^H \quad \text{и} \quad G_i \subset G_0.$$

Отсюда, в силу I (4′) и II (5), получаем

$$K_0 \subset G_0, \quad K_0 \cap G_i \neq 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B}(\overline{G}_0, \ldots, \overline{G}_n) \subset 2^H.$$

Так как $0 \neq G_i \subset G_0$, имеем $\overline{G}_0 \cap \overline{G}_i = \overline{G}_i \neq 0$ и, следовательно, $\overline{G}_0 \in \boldsymbol{B}(\overline{G}_0, \ldots, \overline{G}_n)$. Согласно (12), $\overline{G}_0 \in 2^H$, т. е. $\overline{G}_0 \subset H$. Таким образом, в (11) вместо G можно подставить G_0.

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *пространство* $\mathscr{X}$ *нормально*;

(ii) *множество* $\underset{K,\,L}{\mathsf{E}}(K \cap L = 0)$ *открыто*;

(iii) *пространство* $2^{\mathscr{X}}$ *регулярно*.

Замечание. *Для пространства* $2^{\mathscr{X}}$ *регулярность эквивалентна вполне регулярности*[1].

VI. Связь пространства $2^{\mathscr{X}}$ со структурами и брауэровскими алгебрами. Нетрудно заметить, что многие теоремы этого параграфа (и § 18) можно распространить на дистрибутивные структуры и брауэровские алгебры.

Напомним, что дистрибутивная структура $\Gamma = (L, \cup, \cap, 0, 1)$ называется *брауэровской алгеброй* (см. МакКинси и Тарский [2]), если в Γ задана некоторая операция $a - b$, такая, что

$$(a - b \subset c) \equiv (a \subset (b \cup c)).$$

Пусть $\mathscr{X}$ — топологическое пространство, тогда $2^{\mathscr{X}}$—брауэровская алгебра, причем операции $\cup$ и $\cap$ имеют обычный смысл, а операция „—" означает $\overline{A - B}$.

Структура Γ называется[2] *уолменовской, структурой*, соответственно структурно *регулярной*, соответственно структурно *нормальной*, если выполнены следующие условия:

$$(a \not\subset b) \Rightarrow \bigvee_{c} (a \cap c \neq 0)(b \cap c = 0),$$

соответственно

$$(a \not\subset b) \Rightarrow \bigvee_{c,\,d} (c \cup d = 1)(a \not\subset c)(b \cap d = 0),$$

соответственно

$$(a \cap b = 0) \Rightarrow \bigvee_{c,\,d} (c \cup d = 1)(a \cap c = 0 = b \cap d).$$

Очевидно, если $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство, то $2^{\mathscr{X}}$ — уолменовская структура. Пространство $\mathscr{X}$ регулярно тогда и только тогда, когда $2^{\mathscr{X}}$ структурно регулярно ($\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство). Пространство $\mathscr{X}$ нормально тогда и только тогда, когда $2^{\mathscr{X}}$ — структурно нормально.

В множество L можно ввести топологию[3]. Рассмотрим идеалы $I(a) = \underset{x}{\mathsf{E}}(x \subset a)$ и $J(a) = \underset{x}{\mathsf{E}}(x \cap a = 0)$. Замкнутой подбазой пространства L будем считать семейство всех множеств вида $I(a)$ и $L - J(a)$. Эта топология согласуется с экспоненциальной топологией, когда $L = 2^{\mathscr{X}}$.

---

[1] По поводу теорем 3, 4 и замечания см. упомянутую работу Майкла.
[2] См. Куратовский [46], Уолмен [1], Нёбелинг [1].
[3] См. цит. раб. Куратовского и Фринк [1], Ренни [1].

Приведем следующие теоремы (являющиеся обобщениями соответствующих теорем для пространства $2^{\mathscr{X}}$)[1]).

Пусть Γ — *уолменовская структура. Тогда*

1. Фильтр $\underset{x}{\mathsf{E}}(a \subset x)$ замкнут. Поэтому L есть $\mathcal{T}_1$-пространство.
2. $\{\Gamma$ структурно регулярна$\} \equiv \left\{ \underset{x,\, y}{\mathsf{E}} (x \subset y) \text{ замкнуто в } L \times L \right\}$.
3. $\{\Gamma$ структурно нормальна$\} \equiv \left\{ \underset{x,\, y}{\mathsf{E}} (x \cap y = 0) \text{ открыто в } L \times L \right\}$.
4. Если Γ — брауэровская алгебра, то

$$\{\Gamma \text{ структурно регулярна}\} \equiv \left\{ \underset{x,\, y}{\mathsf{E}} (x - y = 0) \text{ замкнуто} \right\}.$$

§ 18. Полунепрерывные функции

I. Определения. Как и в § 17, III, пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два топологических пространства и F — (многозначная) функция, ставящая в соответствие каждой точке $y \in \mathscr{Y}$ множество $F(y) \in 2^{\mathscr{X}}$.

Функция F называется *полунепрерывной сверху* (соответственно *снизу*), если для каждого открытого (соответственно замкнутого) множества $A \subset \mathscr{X}$ множество

$$F^{-1}(2^A) = \underset{y}{\mathsf{E}}\left[F(y) \in 2^A\right] = \underset{y}{\mathsf{E}}\,[F(y) \subset A] \tag{1}$$

открыто (соответственно замкнуто) в пространстве $\mathscr{Y}$.

Эквивалентно: *функция F полунепрерывна сверху* (соответственно *снизу*), если для каждого замкнутого (соответственно открытого) множества $A \subset \mathscr{X}$ множество

$$\mathscr{Y} - F^{-1}\left(2^{\mathscr{X} - A}\right) = \underset{y}{\mathsf{E}}\,[F(y) \cap A \neq 0] \tag{2}$$

замкнуто (соответственно открыто) в пространстве $\mathscr{Y}$.

Более точно: *функция F полунепрерывна сверху в точке y_0, если*

$$\left[y_0 \in F^{-1}(2^G)\right] \Rightarrow \left[y_0 \in \operatorname{Int}\left(F^{-1}(2^G)\right)\right] \tag{3}$$

всякий раз, когда множество G открыто.

---

1) См. Куратовский [46], [47], стр. 751.

Функция F полунепрерывна снизу в точке y_0, если

(4) $$[y_0 \in \overline{F^{-1}(2^K)}] \Rightarrow [y_0 \in F^{-1}(2^K)]$$

всякий раз, когда множество K замкнуто.

Отсюда легко получается

Теорема 1. *Функция F полунепрерывна сверху (соответственно снизу) тогда и только тогда, когда функция F полунепрерывна сверху (соответственно снизу) в каждой точке $y \in \mathcal{Y}$.*

В силу теоремы 1, § 17, III, имеет место

Теорема 2. *Функция F непрерывна в точке y_0 тогда и только тогда, когда она одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке y_0.*

Следовательно, *функция F непрерывна тогда и только тогда, когда она одновременно полунепрерывна сверху и снизу.*

Теорема 3. *Пусть $D(F)$ означает множество точек разрыва функции F. Тогда, если функция F полунепрерывна сверху, то*

(5) $$D(F) = \bigcup_K \{\overline{F^{-1}(2^K)} - F^{-1}(2^K)\},$$

где K — замкнутое множество.

Если функция F полунепрерывна снизу, то

(6) $$D(F) = \bigcup_G \{F^{-1}(2^G) - \operatorname{Int}[F^{-1}(2^G)]\},$$

где G — открытое множество.

Это утверждение вытекает из следствия 1a, § 17, III.

Теорема 4. *Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на. Отображение $\overset{-1}{f}: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно сверху (соответственно снизу) тогда и только тогда, когда отображение f является замкнутым (соответственно открытым)*[1]).

Подобно теореме 2, § 17, III, эта теорема непосредственно вытекает из формулы (2) и формулы (3), § 3, II.

Теорема 5. *Если множество $F(y)$ сводится к единственной точке (обозначаемой $f(y)$) и отображение F полунепрерывно сверху или снизу, то отображение f непрерывно.*

Теорема непосредственно вытекает из соотношения

$$\mathop{\mathrm{E}}_{y}[F(y) \subset A] = \mathop{\mathrm{E}}_{y}[f(y) \in A] = f^{-1}(A).$$

[1]) Что касается более сильного утверждения, см. п. III, теорему 5.

II. Примеры. Связь с действительными полунепрерывными функциями. Замечания.

Пример 1. Пусть $f: \mathscr{E} \to \mathscr{T}$. Согласно классическому определению [1]), отображение f называется *полунепрерывным сверху*, соответственно *снизу*, в точке y_0, если из того, что $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, следует, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} f(y_n) \leqslant f(y)$, соответственно $f(y) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} f(y_n)$. Другими словами: если из условий $\lim y_n = y_0$ и $\lim f(y_n) = x_0$ следует, что $x_0 \leqslant f(y_0)$, соответственно $f(y_0) \leqslant x_0$.

Положим $F(y) = \mathop{\mathsf{E}}_x [0 \leqslant x \leqslant f(y)]$. Легко видеть, что функция F полунепрерывна сверху (снизу) в точке y_0 тогда и только тогда, когда функция f полунепрерывна сверху (снизу) в определенном выше смысле.

Пример 2. Функция F, определенная условием $F(y) = \mathscr{E} \times (y)$, где $y \in \mathscr{E}$, не является полунепрерывной сверху. В самом деле, если обозначить через A гиперболу $y = 1/x$, то множество, рассмотренное в I (2), не будет замкнутым.

Замечание. В пространстве $2^{\mathscr{X}}$ можно ввести топологию, называемую $\varkappa$-топологией [2]), такую, что полунепрерывное сверху отображение становится непрерывным. Эта $\varkappa$-топология пространства $2^{\mathscr{X}}$ определяется тем условием, что множества 2^G (где G открыто) образуют открытую базу. Очевидно, что отображение $F: \mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}}$ полунепрерывно сверху в точке y_0 относительно экспоненциальной топологии тогда и только тогда, когда оно непрерывно в точке y_0 относительно $\varkappa$-топологии пространства $2^{\mathscr{X}}$.

Аналогично назовем „λ-топологией“ пространства $2^{\mathscr{X}}$ такую топологию, которая получится, если считать, что множества 2^K (K — замкнутое множество) образуют замкнутую подбазу. Тогда полунепрерывные снизу отображения будут непрерывными относительно λ-топологии.

Следует заметить, что $\varkappa$-топология (и λ-топология) не является $\mathscr{T}_1$-топологией (за исключением тривиального случая $\mathscr{X} = 0$).

---

[1]) См. Бэр [1], стр. 6. Более общий подход, когда пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ предполагаются метрическими, см. Хан [2], стр. 148; случай, когда $F(y)$ предполагается замкнутым подмножеством компактного метрического пространства, см. Куратовский [17] и т. II, гл. 4. Метод состоит в использовании верхних и нижних топологических пределов множеств (см. § 29). См. также Булиган [1], стр. 14. Этот метод можно обобщить, используя сходимость Мура — Смита; см. статьи, цитированные в § 20, IX, а также Стразер [1]. Некоторые авторы предполагают, что множества $F(y)$ компактны, см. Берж [2], стр. 110, и [1].

[2]) См. Пономарев [1] и намного более раннюю статью Тихонова [5], где появляется определение этого пространства. См. также Александров [19]. $\varkappa$-топология (и рассматриваемая далее λ-топология) изучались Майклом под названием полуконечной сверху (соответственно снизу) топологии; см. Майкл [1], стр. 179.

III. Основные свойства.

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{X}$ *— регулярное пространство, и пусть функция* F *полунепрерывна сверху; тогда множество* $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[x \in F(y)]$ *замкнуто в пространстве* $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Доказательство. Так как пространство $\mathscr{X}$ регулярно, мы имеем

$$(1)\qquad [x \notin F(y)] \equiv \bigvee_{U \cap V = 0} (x \in U)(F(y) \subset V),$$

где U и V открыты. Следовательно,

$$(2)\qquad \underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[x \notin F(y)] = \bigcup_{U \cap V = 0} [U \times F^{-1}(2^V)].$$

Поскольку F полунепрерывно сверху, множество $F^{-1}(2^V)$ открыто в $\mathscr{Y}$, поэтому $U \times F^{-1}(2^V)$, а, следовательно, и множество $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[x \notin F(y)]$ открыто в $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Замечание. Без предположения регулярности пространства $\mathscr{X}$ эта теорема неверна. В самом деле, если $\mathscr{Y} = 2^{\mathscr{X}}$ и F — тождественное отображение, то рассматриваемое множество совпадает с множеством $\underset{x,\,K}{\mathsf{E}}\,(x \in K)$, которое замкнуто лишь в том случае, когда $\mathscr{X}$ регулярно (см. § 17, IV, теорема 2).

Теорема 2. (Обобщенное условие Гейне.) *Функция* F *полунепрерывна снизу в точке* y_0 *тогда и только тогда, когда*

$$(3)\qquad (y_0 \in \overline{B}) \Rightarrow \left(F(y_0) \subset \overline{\mathsf{S}F(B)}\right) \text{ для каждого } B \subset \mathscr{Y}.$$

Доказательство. Предположим, что функция F полунепрерывна снизу в точке y_0. Пусть $y_0 \in \overline{B}$; положим $K = \overline{\mathsf{S}F(B)}$. Тогда $B \subset F^{-1}(2^K)$, так как

$$(y \in B) \Rightarrow (F(y) \subset \mathsf{S}F(B) \subset K) \Rightarrow (F(y) \in 2^K) \equiv (y \in F^{-1}(2^K)).$$

Поэтому $y_0 \in \overline{F^{-1}(2^K)}$ и, в силу I (4), $y_0 \in F^{-1}(2^K)$, но это означает, что $F(y_0) \in 2^K$, т. е. $F(y_0) \subset K = \overline{\mathsf{S}F(B)}$.

Обратно, пусть $K = \overline{K}$ и $y_0 \in \overline{F^{-1}(2^K)}$. Положим $B = F^{-1}(2^K)$. Тогда $F(B) \subset 2^K$, откуда $\mathsf{S}F(B) \subset \mathsf{S}(2^K) = K$. Следовательно, $\overline{\mathsf{S}F(B)} \subset \overline{K} = K$. Далее, предполагая, что условие (3) выполнено, имеем $F(y_0) \subset \overline{\mathsf{S}F(B)} \subset K$, откуда $F(y_0) \in 2^K$ и $y_0 \in F^{-1}(2^K)$. Таким образом, функция F полунепрерывна снизу в точке y_0.

Следствие 2а. *Функция F полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда*

(4) $\mathsf{S}F(\overline{B}) \subset \overline{\mathsf{S}F(B)}$ *для каждого множества* $B \subset \mathcal{Y}$.

Теорема 3. (Обобщенное условие Коши.) *Функция F полунепрерывна сверху в точке y_0 тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества G, содержащего $F(y_0)$, существует открытое множество H, содержащее точку y_0, такое, что $\mathsf{S}F(H) \subset G$, т. е. $(y \in H) \Rightarrow (F(y) \subset G)$* [1].

Доказательство получается непосредственно из формул

$$(F(y_0) \subset G) \equiv \left(y_0 \in \overset{-1}{F}(2^G)\right) \quad \text{и} \quad (\mathsf{S}F(H) \subset G) \equiv \left(H \subset \overset{-1}{F}(2^G)\right).$$

Следствие 3а. *Пусть $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство. Тогда, если функция F полунепрерывна сверху в точке y_0, то*

(5) $(y_0 \in \overline{B}) \Rightarrow [\mathsf{P}(F(B)) \subset F(y_0)]$, *т. е.* $\left(\bigcup\limits_{y \in B} F(y)\right) \subset F(y_0)$.

Доказательство. Пусть $A = \bigcap\limits_{y \in B} F(y)$; предположим, что $x \in A - F(y_0)$. В теореме 3 положим $G = \mathcal{X} - (x)$. Тогда, поскольку $y_0 \in \overline{B}$ и множество H открыто, существует точка $y \in B \cap H$. Следовательно, $A \subset F(y) \subset G$, и поэтому $A \subset \mathcal{X} - (x)$, что невозможно.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2, § 17, II.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство, $A \subset \mathcal{X}$ — произвольное подмножество и F — полунепрерывная сверху функция. Тогда множество $\underset{y}{\mathsf{E}}(A \subset F(y))$ замкнуто.*

Доказательство. Очевидно, что

$$(A \not\subset F(y)) \equiv \bigvee_{x \in A} (F(y) \subset \mathcal{X} - (x)).$$

Поэтому

$$\underset{y}{\mathsf{E}}(A \not\subset F(y)) = \bigcup_{x \in A} \underset{y}{\mathsf{E}}(F(y) \subset \mathcal{X} - (x)).$$

Так как множество $\mathcal{X} - (x)$ открыто, а функция F полунепрерывна сверху, то множество $\underset{y}{\mathsf{E}}(F(y) \subset \mathcal{X} - (x))$ открыто, и, следовательно, открыто множество $\underset{y}{\mathsf{E}}(A \not\subset F(y))$.

Теорема 5. *Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение и $\mathcal{Y}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство. Отображение $\overset{-1}{f}: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно снизу (соответственно сверху) в точке y_0 тогда и только*

[1] См. Гуревич [1].

тогда, когда отображение f открыто (соответственно замкнуто) в точке y_0.

Доказательство. Положим $F(y) = \overset{-1}{f}(y)$. В силу § 3, III (16), $\mathbf{S}F(B) = f^{-1}(B)$ для любого множества $B \subset \mathcal{Y}$.

Сначала рассмотрим случай полунепрерывности снизу. Заменяя в формуле (3) теоремы 2 $F(y)$ на $f^{-1}(y)$ и $\mathbf{S}F(B)$ на $f^{-1}(B)$, мы получаем формулу (5) из § 13, XIV, которая представляет собой необходимое и достаточное условие того, что отображение f открыто в точке y_0.

В случае полунепрерывности сверху мы подобным же способом получаем из теоремы 3 необходимое и достаточное условие замкнутости отображения f в точке y_0, сформулированное в теореме 3 из § 13, XIV.

Теорема 5а. (Обобщение теоремы 5.) *Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение, и пусть f^{-1} сужено на замкнутые подмножества пространства $\mathcal{Y}$, т. е. $f^{-1}: 2^{\mathcal{Y}} \to 2^{\mathcal{X}}$. Тогда f^{-1} полунепрерывно снизу (соответственно сверху) в замкнутом множестве B_0 тогда и только тогда, когда f открыто (соответственно замкнуто) в B_0*[1].

Доказательство. Положим $F = f^{-1}$, $K = \bar{K} \subset \mathcal{X}$ и $G = \mathcal{X} - K$. Заметим, что формула § 3, III (13‴) остается верной, если обозначить через 2^A множество $\underset{K}{\mathbf{E}}(K \subset A)$, т. е.

$$F^{-1}(2^A) = 2^{\mathcal{Y} - f(\mathcal{X} - A)}. \tag{6}$$

Согласно I (4), (6), § 17, II (3) и § 13, XIV (12), мы имеем

$$\begin{aligned}
&(f^{-1} \text{ полунепрерывно снизу в } B) \equiv \\
&\equiv \{[B \in \overline{F^{-1}(2^K)}] \Rightarrow [B \in F^{-1}(2^K)]\} \equiv \\
&\equiv \{[B \in \overline{2^{\mathcal{Y} - f(G)}}] \Rightarrow [B \in 2^{\mathcal{Y} - f(G)}]\} \equiv \\
&\equiv \{[B \in 2^{\overline{\mathcal{Y} - f(G)}}] \Rightarrow [B \in 2^{\mathcal{Y} - f(G)}]\} \equiv \\
&\equiv \{[B \cap \operatorname{Int}(f(G)) = 0] \Rightarrow [B \cap f(G) = 0]\} \equiv \\
&\equiv (f \text{ открыто в } B).
\end{aligned}$$

[1]) Эта теорема отвечает на вопрос, поставленный М. Брауном.

Аналогично, согласно I (3), (6), § 17, II (4) и § 13, XIV (13), имеем

$$\begin{aligned}(f^{-1} &\text{ полунепрерывно сверху в } B) \equiv \\ &\equiv \{[B \in F^{-1}(2^G)] \Rightarrow [B \in \operatorname{Int}(F^{-1}(2^G))]\} \equiv \\ &\equiv \{[B \in 2^{\mathcal{Y}-f(K)}] \Rightarrow [B \in \operatorname{Int}(2^{\mathcal{Y}-f(K)})]\} \equiv \\ &\equiv \{[B \in 2^{\mathcal{Y}-f(K)}] \Rightarrow [B \in 2^{\operatorname{Int}(\mathcal{Y}-f(K))}]\} \equiv \\ &\equiv \{[B \cap f(K) = 0] \Rightarrow [B \cap \overline{f(K)} = 0]\} \equiv \\ &\equiv (f \text{ замкнуто в } B).\end{aligned}$$

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство, и пусть множество $F(y)$ для каждой точки $y \in \mathcal{Y}$ представляет собой одноэлементное множество: $F(y) = \{f(y)\}$, где $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Тогда из полунепрерывности функции F в точке y_0 (либо сверху, либо снизу) вытекает непрерывность этой функции в точке y_0.*

Действительно, в этом случае $\mathbf{S}F(B) = \{f(B)\}$, и условия, сформулированные в теоремах 2 и 3, превращаются в обычные условия непрерывности Коши и Гейне.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ и $F: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$. Пусть $f(z_0) = y_0$. Если отображение f непрерывно в точке z_0, а отображение F полунепрерывно сверху (соответственно снизу) в точке y_0, то композиция $H = F \circ f$ полунепрерывна сверху (соответственно снизу) в точке z_0.*

Эту теорему также можно вывести непосредственно из замечания, сделанного в п. II, а именно из того, что полунепрерывное сверху (снизу) отображение непрерывно относительно $\varkappa$-топологии (λ-топологии).

IV. Объединение полунепрерывных отображений.

Теорема 1. *Объединение двух функций, полунепрерывных сверху в точке y_0, полунепрерывно сверху в точке y_0.*

Доказательство. Пусть $F_j: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ — отображение, полунепрерывное сверху в точке y_0 при $j = 0, 1$. Положим $F = F_0 \cup F_1$. Пусть множество G открыто в пространстве $\mathcal{X}$ и $y_0 \in F^{-1}(2^G)$. Мы должны показать (см. I (3)), что $y_0 \in \operatorname{Int}[F^{-1}(2^G)]$. В силу формулы § 17, III (ii), мы имеем

$$(1) \qquad F^{-1}(2^G) = F_0^{-1}(2^G) \cap F_1^{-1}(2^G),$$

следовательно, $y_0 \in F_j^{-1}(2^G)$. Так как функции F_j полунепрерывны сверху в точке y_0, то $y_0 \in \operatorname{Int}[F_j^{-1}(2^G)]$. Поэтому (согласно § 6, II (1) и (1))

$$y_0 \in \operatorname{Int}[F_0^{-1}(2^G)] \cap \operatorname{Int}[F_1^{-1}(2^G)] = \\ = \operatorname{Int}[F_0^{-1}(2^G) \cap F_1^{-1}(2^G)] = \operatorname{Int}[F^{-1}(2^G)].$$

Теорема 2. *Объединение двух функций, полунепрерывных снизу в точке y_0, полунепрерывно снизу в точке y_0.*

Более общо, *если каждая функция F_t, $t \in T$ (множество T произвольно), полунепрерывна снизу в точке y_0, то и функция $F = \bigcup_t F_t$ полунепрерывна снизу в точке y_0.*

Доказательство. *Пусть $K = \overline{K} \subset \mathscr{X}$* и $y_0 \in \overline{F^{-1}(2^K)}$. Покажем (см. I (4)), что $y_0 \in F^{-1}(2^K)$. В силу формулы § 17, III (iii), мы имеем

(2) $$F^{-1}(2^K) = \bigcap_t F_t^{-1}(2^K),$$

поэтому

$$\overline{F^{-1}(2^K)} = \overline{\bigcap_t F_t^{-1}(2^K)} \subset \bigcap_t \overline{F_t^{-1}(2^K)}.$$

Следовательно, для каждого $t \in T$ имеем $y_0 \in \overline{F_t^{-1}(2^K)}$. Так как функция F_t полунепрерывна снизу в точке y_0, то, в силу I (4), отсюда следует, что $y_0 \in F_t^{-1}(2^K)$. Таким образом, $y_0 \in \bigcap_t F_t^{-1}(2^K) = F^{-1}(2^K)$.

Замечание 1. Вторая часть теоремы 2 не верна для функций, полунепрерывных сверху, например, если $F_n(y) = (y^n)$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 приводят к следующему обобщению теоремы 4 из § 17, III: *объединение двух функций, непрерывных в точке y_0, есть функция, непрерывная в точке y_0.*

V. Пересечение полунепрерывных отображений.

Замечание. В связи с формулой § 3, V (3) заметим, что для функции $F = F_0 \cap F_1$ имеет место формула

(1) $$[F_0^{-1}(2^G) \cup F_1^{-1}(2^G)] \subset F^{-1}(2^G),$$

где знак $\subset$ нельзя заменить знаком $=$.

Однако верна следующая

Лемма. *Пусть пространство $\mathscr{X}$ нормально, $F_j: \mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}}$, $j = 0, 1$, $F = F_0 \cap F_1$ и множество G открыто в пространстве $\mathscr{X}$. Тогда*

(2) $$F^{-1}(2^G) = \bigcup_{U_0, U_1} F_0^{-1}(2^{U_0}) \cap F_1^{-1}(2^{U_1}),$$

где множества U_0 и U_1 открыты и $U_0 \cap U_1 = G$.

Доказательство. 1) Пусть $y \in F^{-1}(2^G)$, т. е. $[F_0(y) \cap F_1(y)] \subset G$. Тогда множества $[F_0(y) - G]$ и $[F_1(y) - G]$ замкнуты и не пересекаются. Так как пространство $\mathcal{X}$ нормально, существуют открытые множества V_0 и V_1, такие, что

$$F_0(y) - G \subset V_0, \quad F_1(y) - G \subset V_1 \quad \text{и} \quad V_0 \cap V_1 = 0.$$

Положим $U_j = V_j \cup G$. Тогда множества U_j открыты, $U_0 \cap U_1 = G$ и $F_j(y) \subset U_j$, т. е. $y \in F_j^{-1}(2^{U_j})$.

Таким образом, точка y принадлежит правой части равенства (2).

2) Обратно, предположим, что точка y принадлежит правой части равенства (2). Тогда $F_j(y) \subset U_j$, и поэтому $F(y) \subset U_0 \cap U_1$. Так как $U_0 \cap U_1 = G$, отсюда следует, что $y \in F^{-1}(2^G)$.

Теорема 1. *Если пространство $\mathcal{X}$ нормально, то пересечение $F = F_0 \cap F_1$ двух функций, полунепрерывных сверху в точке y_0, есть функция, полунепрерывная сверху в точке y_0.*

Доказательство. Пусть G — открытое множество в пространстве $\mathcal{X}$ и $y_0 \in F^{-1}(2^G)$. Покажем, что $y_0 \in \operatorname{Int}[F^{-1}(2^G)]$.

В силу равенства (2), существуют два открытых множества U_0 и U_1, таких, что $y_0 \in F_0^{-1}(2^{U_0}) \cap F_1^{-1}(2^{U_1})$ и $U_0 \cap U_1 = G$. Так как функции F_j полунепрерывны сверху в точке y_0, отсюда следует, что

$$y_0 \in \{\operatorname{Int}[F_0^{-1}(2^{U_0})] \cap \operatorname{Int}[F_1^{-1}(2^{U_1})]\}.$$

Последнее множество является открытым подмножеством множества $F^{-1}(2^G)$ (согласно равенству (2)), поэтому y_0 является внутренней точкой множества $F^{-1}(2^G)$.

Следствие 1а. *Если пространство $\mathcal{X}$ нормально, то пересечение $K \cap L$ является полунепрерывным сверху отображением пространства $2^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{X}}$ в пространство $2^{\mathcal{X}}$.*

Следствие 1б. *Пусть $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство. Тогда следующие условия эквивалентны* (см. § 17, V, следствие):

(i) *$\mathcal{X}$ нормально,*

(ii) *$K \cap L$ есть полунепрерывное сверху отображение пространства $2^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{X}}$ в пространство $2^{\mathcal{X}}$.*

Замечание 1. Следствие 1а вытекает также непосредственно из теоремы 1, § 17, V, согласно которой множество $\underset{K,L}{\mathsf{E}}(K \cap L \cap A = 0)$ открыто, каково бы ни было замкнутое множество A.

Замечание 2. Как указано в замечании 2, § 17, III, пересечение $K \cap L$ может и не быть непрерывным. Однако имеют место следующие два утверждения.

Теорема 2. *Пусть отображение $F: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно сверху в точке y_0, и пусть $K_0 \subset \mathcal{X}$ — фиксированное замкнутое множество. Тогда отображение $L = K_0 \cap F$ полунепрерывно сверху в точке y_0 (каково бы ни было топологическое пространство $\mathcal{X}$).*

Доказательство. Пусть множество G открыто в пространстве $\mathcal{X}$ и $L(y_0) \subset G$. Тогда $F(y_0) \subset [G \cup (\mathcal{X} - K_0)]$. Так как отображение F полунепрерывно сверху в точке y_0, существует открытое множество $H \subset \mathcal{Y}$, содержащее y_0, такое, что $F(y) \subset [G \cup (\mathcal{X} - K_0)]$ для каждой точки $y \in H$. Отсюда следует, что $[K_0 \cap F(y)] \subset G$, т. е. $L(y) \subset G$ для $y \in H$. В силу теоремы 3, п. III, отображение L полунепрерывно сверху в точке y_0.

Теорема 3. *Пусть отображение $F: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно снизу в точке y_0, и пусть $K_0 \subset \mathcal{X}$ — фиксированное открыто-замкнутое множество. Тогда отображение $L = K_0 \cap F$ полунепрерывно снизу в точке y_0.*

Доказательство. Пусть $B \subset \mathcal{Y}$ и $y_0 \in \overline{B}$. Мы должны показать (ср. с теоремой 2, п. III), что $L(y_0) \subset \overline{\mathbf{S} L(B)}$, т. е. что $[K_0 \cap F(y_0)] \subset \overline{K_0 \cap \mathbf{S} F(B)}$. Так как отображение F полунепрерывно снизу в точке y_0, мы имеем $F(y_0) \subset \overline{\mathbf{S} F(B)}$. Следовательно,

$$[K_0 \cap F(y_0)] \subset [K_0 \cap \overline{\mathbf{S} F(B)}] \subset \overline{K_0 \cap \mathbf{S} F(B)},$$

поскольку множество K_0 открыто.

Замечание[1]). Для *компактного* (бикомпактного) пространства $\mathcal{X}$ теорему 1 можно распространить на пересечение $\bigcap_{t \in T} F_t$, где T — произвольное множество индексов.

Предположение о компактности пространства $\mathcal{X}$ существенно; справедливо следующее утверждение, аналогичное следствию 1б.

Для того чтобы топологическое $\mathcal{T}_1$-пространство $\mathcal{X}$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого множества T пересечение $\bigcap_{t \in T} K_t$ было полунепрерывным сверху отображением произведения $\prod_{t \in T} 2^{\mathcal{X}_t}$, где $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}$, в пространство $2^{\mathcal{X}}$.

---

[1]) См. Энгелькинг [3].

VI. Разность полунепрерывных отображений.

Лемма. *Пусть $\mathcal{X}$ — регулярное пространство, $F_j : \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$, $F = \overline{F_0 - F_1}$ и множество K замкнуто в пространстве $\mathcal{X}$. Тогда*

$$(1) \qquad F^{-1}(2^K) = \bigcap_G \{\mathcal{Y} - [F_1^{-1}(2^G) - F_0^{-1}(2^{\overline{G}})]\},$$

где множество G открыто и $K \subset G$.

Это эквивалентно утверждению:

$$(2) \qquad \mathcal{Y} - F^{-1}(2^K) = \bigcup_G [F_1^{-1}(2^G) - F_0^{-1}(2^{\overline{G}})].$$

Доказательство. 1) Пусть $y \in \mathcal{Y} - F^{-1}(2^K)$, т. е. $\overline{F_0(y) - F_1(y)} \not\subset K$. Так как множество K замкнуто, отсюда следует, что $F_0(y) - F_1(y) \not\subset K$. Следовательно, существует точка $x \in F_0(y)$, такая, что $x \notin [K \cup F_1(y)]$. Так как пространство $\mathcal{X}$ регулярно, существует открытое множество G, такое, что $[K \cup F_1(y)] \subset G$ и $x \notin \overline{G}$, поэтому $F_0(y) - \overline{G} \neq 0$.

Таким образом,

$$(3) \qquad K \subset G \quad \text{и} \quad y \in [F_1^{-1}(2^G) - F_0^{-1}(2^{\overline{G}})].$$

2) Обратно, если соотношение (3) верно, то $F_1(y) \subset G$ и $F_0(y) \not\subset \overline{G}$. Следовательно, $F_0(y) - F_1(y) \not\subset \overline{G}$, и поэтому $F(y) \not\subset \overline{G}$. Таким образом, $F(y) \not\subset K$, т. е. $y \in \mathcal{Y} - F^{-1}(2^K)$.

Теорема. *Пусть пространство $\mathcal{X}$ регулярно. Если отображение F_0 полунепрерывно снизу в точке y_0, а отображение F_1 полунепрерывно сверху в точке y_0, то отображение $F = \overline{F_0 - F_1}$ полунепрерывно снизу в точке y_0.*

Доказательство. Пусть множество K замкнуто в пространстве $\mathcal{X}$ и $y_0 \in \overline{F^{-1}(2^K)}$. Покажем, что $y_0 \in F^{-1}(2^K)$. Согласно (1), мы имеем

$$y_0 \in \overline{\bigcap_{G \supset K} [\mathcal{Y} - F_1^{-1}(2^G)] \cup F_0^{-1}(2^{\overline{G}})} \subset \bigcap_{G \supset K} \{\overline{\mathcal{Y} - F_1^{-1}(2^G)} \cup \overline{F_0^{-1}(2^{\overline{G}})}\}.$$

Следовательно, для каждого $G \supset K$ мы имеем

$$y_0 \notin \operatorname{Int} F_1^{-1}(2^G) \quad \text{и} \quad y_0 \in \overline{F_0^{-1}(2^{\overline{G}})},$$

откуда, в силу полунепрерывности,

$$y_0 \notin F_1^{-1}(2^G) \quad \text{и} \quad y_0 \in F_0^{-1}(2^{\overline{G}}),$$

т. е.

$$y_0 \in \bigcap_{G \supset K} [\mathcal{Y} - F_1^{-1}(2^G)] \cup F_0^{-1}(2^{\overline{G}}).$$

В соответствии с формулой (1) это завершает доказательство.

Следствие. *Если $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство, то отображение $\overline{K-L}$ пространства $2^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{X}}$ в пространство $2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ регулярно.*

Достаточность условия регулярности следует из предыдущей теоремы. Его необходимость вытекает из следствия, § 17, IV. А именно, если пространство $\mathcal{X}$ нерегулярно, то множество

$$\mathop{\mathsf{E}}_{K,L}(\overline{K-L}=0) = \mathop{\mathsf{E}}_{K,L}(K-L=0)$$

незамкнуто. Следовательно, отображение $K-L$ не является полунепрерывным снизу.

Замечание 1. Отображение $\overline{K-L}$ может и не быть непрерывным (даже в случае $K=\mathcal{X}$).

Например, если $\mathcal{X}$ представляет собой замкнутый интервал [0, 1] и L_n—интервал $[1/n, 1]$, то $\overline{\mathcal{X}-L_n}$ есть интервал $[0, 1/n]$ и $\operatorname{Lim} L_n = \mathcal{X}$ (ср. § 29, VI), следовательно, множество $\overline{\mathcal{X}-\operatorname{Lim} L_n}$ пусто, в то время как множество $\operatorname{Lim} \overline{\mathcal{X}-L_n}$ непусто (оно состоит из точки 0).

§ 19. Пространство разбиения. Фактортопология

I. Определение. Пусть $\boldsymbol{D}$ — семейство замкнутых непустых и непересекающихся подмножеств пространства $\mathcal{X}$, объединение которых представляет собой все пространство $\mathcal{X}$:

(1) $$\boldsymbol{D} \subset 2^{\mathcal{X}} \quad \text{и} \quad \mathcal{X} = \mathbf{S}(\boldsymbol{D}).$$

Семейство $\boldsymbol{D}$ называется *разбиением* пространства $\mathcal{X}$. Топология в $\boldsymbol{D}$ определяется следующим образом:

(2) *множество $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{D}$ открыто (в $\boldsymbol{D}$) тогда и только тогда, когда множество $\mathbf{S}(\boldsymbol{A})$ открыто (в $\mathcal{X}$).*

Эквивалентно:

(3) *множество $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{D}$ замкнуто тогда и только тогда, когда множество $\mathbf{S}(\boldsymbol{A})$ замкнуто.*

Таким образом, если $\mathcal{X}$ — топологическое пространство, то и $\boldsymbol{D}$ — топологическое пространство ($\mathcal{T}_1$-пространство).

Рассмотрим отношение эквивалентности ρ, индуцированное разбиением $\boldsymbol{D}$, т. е.

$x \rho y \equiv$ (x и y принадлежат одному и тому же элементу семейства $\boldsymbol{D}$).

Тогда $\boldsymbol{D} = \mathscr{X}/\rho$. Ввиду этого соотношения определенная выше топология в $\boldsymbol{D}$ называется *фактортопологией*[1]).

II. Проекции. Связь с взаимно непрерывными отображениями. Пусть дано разбиение $\boldsymbol{D}$ пространства $\mathscr{X}$. Обозначим через $P(x)$ элемент разбиения $\boldsymbol{D}$, содержащий точку x:

$$(1) \qquad [D = P(x)] \equiv (x \in D \in \boldsymbol{D}).$$

Отображение $P : \mathscr{X} \to \boldsymbol{D}$ называется *проекцией*. Очевидно, что для $D \in \boldsymbol{D}$ и $A \subset \mathscr{X}$ имеют место следующие соотношения:

$$(2) \qquad (D \cap A \neq 0) \equiv [D \in P(A)] \equiv [D \subset \mathbf{S}P(A)];$$

$$(3) \qquad \overset{-1}{P}(D) = D;$$

$$(4) \qquad P^{-1}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{A}) \quad \text{для} \quad \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{D}.$$

В силу I (2) и I (3), отсюда следует

Теорема 1. *Множество $P^{-1}(\boldsymbol{A})$ открыто (соответственно замкнуто) тогда и только тогда, когда множество $\boldsymbol{A}$ открыто (соответственно замкнуто).*

Иными словами (см. § 13, XV), *отображение P взаимно непрерывно.*

Справедливо обратное утверждение:

Теорема 2. *Пусть задано взаимно непрерывное отображение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Обозначим через $\boldsymbol{D}$ (индуцированное) разбиение пространства $\mathscr{X}$ на множества $\overset{-1}{f}(y)$, где $y \in \mathscr{Y}$. Тогда*

$$\mathscr{Y} \underset{\text{top}}{=} \boldsymbol{D},$$

где $\overset{-1}{f}$ — требуемый гомеоморфизм.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "P"'] & \mathscr{Y} \arrow[d, "\overset{-1}{f}"] \\ & \boldsymbol{D} \end{tikzcd}$$

Доказательство. Очевидно, что приведенная диаграмма коммутативна, т. е. $P(x) = \overset{-1}{f}f(x)$.

Так как отображения P и f взаимно непрерывны, то и отображение $\overset{-1}{f}$ взаимно непрерывно (в силу теоремы 3, § 13, XV). Из теоремы 2, § 13, XV, тогда следует, что $\overset{-1}{f}$ — гомеоморфизм (так как очевидно, что отображение $\overset{-1}{f}$ взаимно однозначно).

[1]) См. Келли [1], стр. 94; Бурбаки [3], § 5 и [1], § 3, п. 4.

Замечание. Предыдущую теорему можно сформулировать следующим образом:

Фактортопология, индуцированная взаимно непрерывным отображением $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, *определена единственным образом с точностью до гомеоморфизма, а именно*

$$(\mathcal{X}/\rho) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Y},$$

где

$$x_1 \rho x_2 \equiv (f(x_1) = f(x_2)).$$

Таким образом, изучение фактортопологии можно свести к изучению взаимно непрерывных отображений.

В частности, можно следующим образом ввести понятие полунепрерывного разбиения (которое довольно часто используется[1])).

Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — взаимно непрерывное отображение на. Обозначим через $\boldsymbol{D}$ индуцированное разбиение пространства $\mathcal{X}$ на множества $\overset{-1}{f}(y)$, где $y \in \mathcal{Y}$. В силу теоремы 2, разбиение $\boldsymbol{D}$ можно отождествить с пространством $\mathcal{Y}$, а отображение f — с отображением P (проекцией пространства $\mathcal{X}$ в $\boldsymbol{D}$).

Определение. Разбиение $\boldsymbol{D}$ пространства $\mathcal{X}$ называется *полунепрерывным снизу* (*сверху*) тогда и только тогда, когда проекция $P: \mathcal{X} \to \boldsymbol{D}$ является открытым (замкнутым) отображением.

Более общим образом: элемент D разбиения $\boldsymbol{D}$ называется *элементом полунепрерывности снизу* (*сверху*) разбиения $\boldsymbol{D}$ тогда и только тогда, когда проекция P является открытым (замкнутым) отображением на множестве D.

Разбиение $\boldsymbol{D}$ называется *непрерывным*, если оно полунепрерывно и сверху, и снизу.

Так как для множества $A \subset \mathcal{X}$

$$P(A) = \underset{D \in \boldsymbol{D}}{\mathsf{E}} (D \cap A \neq 0) \quad \text{и} \quad P^{-1}P(A) = \mathsf{S}P(A),$$

то из определения открытых (замкнутых) отображений (см. § 13, XIII) вытекает следующая

Теорема 3. {*Разбиение* $\boldsymbol{D}$ *полунепрерывно снизу* (*сверху*)} $\equiv$ {*для каждого открытого* (*замкнутого*) *множества* $A \subset \mathcal{X}$ *объединение всех множеств* $D \in \boldsymbol{D}$, *пересекающихся с* A, *представляет собой открытое* (*замкнутое*) *множество*} $\equiv$ {*для каждого замкнутого* (*открытого*) *множества* $B \subset \mathcal{X}$ *объединение всех множеств* $D \in \boldsymbol{D}$, *содержащихся в* B, *представляет собой замкнутое* (*открытое*) *множество*}.

Теорема 4. *Разбиение* $\boldsymbol{D}$ *полунепрерывно сверху в* D *тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества*

---

[1]) См. Мур Р. [1], стр. 350, Александров [8], стр. 997, и [8а], стр. 555, Куратовский [11], стр. 169, и Уайберн [3], гл. VII.

$G \supset D$ существует открытое множество U, такое, что $D \subset U \subset G$ и множество U есть объединение некоторых элементов разбиения $\boldsymbol{D}$[1]).

Теорема 5. *Если $\boldsymbol{D}$ — полунепрерывное сверху разбиение нормального пространства $\mathscr{X}$, то фактортопология разбиения $\boldsymbol{D}$ нормальна.*

Следовательно, отношение ρ, индуцированное разбиением $\boldsymbol{D}$, замкнуто.

Это вытекает из теоремы 2, § 14, II, и теоремы 3, § 15, IV.

Теорема 6. *Если $\boldsymbol{D}$ — полунепрерывное снизу разбиение, и индуцированное им отношение ρ замкнуто, то фактортопология разбиения $\boldsymbol{D}$ хаусдорфова.*

Это следует из теоремы 4, § 15, IV.

Теорема 7. *Разбиение $\boldsymbol{D}$ произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ на множества $\{x\} \times \mathscr{Y}$, где $x \in \mathscr{X}$, полунепрерывно снизу и $\boldsymbol{D} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}$.*

Это следует из того, что отображение $f: \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, заданное формулой $f(x, y) = x$, открыто (см. § 15, II, теорема 1).

III. Примеры и замечания.

Пример 1. Разбиение D плоскости $\mathscr{E}^2$ на вертикальные линии не является полунепрерывным сверху, так как объединение вертикалей, пересекающих гиперболу $y = 1/x$, не замкнуто. Заметим, что здесь отношение ρ замкнуто и $\mathscr{Y} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{E}$.

Пример 2. Пусть пространство $\mathscr{X}$ состоит из точек $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, и точки 0, и пусть D имеет в качестве элементов пару $(0, 1)$ и одноэлементные множества $(1/n)$, где $n > 1$.

Разбиение D полунепрерывно сверху, но не является полунепрерывным снизу. Здесь $D \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}$.

Пример 3. Пространство $\mathscr{X}$ состоит из точек $1/n$ и $1 - 1/n$ для $n \geqslant 1$. Элементами D являются двухэлементные множества $(1/n, 1 - 1/n)$ при $n > 2$ и одноэлементные множества (0), $(^1/_2)$ и (1).

Такое разбиение D полунепрерывно снизу, но не полунепрерывно сверху. Оно гомеоморфно пространству, состоящему из бесконечной последовательности точек $p_0, p_1, \ldots$, где каждое бесконечное замкнутое множество содержит и точку p_0, и точку p_1.

Это пространство не является хаусдорфовым (следовательно, отношение ρ не замкнуто).

Замечание. Отображение $F: \mathscr{T} \to 2^{\mathscr{X}}$ может быть непрерывным и таким, что $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{t \in \mathscr{T}} F(t)$ и $F(t) \cap F(t') = 0$, но тем не менее разбиение D пространства $\mathscr{X}$ на множества $F(t)$ не будет полунепрерывным.

Так будет, например, когда $\mathscr{T}$ — счетное дискретное пространство, а $\boldsymbol{D}$ — счетное не полунепрерывное разбиение пространства $\mathscr{X}$ (см. примеры 2 и 3).

---

[1]) Это условие принимают иногда за определение. См., например, Келли [1], стр. 99, и Уайберн [3].

Однако если пространство $\mathcal{T}$ — компакт и отображение F полунепрерывно сверху, то разбиение D полунепрерывно сверху (см. т. II, гл. 4).

IV. Связь фактортопологии с экспоненциальной топологией. Вообще говоря, фактортопология разбиения $\boldsymbol{D}$ отличается от экспоненциальной топологии (если разбиение $\boldsymbol{D}$ рассматривать как подмножество пространства $2^{\mathcal{X}}$). Это видно из примера 2, п. III.

Очевидно, что разбиение $\boldsymbol{D}$ с фактортопологией гомеоморфно пространству $\mathcal{X}$, в то время как в экспоненциальной топологии оно дискретно. Если P имеет тот же смысл, что и в предыдущем пункте, то $\overset{1}{P}$ представляет собой тождественное отображение:

$$\overset{1}{P} : \boldsymbol{D} \cap 2^{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{D},$$

где $\boldsymbol{D}$ имеет фактортопологию, а $\boldsymbol{D} \cap 2^{\mathcal{X}}$ — экспоненциальную топологию.

В предыдущем примере отображение $\overset{1}{P}$ не является гомеоморфизмом. Тем не менее имеет место следующая

Теорема 1. *Фактортопология разбиения* $\boldsymbol{D}$ *слабее, чем экспоненциальная топология, т. е. отображение* $\overset{1}{P}$ *непрерывно.*

Иначе говоря, *если* $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{D}$ *и множество* $\mathsf{S}(\boldsymbol{E})$ *открыто в пространстве* $\mathcal{X}$, *то множество* $\boldsymbol{E}$ *открыто относительно* $\boldsymbol{D}$ *в экспоненциальной топологии.*

Это следует из формулы $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} \cap 2^{\mathsf{S}(\boldsymbol{E})}$.

Теорема 2. $\{$*Разбиение* $\boldsymbol{D}$ *полунепрерывно снизу (сверху)*$\} \equiv \{$*тождественное отображение* $\overset{-1}{P}$ *полунепрерывно снизу (сверху)*$\}$.

Более точно: $\{$*элемент* D *разбиения* $\boldsymbol{D}$ *является элементом полунепрерывности снизу (сверху) разбиения* $\boldsymbol{D}\} \equiv \{$*отображение* $\overset{-1}{P}$ *полунепрерывно снизу (сверху) в* $D\}$.

Это следует из теоремы 5, § 18, III, если заменить отображение f отображением P, а пространство $\mathcal{Y}$ — разбиением $\boldsymbol{D}$ с фактортопологией.

Отсюда вытекает

Следствие. $\{$*Разбиение* $\boldsymbol{D}$ *непрерывно*$\} \equiv \{$*отображение* $\overset{-1}{P}$ *непрерывно, следовательно, представляет собой гомеоморфизм*$\} \equiv \{$*фактортопология разбиения* $\boldsymbol{D}$ *тождественна его экспоненциальной топологии*$\}$.

Элемент D *разбиения* $\boldsymbol{D}$ *является элементом непрерывности тогда и только тогда, когда отображение* $\overset{-1}{P}$ *непрерывно в* D.

ГЛАВА 2

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

А. СВЯЗЬ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ. $\mathscr{L}^*$-ПРОСТРАНСТВА

§ 20. $\mathscr{L}^*$-пространства (в которых определено понятие предела)

I. Определение. Произвольное множество называется *$\mathscr{L}^*$-пространством*, если в нем выделен некоторый класс последовательностей (называемых *сходящимися*), причем каждой последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ этого класса поставлен в соответствие некоторый элемент $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$ таким образом, что выполняются следующие условия[1]):

1° *если* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ *и* $k_1 < k_2 < \ldots$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} p_{k_n} = p$;

2° *если* $p_n = p$ *для каждого* n, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$;

3° *если последовательность* $p_1, p_2, \ldots$ *не сходится к* p, *то она содержит подпоследовательность*[2]) $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$, *никакая подпоследовательность которой не сходится к* p.

Легко доказать следующие два утверждения:

Теорема 1. *Ни сходимость, ни предел последовательности не зависят от n первых членов этой последовательности*, т. е. если добавить, опустить или заменить конечное число членов, то сходимость последовательности и значение ее предела не изменятся.

Теорема 2. *Пусть заданы две последовательности, такие, что* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$; *тогда последовательность* $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ *сходится к* p.

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, *и пусть последовательность* $\{q_n\}$ *состоит из элементов последовательности* $\{p_n\}$,

---

[1]) Абстрактные пространства, в которых понятие предела играет роль исходного понятия, были введены Фреше в его диссертации (Paris, 1906); см. также Фреше [1]. По поводу условия 3° см. Александров и Урысон [1], стр. 1274, и Урысон [7], где $\mathscr{L}^*$-пространства обозначаются через $\mathscr{L}_t$.

[2]) $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ есть *подпоследовательность* последовательности $p_1, p_2, \ldots$, если $k_1 < k_2 < \ldots$.

каждый из которых повторен не более конечного числа раз; тогда последовательность $\{q_n\}$ *также сходится к* p.

Доказательство. По предположению, каждому целому положительному числу m можно поставить в соответствие такое число r_m, что $p_{r_m} = q_m$, причем для фиксированного числа n равенство $n = r_m$ имеет место только для конечного числа значений m. Если предположить, что последовательность $\{q_m\}$ не сходится к p, то тогда, согласно 3°, существует последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$, такая, что последовательность $q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots$ не содержит никакой подпоследовательности, сходящейся к p. Так как никакой член последовательности $r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots$ не повторяется бесконечное число раз, существует такая последовательность индексов $l_1 < l_2 < \ldots$, что $r_{k_{l_1}} < r_{k_{l_2}} < \ldots$. Положим $s_n = r_{k_{l_n}}$; последовательность $p_{s_1}, p_{s_2}, \ldots$ является подпоследовательностью последовательности $\{p_n\}$, поэтому $p = \lim\limits_{n \to \infty} p_{s_n} = \lim\limits_{n \to \infty} q_{k_{l_n}}$, ибо $p_{s_n} = q_{k_{l_n}}$. Но последовательность $q_{k_{l_1}}, q_{k_{l_2}}, \ldots$ является подпоследовательностью последовательности $q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots$, и мы приходим к противоречию.

Мы отмечаем звездочкой рассматриваемые здесь пространства в отличие от $\mathscr{L}$-пространств М. Фреше, которые подчиняются только условиям 1° и 2°. Эти два условия не дают удовлетворительной характеристики понятия предела: например, множество, состоящее из двух элементов a и b с единственными сходящимися последовательностями $a, a, a, \ldots$ и $b, b, b, \ldots$ (последовательность $a, b, b, b, \ldots$ расходится!) есть $\mathscr{L}$-пространство. См. также п. II, III и Фреше [5], стр. 169.

Примеры. Пространство $\mathscr{E}$ действительных чисел (так же как и $\mathscr{E}^n$) является $\mathscr{L}^*$-пространством при обычном определении предела. То же самое верно для пространства действительных функций, определенных на произвольном множестве, если положить

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n = f\right] \equiv \bigwedge_x \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right]. \tag{1}$$

II. Связь с топологическими пространствами. Замыкание $\overline{X}$ подмножества X некоторого $\mathscr{L}^*$-пространства определяется условием: $p \in \overline{X}$ тогда и только тогда, когда p является пределом последовательности элементов подмножества X. Таким образом, если $X = \overline{X}$, то мы называем множество X *замкнутым*, а множество $(-X)$ *открытым*.

Теорема 1. *Каждое* $\mathscr{L}^*$-*пространство удовлетворяет аксиомам* 1—3 *и* 5, § 4, I.

Более точно *из условия* 1° *следует аксиома* 1, *а из условия* 2° — *аксиомы* 2 *и* 5 (см. рассуждения, приведенные в § 4, II).

Замечание. $\mathscr{L}^*$-пространство может не быть топологическим. Таким является пространство действительных функций, рассмотренное в § 4, V[1]).

Теорема 2. *Пусть X — множество элементов произвольной подпоследовательности $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ последовательности $p_1, \ldots, p_n, \ldots$. Для того чтобы $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любой подпоследовательности $p \in \overline{X}$.*

Доказательство. Если $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, то, в силу 1°, $p \in \overline{X}$. Обратно, если данная последовательность не сходится к p, то, согласно 3°, она содержит подпоследовательность $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$, никакая подпоследовательность которой не сходится к p. Более того, можно предположить, что последовательность $\{p_{k_n}\}$ не содержит элемента p, ибо, в силу 2°, он не может повторяться в ней более конечного числа раз, а в этом случае ее можно заменить подпоследовательностью, которая не содержит p. Итак, никакая последовательность (различных или совпадающих) элементов $x_1, x_2, \ldots$ множества X не сходится к p, поскольку в случае, когда эта последовательность содержит бесконечное множество различных элементов, она содержит подпоследовательность последовательности $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$, т. е. последовательность, не сходящуюся к p. В случае же, когда последовательность $x_1, x_2, \ldots$ имеет конечное число различных членов, существует один член, повторяющийся бесконечное число раз; так как этот член отличен от p, то последовательность не может сходиться к p. Таким образом, в любом случае $p \notin \overline{X}$.

Теорема 3. *Пусть задано хаусдорфово пространство с локально счетной базой в каждой точке p. Тогда можно, не изменяя его топологии, ввести в нем понятие предела последовательности точек и тем самым наделить его $\mathscr{L}^*$-структурой.*

А именно будем считать, что $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности U точки p существует такое k, что $p_n \in U$ для всех $n > k$.

Доказательство. Никакая последовательность не может иметь двух различных пределов p и q, так как точки p и q имеют непересекающиеся окрестности U и V. Условия 1° и 2° очевидны. Проверим условие 3°. Предположим, что последовательность $p_1, p_2, \ldots$

---

[1]) Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $\mathscr{T}_1$-пространство было $\mathscr{L}^*$-пространством, даны Урысоном [7]. В связи с аналогичными вопросами см. также Антоновский [1*].

не сходится в точке p. Это означает, что существуют окрестность U точки p и подпоследовательность p_{k_1}, p_{k_2}, ..., лежащая вне окрестности U. Поэтому никакая подпоследовательность этой последовательности не сходится к точке p.

Пусть теперь $p \in \overline{A}$ (в заданной топологии рассматриваемого пространства). Мы должны показать, что $p = \lim p_n$, где $p_n \in A$. Пусть U_1, U_2, ... — локальная база в точке p. Так как множество $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ является окрестностью точки p, оно содержит некоторую точку p_n множества A, т. е. $p_n \in (A \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n)$. Пусть теперь U — произвольная окрестность точки p. Тогда существует такое n_0, что $U_{n_0} \subset U$. Следовательно, при $n > n_0$ имеем $p_n \in U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \subset U_{n_0} \subset U$ и $p = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

Обратно, если $p = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$, где $p_n \in A$, и если U — некоторая окрестность точки p, то для достаточно больших n имеем $p_n \in U$, и поэтому $U \cap A \neq 0$. Следовательно, $p \in \overline{A}$.

Отсюда следует, что все теоремы о $\mathscr{L}^*$-пространствах справедливы для хаусдорфовых пространств с локально счетной базой.

III. Понятие непрерывности.

Определение. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, где $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ являются $\mathscr{L}^*$-пространствами. *Отображение f непрерывно в точке x*, если

$$(1) \qquad \left[x = \lim_{n \to \infty} x_n\right] \Rightarrow \left[f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)\right].$$

Теорема. *Если замыкание определено, как в п.* II, *то данное выше определение* (*Гейне*) *эквивалентно следующему* (см. § 13, I):

$$(2) \qquad [x \in \overline{A}] \Rightarrow [f(x) \in \overline{f(A)}].$$

Доказательство. 1) Пусть имеет место импликация (1), и пусть $x \in \overline{A}$. Тогда существует последовательность x_1, x_2, ..., такая, что $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ и $x_n \in A$. Поэтому, согласно (1), $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$, и так как $f(x_n) \in f(A)$, то $f(x) \in \overline{f(A)}$. Итак, импликация (2) выполняется.

2) Предположим теперь, что имеет место импликация (2). Пусть $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, и пусть A — множество элементов произвольной подпоследовательности x_{k_1}, x_{k_2}, ... Согласно теореме 2, п. II, $x \in \overline{A}$. Следовательно, в силу (2), $f(x) \in \overline{f(A)}$. Так как $f(x_{k_1})$, $f(x_{k_2})$, ... — произвольная подпоследовательность последовательности $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., то $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$. Итак, импликация (1) имеет место.

Отсюда легко получить такое

Следствие. *Отображение f является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$(3)\qquad \left[x=\lim_{n\to\infty} x_n\right] \equiv \left[f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right].$$

Замечание. Предположение о том, что пространство значений является $\mathscr{L}^*$-пространством, существенно. В самом деле, если оно является $\mathscr{L}$-пространством, но не является $\mathscr{L}^*$-пространством, то оно содержит последовательность $y_0, y_1, \ldots$, не сходящуюся к точке y_0, хотя каждая ее подпоследовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к точке y_0. Положим $f(0)=y_0$ и $f(1/n)=y_n$. Функция f непрерывна в смысле § 13, I, но не удовлетворяет условию Гейне.

Вообще, если области определения и значений являются $\mathscr{L}$-пространствами, но не обязательно $\mathscr{L}^*$-пространствами, то непрерывность функции f (в смысле § 13, I) эквивалентна следующему условию: *если* $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *то существует подпоследовательность* $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, *такая, что* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n})$.

IV. Прямое произведение $\mathscr{L}^*$-пространств. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два $\mathscr{L}^*$-пространства. Наделим множество $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ структурой $\mathscr{L}^*$-пространства, считая, что последовательность точек $\mathfrak{z}_n=(x_n, y_n)$ сходится к точке $\mathfrak{z}=(x, y)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$.

Вообще, пусть $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \ldots$ — бесконечная последовательность $\mathscr{L}^*$-пространств; будем считать, что последовательность $\mathfrak{z}_n=(\mathfrak{z}_n^1, \mathfrak{z}_n^2, \ldots)$ сходится (в пространстве $\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\ldots$) к последовательности $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots)$, если для каждого i имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{z}_n^i=\mathfrak{z}^i$, т. е. если i-й член последовательности $\mathfrak{z}_n$ стремится к i-му члену последовательности $\mathfrak{z}$. Запишем это так:

$$(1)\qquad \left(\lim_{n\to\infty}\mathfrak{z}_n=\mathfrak{z}\right)\equiv\bigwedge_i\left(\lim_{n\to\infty}\mathfrak{z}_n^i=\mathfrak{z}^i\right).$$

Пусть f — функция, ставящая в соответствие каждой точке t некоторого множества T точку $\mathfrak{z}$ прямого произведения $\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\ldots$ (или, в частности, произведения $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$). Положим

$$g_i(t)=[f(t)]^i \quad (i\text{-я координата точки } \mathfrak{z}=f(t)).$$

Теорема 1. *Для того чтобы функция f была непрерывна в точке t пространства T, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций g_i, $i=1, 2, \ldots$, была непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если последовательность $t_1, t_2, \ldots$ сходится к точке t, то

$$(2)\qquad \left[f(t)=\lim_{n\to\infty} f(t_n)\right]\equiv\bigwedge_i\left[(f(t))^i=\lim_{n\to\infty}(f(t_n))^i\right].$$

Теорема 2. *i-я координата $\mathfrak{z}^i$ точки $\mathfrak{z}$ прямого произведения является непрерывной функцией точки $\mathfrak{z}$.*

Другими словами, *проекция на i-ю ось есть непрерывное отображение.*

Доказательство. В силу (1), из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{z}_n^i = \mathfrak{z}^i$.

Теорема 3. *Если отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно, то его график $\mathfrak{J} = \mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,y} (y = f(x))$ представляет собой замкнутое множество, гомеоморфное пространству $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, f(x_n)) = (x, y)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Из первого равенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ (ввиду непрерывности отображения f). Поэтому $y = f(x)$ и $(x, y) \in \mathfrak{J}$, откуда $\overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$.

Функция, ставящая в соответствие точке x точку $(x, f(x))$, определяет гомеоморфизм пространства $\mathcal{X}$ на множество $\mathfrak{J}$, ибо из условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, f(x_n)) = (x, f(x))$; обратно, из последнего условия следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Теорема 4. *Конечное или счетное произведение сепарабельных пространств сепарабельно.*

В самом деле, множество $\mathfrak{R}$, рассмотренное в доказательстве теоремы 6, § 16, V, всюду плотно в произведении.

V. Счетно-компактные $\mathcal{L}^*$-пространства.

Определение. $\mathcal{L}^*$-пространство называется *счетно-компактным*[1]), если любая бесконечная последовательность точек $p_1, p_2, \ldots$ этого пространства содержит сходящуюся подпоследовательность:

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} p_{k_n} = p, \qquad \text{где } k_1 < k_2 < \ldots.$$

Это определение согласуется с определением, данным для топологических пространств в § 5, VII (см. следующее далее замечание к теореме 3).

Примеры. 1° Согласно классической теореме Больцано—Вейерштрасса, n-мерный куб $\mathcal{J}^n$ является счетно-компактным. Вообще, любое замкнутое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}^n$ счетно-компактно (даже компактно).

2° Множество порядковых чисел $\alpha < \Omega$ (с обычным понятием предела, принятым в теории порядковых чисел) есть счетно-компактное пространство.

---

[1]) Компактные пространства, определенные в § 5, VII, будут изучаться в гл. 4.

Легко доказать (используя I, 3°) следующие теоремы:

Теорема 0. *Пусть пространство счетно-компактно. Если каждая сходящаяся подпоследовательность последовательности* $p_1, p_2, \ldots$ *сходится к точке* p, *то* $p = \lim p_n$.

Теорема 1. *Любое замкнутое подмножество* F *счетно-компактного пространства счетно-компактно.*

Обратно, счетно-компактное подмножество A *произвольного пространства* $\mathscr{X}$ *есть замкнутое множество.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы рассмотрим последовательность точек $p_1, p_2, \ldots$ множества F. Так как данное пространство счетно-компактно, эта последовательность содержит подпоследовательность, удовлетворяющую условию (1). Так как множество F замкнуто, $p \in F$. Следовательно, множество F счетно-компактно.

Предположим теперь, что множество A счетно-компактно, но не замкнуто. Следовательно, в множестве A существует последовательность точек, сходящаяся к точке p, не принадлежащей A. Тогда любая подпоследовательность этой последовательности также сходится к точке p. Таким образом, множество A не является счетно-компактным.

Теорема 2 (Кантор [4]). *Если* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ — *убывающая последовательность непустых замкнутых подмножеств счетно-компактного пространства, то* $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \neq 0$.

Доказательство. Построим бесконечную последовательность $p_1, p_2, \ldots$, выбирая по точке p_n из каждого множества F_n. Так как пространство счетно-компактно, эта последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, т. е. выполняется формула (1). Так как множества F_n замкнуты и все члены последовательности $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$, за исключением конечного числа, являются точками множества F_n, то $p \in F_n$. Следовательно, $p \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots$.

Теорема 3 (Борель [1]). *Любое счетное открытое покрытие счетно-компактного пространства* $\mathscr{X}$ *содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть

(2) $\mathscr{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, где множества G_n открыты $(n = 1, 2, \ldots)$.

Покажем, что существует k, такое, что

$$\mathscr{X} = \bigcup_{n=1}^{k} G_n. \tag{3}$$

В самом деле, положим, $F_k = \mathscr{X} - (G_1 \cup \ldots \cup G_k)$. Тогда $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$. Допустим, что формула (3) не имеет места ни для какого k; тогда имеем $F_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Отсюда, в силу теоремы 2, следует, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq 0$, т. е. $\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_1 \cup \ldots \cup G_k) \neq \mathscr{X}$, поэтому $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \neq \mathscr{X}$, вопреки равенству (2).

Замечание. Теорема Бореля была получена из теоремы Кантора. Теорему Кантора в свою очередь можно получить из теоремы Бореля. Таким образом, эти теоремы эквивалентны (в пространствах, удовлетворяющих аксиоме 1, § 4). (См. Сакс [1].)

Более того, в $\mathscr{L}^*$-пространствах из теоремы Кантора следует счетная компактность. Действительно, предположим, что последовательность $p_1, p_2, \ldots$ не содержит никакой сходящейся подпоследовательности. Тогда множество $F_1 = (p_1, p_2, \ldots)$ замкнуто, так же как и все множества $F_n = (p_n, p_{n+1}, \ldots)$ $(n > 1)$. Но $F_1 \cap F_2 \cap \ldots = 0$, и мы получаем противоречие с теоремой Кантора.

Итак, определение счетной компактности в $\mathscr{L}^*$-пространстве эквивалентно определению этого понятия, данному для топологических пространств в § 5, VII.

Теорема 4. *Прямое произведение (конечное или счетное) семейства счетно-компактных пространств есть счетно-компактное пространство.*

В частности, пространство $\mathscr{J}^{\aleph_0}$ счетно-компактно.

В самом деле, пусть $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ — последовательность точек произведения $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \times \ldots$, где $\mathfrak{z}_n = (\mathfrak{z}_n^1, \mathfrak{z}_n^2, \ldots)$. Так как пространство $\mathscr{X}_1$ счетно-компактно, существует последовательность целых чисел $1 < k_1 < k_2, \ldots$, такая, что последовательность $\mathfrak{z}_{k_1}^1, \mathfrak{z}_{k_2}^1, \ldots$ сходится; пусть $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{z}_{k_n}^1 = x^1$.

Аналогично, так как пространство $\mathscr{X}_2$ счетно-компактно, существует последовательность целых чисел $1 < l_1 < l_2 < \ldots$, такая, что последовательность $\mathfrak{z}_{k_{l_1}}^2, \mathfrak{z}_{k_{l_2}}^2, \ldots$ сходится; пусть $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{z}_{k_{l_n}}^2 = x^2$.

Продолжая этот процесс, определим последовательность точек $x^1 \in \mathscr{X}_1$, $x^2 \in \mathscr{X}_2, \ldots$ (конечную или бесконечную в зависимости от числа пространств $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \ldots$). Положим $x = (x^1, x^2, \ldots)$. Последовательность $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_{k_1}, \mathfrak{z}_{k_{l_1}}, \ldots$ сходится к точке x. В самом деле, легко видеть, что $1 < k_1 < k_{l_1} < k_{l_{m_1}} < \ldots$, поэтому $\mathfrak{z}_{k_1}^1$, $\mathfrak{z}_{k_{l_1}}^1, \ldots$ как подпоследовательность последовательности $\{\mathfrak{z}_{k_n}^1\}$ сходится к точке x^1, а значит, и последовательность $\mathfrak{z}_1^1, \mathfrak{z}_{k_1}^1, \mathfrak{z}_{k_{l_1}}^1, \ldots$ также сходится к точке x^1. Аналогично, $\mathfrak{z}_{k_{l_1}}^2, \mathfrak{z}_{k_{l_{m_1}}}^2, \ldots$ есть подпоследовательность последовательности $\left\{\mathfrak{z}^2_{k_{l_n}}\right\}$, и поэтому последовательность $\mathfrak{z}^2_1, \mathfrak{z}^2_{k_1}, \mathfrak{z}^2_{k_{l_1}}, \ldots$ сходится к точке x^2. Вообще, последовательность $\mathfrak{z}^n_1, \mathfrak{z}^n_{k_1}, \mathfrak{z}^n_{k_{l_1}}, \ldots$ сходится к точке x^n, откуда мы заключаем, что последовательность $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_{k_1}, \mathfrak{z}_{k_{l_1}}, \ldots$ сходится к x.

Теорема 5. *Счетная компактность пространства инвариантна относительно непрерывных отображений.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение пространства $\mathcal{X}$ на пространство $\mathcal{Y}$ (предполагается, что оба они являются $\mathcal{L}^*$-пространствами). Пусть $y_1, y_2, \ldots$ — последовательность точек, принадлежащих $\mathcal{Y}$, и пусть $y_n = f(x_n)$. Так как пространство $\mathcal{X}$ счетно-компактно, последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = p$, где $k_1 < k_2, \ldots$. Поскольку функция f непрерывна, из этого равенства следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_{k_n}\right) = f(p), \quad \text{т. е.} \quad \lim_{n\to\infty} y_{k_n} = f(p).$$

Тем самым доказано, что последовательность $\{y_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 6. *Если пространство $\mathcal{X}$ счетно-компактно и отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно, то f является замкнутым отображением.*

Иначе говоря, $(F = \bar{F}) \Rightarrow [f(F) = \overline{f(F)}]$.

Доказательство. В силу теоремы 1, множество F счетно-компактно, поэтому, согласно теореме 5, множество $f(F)$ также счетно-компактно и, следовательно, замкнуто в пространстве $\mathcal{Y}$ (по теореме 1).

Из теоремы 6 непосредственно вытекает (см. § 13, XIII)

Следствие 6а. *Всякое взаимно однозначное непрерывное отображение счетно-компактного пространства является гомеоморфизмом.*

Теорему 6 можно усилить следующим образом.

Теорема 7. *Пусть пространство $\mathcal{Y}$ счетно-компактно. Тогда проекция $f: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ замкнута.*

Иначе говоря, *если множество* $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,y} \varphi(x, y)$ *замкнуто, то и множество* $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x} \bigvee\limits_{y} \varphi(x, y)$ *замкнуто.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — сходящаяся последовательность точек множества $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x} \bigvee\limits_{y} \varphi(x, y)$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда в пространстве $\mathcal{Y}$ существует такая последовательность y_1,

$y_2, \ldots$, что $\varphi(x_n, y_n)$. Поскольку пространство $\mathcal{Y}$ счетно-компактно, эта последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_n}\}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = y_0$. Так как множество $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,\varphi(x, y)$ замкнуто и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$, то имеем $\varphi(x_0, y_0)$, поэтому $x_0 \in \underset{x}{\mathsf{E}}\,\underset{y}{\bigvee}\,\varphi(x, y)$.

Следствие 7а. *Пусть пространство* $\mathcal{Y}$ *компактно и пусть множество* $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,\varphi(x, y)$ *открыто, тогда множество* $\underset{x}{\mathsf{E}}\,\underset{y}{\bigwedge}\,\varphi(x, y)$ *открыто.*

Следствие 7б. *Пусть* $\mathcal{Y}$ — *счетное объединение компактных множеств. Если множество* $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,\varphi(x, y)$ *типа* $\boldsymbol{F}_\sigma$, *то и множество* $\underset{x}{\mathsf{E}}\,\underset{y}{\bigvee}\,\varphi(x, y)$ *типа* $\boldsymbol{F}_\sigma$. *Если множество* $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,\varphi(x, y)$ *типа* $\boldsymbol{G}_\delta$, *то и множество* $\underset{x}{\mathsf{E}}\,\underset{y}{\bigwedge}\,\varphi(x, y)$ *типа* $\boldsymbol{G}_\delta$.

Теорема 8. *Пусть пространство* $\mathcal{Y}$ *счетно-компактно, и пусть* $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. *Множество* $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[y = f(x)]$ *замкнуто тогда и только тогда, когда отображение* f *непрерывно.*

Доказательство. Очевидно, что сформулированное условие является достаточным (даже без предположения счетной компактности, ср. с теоремой 3, п. IV).

Чтобы показать, что оно необходимо, положим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и выберем из последовательности $f(x_1), f(x_2), \ldots$ сходящуюся подпоследовательность $\{f(x_{k_n})\}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = y_0$. Тогда $(x_0, y_0) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{k_n}, f(x_{k_n}))$. Так как множество $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[y = f(x)]$ замкнуто, оно содержит точку (x_0, y_0). Это означает, что $y_0 = f(x_0)$. В силу теоремы 0, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Замечание. Различные другие свойства компактных пространств будут рассмотрены в гл. 4; для счетно-компактных пространств они могут быть легко доказаны.

VI. Непрерывная сходимость. Множество $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ как $\mathcal{L}^*$-пространство.

Определение 1. Пусть $f_n: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность $f_1, f_2, \ldots$ называется *непрерывно сходящейся* к функции f (см. Хан [1], стр. 238), если

$$(0)\qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)\right).$$

Из непрерывной сходимости следует обычная сходимость. Чтобы убедиться в этом, достаточно в определении непрерывной сходимости положить $x_n = x$.

Замечание. Обратное утверждение не имеет места. Так, например полагая $f_n(x)=x^n$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x)=0$ при $x<1$ и $f(1)=1$, получаем равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, однако сходимость в этом случае не является непрерывной.

Следующий пример показывает, что сходимость непрерывных функций к *непрерывному* пределу может не быть непрерывной сходимостью. Определим функцию f_n, положив $f_n(x)=0$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n-1} \leqslant x \leqslant 1$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1$, а в интервалах $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ и $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$ считая функцию f_n линейной. Тогда тождественно имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, но сходимость не является непрерывной.

Определение 2. *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — *два* $\mathscr{L}^*$-*пространства. Множество* $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ (см. § 13, I) *можно снабдить структурой* $\mathscr{L}^*$-*пространства, понимая под равенством* $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *непрерывную сходимость последовательности функций* $\{f_n\}$ *к функции* f.

Покажем, что пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ с таким определением предела удовлетворяет условиям 1°—3°, п. I.

Допустим сначала, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ и что $k_1<k_2< \ldots$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k_n}=f$, т. е. что из условия

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

следует равенство

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x_n)=f(x).$$

С этой целью рассмотрим последовательность $\{z_m\}$, определенную следующим образом: $z_m=x_n$ при $k_{n-1}<m \leqslant k_n$ (где $k_0=0$). Тогда (см. I, 3) $\lim\limits_{m\to\infty} z_m=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Так как последовательность $\{f_m\}$ непрерывно сходится, имеем $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(z_m)=f(x)$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k_n}(z_{k_n})= f(x)$; поскольку $z_{k_n}=x_n$, отсюда следует (2).

Для проверки условия 2° положим $f_n=f$ при $n=1, 2, \ldots$. Нужно показать, что из условия (1) вытекает соотношение $\lim f(x_n)= f(x)$; но это следует из непрерывности функции f.

Наконец, для проверки условия 3° допустим, что последовательность $f_1, f_2, \ldots$ не сходится к функции f. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию (1), такая, что последовательность $\{f_n(x_n)\}$ не сходится к $f(x)$. Так как $\mathscr{Y}$ есть $\mathscr{L}^*$-пространство, существует последовательность индексов $k_1<k_2<\ldots$, такая, что последовательность $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$ не содержит никакой подпоследовательности, сходящейся к точке $f(x)$. Отсюда непосредственно следует, что последовательность $\{f_{k_n}\}$ не содержит никакой подпоследовательности, сходящейся к функции f, ибо в противном случае существовала бы последовательность индексов $m_1 < m_2 < \ldots$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k_{m_n}} = f$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}}) = f(x)$, так как, в силу (1), $\lim x_{k_{m_n}} = x$. Но $\{f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}})\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$, и мы приходим к противоречию с определением последовательности $\{k_n\}$.

Замечание. Предположение непрерывности функций f, f_1, f_2, ... выступает только в доказательстве условия 2°.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$; положим $g(f, x) = f(x)$. Тогда отображение $g: \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно.*

VII. Операции над пространствами $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ с $\mathcal{L}^*$-топологией.

Теорема 1. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Z}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{=} (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})^{\mathcal{X}},$$

а также более общее соотношение

$$\prod_i \mathcal{Y}_i^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{=} \Big(\prod_i \mathcal{Y}_i\Big)^{\mathcal{X}}, \quad \textit{откуда} \quad (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{=} (\mathcal{Y}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}.$$

Для доказательства построим гомеоморфное отображение прямого произведения $\prod\limits_i \mathcal{Y}_i^{\mathcal{X}}$ на функциональное пространство $\Big(\prod\limits_i \mathcal{Y}_i\Big)^{\mathcal{X}}$.

Положим $h(f) = g$, где

$$f = [f^1, f^2, \ldots], \; f^i \in \mathcal{Y}_i^{\mathcal{X}} \quad \text{и} \quad g(x) = [f^1(x), f^2(x), \ldots].$$

Непосредственно видно, что определенная таким образом функция g непрерывна (см. IV, 1), следовательно, она принадлежит пространству $\Big(\prod\limits_i \mathcal{Y}_i\Big)^{\mathcal{X}}$. Обратно, каждому элементу g этого пространства соответствует функция f, такая, что $g = h(f)$, а именно $f = [g^1, g^2, \ldots]$. Таким образом,

$$h(\mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Y}_2^{\mathcal{X}} \times \ldots) = (\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots)^{\mathcal{X}}.$$

Отображение h непрерывно. В самом деле, пусть $\lim f_n = f$. Положим $g_n = h(f_n)$, т. е. $g_n(x) = [f_n^1(x), f_n^2(x), \ldots]$; докажем, что $\lim g_n = g$, т. е. что из условия (1), п. VI следует равенство $\lim g_n(x_n) = g(x)$, или $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^i(x_n) = f^i(x)$. Но условие $\lim f_n = f$

означает, что для каждого i имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^i = f^i$, и, в силу (1), $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^i(x_n) = f^i(x)$.

Покажем, наконец, что отображение h взаимно непрерывно. Для этого необходимо доказать, что из условия $\lim g_n = g$ следует равенство $\lim f_n = f$. Принимая во внимание формулу (1), получаем $\lim g_n(x_n) = g(x)$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^i(x_n) = g^i(x)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^i(x_n) = f^i(x)$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^i = f^i$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{X} = A \cup B$, где A и B — два замкнутых непересекающихся множества; тогда*

$$\mathscr{Y}^A \times \mathscr{Y}^B \underset{\text{top}}{=} \mathscr{Y}^{A \cup B}.$$

В самом деле, каждой паре функций $f \in \mathscr{Y}^A$ и $g \in \mathscr{Y}^B$ поставим в соответствие функцию $u \in \mathscr{Y}^{A\cup B}$, совпадающую с f на множестве A и с g на множестве B. Положим $u = h(f, g)$; очевидно, что

$$h(\mathscr{Y}^A \times \mathscr{Y}^B) = \mathscr{Y}^{A \cup B}.$$

Пусть $\lim f_n = f$, $\lim g_n = g$ и $x \in A$. Тогда из равенства (1) следует, что $\lim f_n(x_n) = f(x)$, следовательно, $\lim u_n(x_n) = u(x)$. К тому же заключению придем, если предположим, что $x \in B$. Следовательно, $\lim u_n = u$. Отсюда вытекает, что функция h непрерывна.

Обратно, пусть $\lim u_n = u$ и $x \in A$; тогда $\lim f_n(x_n) = f(x)$, следовательно, $\lim f_n = f$. Аналогичным образом доказываем, что $\lim g_n = g$. Итак, отображение h является гомеоморфизмом.

Теорема 3. $(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})^{\mathscr{T}} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{Y}^{\mathscr{X} \times \mathscr{T}}$.

Доказательство. Положим $g(x, t) = f_t(x)$. Предварительно докажем следующее утверждение[1]):

Теорема 3′. *Для того чтобы функция g была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы функция f (ставящая в соответствие каждой точке t функцию f_t аргумента x) была непрерывной, т. е. чтобы имело место следующее соотношение:*

$$[g \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X} \times \mathscr{T}}] \equiv [f \in (\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})^{\mathscr{T}}].$$

Доказательство. Пусть $g \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X} \times \mathscr{T}}$. При фиксированном t функция g — непрерывная функция переменной x, т. е. $f_t \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. Мы докажем, что $f \in (\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})^{\mathscr{T}}$. В силу непрерывности функции g, из ра-

[1]) Связь между непрерывностью функций f и g изучалась (впрочем, для топологии, отличной от топологии п. VI) Р. Фоксом [1], стр. 429. См. также том 2, гл. 4.

венств (1) и $\lim t_n = t$ следует, что $\lim g(x_n, t_n) = g(x, t)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_{t_n}(x_n) = f_t(x)$. Следовательно, сходимость функций f_{t_n} к f_t непрерывна. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} f_{t_n} = f_t$. Таким образом, из условия $\lim t_n = t$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_{t_n} = f_t$. Но это означает, что функция f непрерывна, следовательно, $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$.

Обратно, пусть функция f непрерывна; тогда из условия $\lim t_n = t$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_{t_n} = f_t$. Отсюда, в силу непрерывной сходимости последовательности функций $\{f_{t_n}\}$ к функции f_t, учитывая соотношение (1), получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(x_n) = f_t(x), \quad \text{т. е.} \ \lim g(x_n, t_n) = g(x, t).$$

Но это означает, что функция g непрерывна, т. е. $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$.

Таким образом, утверждение 3′ установлено. Полагая $g = h(f)$, его можно сформулировать следующим образом:

$$h\left[(\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}\right] = \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}.$$

Осталось доказать, что h — гомеоморфизм. Докажем сначала, что отображение h непрерывно. Пусть $\lim f^n = f$. Положим $g_n = h(f^n)$. Покажем, что $\lim g_n = g$. Условия $\lim f^n = f$ и $\lim t_n = t$, в силу непрерывной сходимости, дают $\lim f^n_{t_n}(x_n) = f_t(x)$, откуда $\lim g_n(x_n, t_n) = g(x, t)$. Следовательно, $\lim g_n = g$.

Докажем, что функция h^{-1} непрерывна. Пусть $\lim g_n = g$, $\lim t_n = t$ и $\lim x_n = x$; тогда $\lim g_n(x_n, t_n) = g(x, t)$, т. е. $\lim f^n_{t_n}(x_n) = f_t(x)$, следовательно, $\lim f^n_{t_n} = f_t$, откуда $\lim f^n = f$.

VIII. Непрерывная сходимость в узком смысле. В некоторых задачах (см. § 21, X) полезно рассматривать непрерывную сходимость в узком смысле, которая определяется следующим образом.

Последовательность функций $\{f_n\}$ называется *непрерывно сходящейся в узком смысле*, если из сходимости последовательности $\{f(x_n)\}$ следует сходимость последовательности $\{f_n(x_n)\}$, причем выполняется равенство $\lim f_n(x_n) = \lim f(x_n)$.

Так же как в п. VI, можно доказать, что *если за сходимость в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ принять непрерывную сходимость в узком смысле, то $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ станет $\mathcal{L}^*$-пространством.*

Теорема 1. *Непрерывная сходимость в узком смысле влечет за собой непрерывную сходимость (в множестве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$).*

В самом деле, пусть $\lim x_n = x$. Так как функция f непрерывна, то $\lim f(x_n) = f(x)$. Поскольку сходимость последовательности $\{f_n\}$ непрерывна в узком смысле, из последнего равенства следует, что

$\lim f_n(x_n) = f(x)$. Но это означает, что сходимость последовательности $\{f_n\}$ непрерывна.

Теорема 2. *Если пространство $\mathcal{X}$ счетно-компактно, то непрерывная сходимость эквивалентна непрерывной сходимости в узком смысле.*

Доказательство. Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ не сходится в узком смысле, т. е. $\lim f(x_n) = y$, но тем не менее последовательность $\{f_n(x_n)\}$ не сходится к точке y. Так как $\mathcal{Y}$ является $\mathcal{L}^*$-пространством, то существует последовательность $k_1 < k_2 < \ldots$, такая, что ни для какой последовательности $m_1 < m_2 < \ldots$ последовательность $\left\{f_{k_{m_n}}\left(x_{k_{m_n}}\right)\right\}$ не сходится к точке y.

Но мы предположили, что пространство $\mathcal{X}$ счетно-компактно, поэтому существует последовательность $m_1 < m_2 < \ldots$, такая, что последовательность $\left\{x_{k_{m_n}}\right\}$ сходится. Пусть $\lim x_{k_{m_n}} = x$. Так как последовательность $\{f_n\}$ сходится непрерывно, то непрерывно сходится и последовательность $\left\{f_{k_{m_n}}\right\}$. Следовательно, $\lim f_{k_{m_n}}\left(x_{k_{m_n}}\right) = f(x)$.

С другой стороны, так как функция f непрерывна,

$$\lim f\left(x_{k_{m_n}}\right) = f(x),$$

и, поскольку $\lim f\left(x_{k_{m_n}}\right) = \lim f(x_n) = y$, имеем $f(x) = y$, откуда следует, что $\lim f_{k_{m_n}}\left(x_{k_{m_n}}\right) = y$, вопреки определению последовательности $\{k_n\}$.

Замечания. 1. Предположение *счетной компактности* пространства $\mathcal{X}$ в теореме 2 существенно. В самом деле, рассмотрим следующий пример. Пусть $\mathcal{X}$ — открытый интервал $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ и $f_n(x) = x^n$. Последовательность $\{f_n\}$, очевидно, непрерывно сходится, тем не менее она не является непрерывно сходящейся в узком смысле: полагая $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, получаем $\lim f(x_n) = 0$, в то время как $\lim f_n(x_n) = 1/e$.

2. Если за сходимость в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ принять непрерывную сходимость в узком смысле, то теорема 3′ из п. VII станет неверной. В самом деле, пусть $\mathcal{X}$ — открытый интервал $(0, 1)$, а $\mathcal{T}$ — замкнутый интервал $[0, 1]$; положим $g(x, t) = x^{1/t}$ для $t \neq 0$ и $g(x, 0) = 0$. Очевидно, что функция g непрерывна; тем не менее если положить $f_t(x) = g(x, t)$, то функция f не будет непрерывной, так как сходимость последовательности $\left\{f_{1/n}\right\}$ к функции f_0 не является непрерывной в узком смысле.

Теорема 3. *Пусть f — непрерывное отображение счетно-компактного пространства $\mathcal{T}$ в некоторое пространство $\mathcal{Y}$; тогда*

$$\mathcal{Y}^{f(\mathcal{T})} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}.$$

Более общо, *если за сходимость в этих пространствах принять непрерывную сходимость в узком смысле, то предположение о счетной компактности пространства $\mathcal{T}$ можно опустить.*

Доказательство. Положим $\mathcal{X} = f(\mathcal{T})$. Каждой функции $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ поставим в соответствие суперпозицию функций $u = g \circ f$, т. е. $u(t) = g[f(t)]$. Тогда $u \in \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$.

Положим $u = h(g)$. Докажем, что отображение h — гомеоморфизм, причем соотношение $\lim g_n = g$ (соответственно $\lim u_n = u$) означает, что последовательность рассматриваемых функций сходится непрерывно в узком смысле.

Допустим сначала, что $\lim g_n = g$, и покажем, что $\lim u_n = u$, т. е. что из условия $\lim u(t_n) = y$ следует, что $\lim u_n(t_n) = y$. Первое из этих допущений означает, что $\lim g[f(t_n)] = y$, откуда, в силу равенства $\lim g_n = g$, следует, что $\lim g_n(f(t_n)) = y$, т. е. $\lim u_n(t_n) = y$.

С другой стороны, допустим, что $\lim u_n = u$, т. е. $\lim g_n \circ f = g \circ f$. Пусть $\lim g(x_n) = y$, где $x_n = f(t_n)$, т. е. $\lim u(t_n) = y$; покажем, что $\lim g_n(x_n) = y$, т. е. $\lim u_n(t_n) = y$. Но это равенство является прямым следствием равенств $\lim u_n = u$ и $\lim u(t_n) = y$.

Таким образом, теорема установлена в случае непрерывной сходимости в узком смысле. Справедливость ее в случае непрерывной сходимости и компактности пространства $\mathcal{T}$ вытекает из теоремы 2.

IX. Сходимость Мура — Смита[1]) (основные определения). Пусть T — направленное множество (см. § 3, X); отображение $f: T \to \mathcal{X}$ называется *сетью*. Частным случаем сети является последовательность: в этом случае T есть множество натуральных чисел. По этой причине мы будем иногда писать f_t вместо $f(t)$.

Мы говорим, что *сеть f почти вся лежит в множестве* $B \subset \mathcal{X}$, если существует $t_0 \in T$, такое, что

$$(1) \qquad (t_0 < t) \Rightarrow [f_t \in B].$$

---

[1]) Мы ссылаемся здесь на следующую литературу: Келли [1], Мур Э. и Смит [1], Биркгоф [3], МакШейн [1], Такки [1].

Другие теоремы, касающиеся сходимости Мура — Смита (в терминах фильтров), можно (кроме указанных выше работ) найти в следующих статьях: Шоке [1], Ковальский [1], Ю. Шмидт [1], Фролик [1], Флаксмайер [1], Брюнс и Шмидт [1], Мрувка [6], Хелмберг [1], Гримайзен [1], [2].

Сеть f называется *частой* в множестве B, если существует множество T_0, конфинальное с T, такое, что

(2) $$(t \in T_0) \Rightarrow [f_t \in B].$$

Очевидно, что *сеть f является частой в множестве B тогда и только тогда, когда она не лежит почти вся в множестве* $(-B)$.

Заметим, что до сих пор мы не делали никаких предположений относительно пространства $\mathscr{X}$. Предположим теперь, что $\mathscr{X}$ — хаусдорфово пространство.

Определение. Пусть $x : T \to \mathscr{X}$. Мы говорим, что сеть x *сходится к точке* $p \in \mathscr{X}$, и пишем

(3) $$\lim_{t \in T} x_t = p,$$

если она почти вся лежит во всяком открытом множестве G, содержащем точку p.

Так как пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то никакая сеть не может иметь двух пределов.

Теория сходимости сетей может быть развита в значительной мере в направлении, обычно принятом при изучении сходимости последовательностей в общей топологии.

§ 21. Метрические пространства. Общие свойства

I. Определения. Множество называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $|x - y|$, называемое *расстоянием* между этими элементами и удовлетворяющее следующим условиям:

(i) *равенство* $|x - y| = 0$ *эквивалентно равенству* $x = y$;

(ii) $|x - y| + |x - z| \geqslant |y - z|$ (неравенство треугольника)[1].

Подставляя в неравенство (ii) соответственно y и x вместо z, получаем, что $|x - y| \geqslant 0$ и $|x - y| = |y - x|$. Таким образом, расстояние является неотрицательной симметричной функцией двух переменных[2].

Открытым шаром (*замкнутым шаром*) с центром в точке p и радиусом r называется множество, состоящее из всех точек x, таких, что $|p - x| < r$ ($|p - x| \leqslant r$).

---

[1]) Это понятие введено Фреше [1]. Термин „метрическое пространство" принадлежит Хаусдорфу [1], стр. 211. По поводу приведенного здесь определения см. Фреше [3], стр. 54, и Линденбаум [1], стр. 211.

[2]) По поводу пространств с несимметричным „расстоянием" см. Уилсон [1], стр. 675.

Теорема. *Всякое подмножество A метрического пространства $\mathcal{X}$ является метрическим пространством относительно расстояния (в множестве A), индуцированного из пространства $\mathcal{X}$.*

Доказательство очевидно.

Замечание. Если заменить условие (i) условием $|x-x|=0$ (в этом случае расстояние между двумя различными точками не обязательно $\neq 0$), то пространство можно разложить на непересекающиеся подмножества, относя к одному и тому же подмножеству все точки, находящиеся на расстоянии 0 друг от друга (в этом случае говорят, что точки, находящиеся друг от друга на расстоянии 0, *отождествляются*). Расстояние между двумя такими подмножествами X и Y определим, положив $|X-Y|=|x-y|$, где $x \in X$ и $y \in Y$. Это определение не зависит от выбора точек x и y, ибо из условия $|x'-x|=0$ следует, что $|x'-y| \leqslant |x'-x|+|x-y|=|x-y|$.

Легко проверить, что совокупность этих подмножеств, рассматриваемых как точки, с расстоянием $|X-Y|$ образует метрическое пространство.

Примеры. 1. Наиболее простым примером метрического пространства, из которого мы заимствовали обозначения, является множество всех действительных чисел с обычным расстоянием между двумя числами, равным модулю разности между ними. Обобщением этого метрического пространства (прямой) является n-мерное евклидово пространство, в котором расстояние между двумя точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ равно

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Определение шара совпадает здесь с определением n-мерного шара, принятым в геометрии.

2. Множество всех ограниченных функций $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{E}$ становится метрическим пространством, если расстояние между двумя точками определить в нем следующим образом:

$$|f_1-f_2| = \sup_{x \in [0,\,1]} |f_1(x)-f_2(x)|,$$

где sup означает „верхнюю грань“ (см. п. X (1)).

3. Множество всех последовательностей $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, \ldots)$, где $|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots<\infty$, с расстоянием

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$$

является метрическим пространством; если мы предположим, что $0 \leqslant x_n \leqslant 1/n$, то получим множество, гомеоморфное гильбертову кубу $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ (см. Гильберт [2], стр. 200 и 439).

4. Множество *функций с суммируемым квадратом*, снабженное расстоянием

$$|f_1 - f_2| = \left\{ \int_0^1 [f_1(x) - f_2(x)]^2\, dx \right\}^{1/2},$$

является метрическим пространством, если функции, отличающиеся только на множестве меры нуль, отождествлены.

5. Множество *произвольной мощности* можно рассматривать как метрическое пространство, если расстояние между любыми двумя различными точками положить тождественно равным 1.

II. Топология в метрических пространствах. Замыкание $\overline{A}$ в метрическом пространстве определяется следующим образом:

(1) $$(p \in \overline{A}) \equiv \bigwedge_{\varepsilon} \bigvee_{a} (a \in A)(|a - p| < \varepsilon).$$

Другими словами, $p \in \overline{A}$, если любой шар с центром в точке p содержит точки множества A.

Топологическое пространство называется *метризуемым*, если оно гомеоморфно некоторому метрическому пространству, с таким замыканием.

Теорема 1. *Каждое метрическое пространство $\mathscr{X}$ является топологическим $\mathscr{T}_1$-пространством с локально счетной базой в каждой точке. Кроме того, оно является $\mathscr{L}^*$-пространством.*

Доказательство того, что $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство, см. в § 4, II. Далее, семейство всех шаров с центром в точке p и рациональными радиусами является локально счетной базой в точке p. Наконец, $\mathscr{X}$ становится $\mathscr{L}^*$-пространством, если положить

(2) $$\left(p = \lim_{n\to\infty} p_n\right) \equiv \left(\lim_{n\to\infty} |p - p_n| = 0\right).$$

Заметим, что точка p является внутренней точкой множества A тогда и только тогда, когда она есть центр шара, содержащегося в A.

Позже мы покажем (см. п. IV), что каждое метрическое пространство нормально (и даже совершенно нормально). Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 2. *Всякое сепарабельное метрическое пространство обладает счетной открытой базой.*

Обратно: метрическое пространство со счетной открытой базой сепарабельно.

Доказательство. Сепарабельное пространство, по определению, содержит счетное всюду плотное подмножество S. Пусть R_1,

$R_2, \ldots$ — последовательность открытых шаров с центрами в точках множества S и рациональными радиусами.

Пусть G — открытое множество и $p \in G$. Тогда существует такое $\eta > 0$, что

(i) $$(|x-p| < \eta) \Rightarrow (x \in G).$$

Поскольку множество S всюду плотно, существуют точка $s \in S$ и рациональное число ρ, такие, что

(ii) $$|s-p| < \rho < \eta/2.$$

Если R_n — открытый шар с центром в точке s и радиусом ρ, то, согласно (ii), $p \in R_n$. Более того, если $x \in R_n$, то $|x-s| < \rho$, следовательно, согласно (ii), $|x-p| \leqslant |x-s| + |s-p| < \eta$, а отсюда, в силу (i), получаем, что $x \in G$. Поэтому $R_n \subset G$. Итак, для каждой точки p множества G существует такое n, что $p \in R_n \subset G$. Это означает, что совокупность шаров $R_1, R_2, \ldots$ является базой.

Обратно, если $R_1, R_2, \ldots$ — база, то, выбирая по точке p_n из каждого шара R_n, получим счетное множество, всюду плотное в данном пространстве.

Замечание 1. Для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно предположить, что диаметр шара R_n меньше ε, ибо радиусы шаров $R_1, R_2, \ldots$ могут быть взяты меньшими чем $\varepsilon/2$.

Замечание 2. В евклидовом пространстве шары с рациональными радиусами и рациональными центрами образуют базу.

III. Диаметр. Непрерывность. Колебание. *Диаметром* множества X (обозначается символом $\delta(X)$) называется верхняя грань расстояний между его точками. Если диаметр $\delta(X)$ конечен, то множество X называется *ограниченным*.

Легко проверяются следующие свойства диаметра:

(1) $\{\delta(X) = 0\} \equiv \{$*множество* X *пусто или состоит из одной точки*$\}$;

(2) *если* $X \subset Y$, *то* $\delta(X) \leqslant \delta(Y)$;

(3) $\delta(\overline{X}) = \delta(X)$;

(4) *если* $X \cap Y \neq 0$, *то* $\delta(X \cup Y) \leqslant \delta(X) + \delta(Y)$;

(5) *если множество* X *счетно-компактно, то* $\delta(X) < \infty$ (*т. е. множество* X *ограничено*).

Чтобы проверить утверждение (5), заметим, что в неограниченном пространстве существует бесконечная последовательность точек $p_1, p_2, \ldots$, такая, что $|p_n - p_m| > 1$ для каждого n и $m \neq n$. Очевидно, что последовательность $\{p_n\}$ не содержит никакой сходящейся подпоследовательности.

Пусть f—отображение топологического пространства $\mathcal{X}$ в метрическое пространство $\mathcal{Y}$; условие непрерывности отображения f в точке p (см. § 13, II, следствие) может быть сформулировано следующим образом: для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность E точки p, такая, что из условия $x \in E$ следует неравенство $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Если положить ε равным $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, то из сказанного выше следует, что существует последовательность окрестностей E_n точки p, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \delta[f(E_n)] = 0$. Таким образом, если $G_n \subset \mathcal{X}$ — объединение всех открытых множеств $G \subset \mathcal{X}$, таких, что $\delta[f(G)] < 1/n$, то множество $C = G_1 \cap G_2 \cap \ldots$ является *множеством точек непрерывности отображения* f; это есть множество типа G_δ.

Мы обобщим это утверждение, вводя понятие *колебания* (позволяющее „измерять" разрывность). А именно, пусть функция f определена на некотором подмножестве A пространства $\mathcal{X}$; *колебанием функции f в точке p* (принадлежащей или не принадлежащей множеству A) называется нижняя грань чисел $\delta[f(E)]$, где E пробегает открытые окрестности точки p. Колебание функции f в точке p мы будем обозначать символом

(6) $$\omega(p) = \inf \delta[f(E)],$$

где inf означает „нижнюю грань".

Так, например, для $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ имеем $\omega(0) = 2$.

Очевидно, что если точка p не принадлежит $\bar{A}$, то $\omega(p) = 0$, ибо для $E = 1 - \bar{A}$ множество $f(E)$ пусто, следовательно, $\delta[f(E)] = 0$.

Определяя множества G_n, как выше, мы видим, что G_n есть множество тех точек, в которых колебание функции меньше $1/n$. Следовательно, *множество тех точек, в которых колебание равно нулю, есть множество типа* G_δ (оно совпадает с множеством C). Наконец, $A \cap C$ (т. е. множество точек непрерывности функции f) является множеством типа G_δ *относительно* A.

Заметим, что в случае, когда *оба* пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — метрические, определение непрерывности, данное выше, может быть выражено в классической форме (Коши): каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что из условия $|x - p| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. В этом определении окрестность E заменяется шаром с центром в точке p и радиусом δ.

Мы видели выше (§ 15, V, теорема 2), что если отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно и пространство $\mathcal{Y}$ хаусдорфово, то множество $\mathfrak{I} = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{x, y} [y = f(x)]$ замкнуто в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. В случае когда $\mathcal{Y}$ — метрическое пространство, имеет место более точное утверждение (метризация пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ описана в п. VI (1)).

Теорема. *Пусть $A \subset \mathcal{X}$ и $f: A \to \mathcal{Y}$. Если отображение f непрерывно в точке x_0 и $(x_0, y_0) \in \bar{\mathfrak{I}}$, то имеет место равенство $y_0 = f(x_0)$; справедливо также более общее соотношение*

(7) $$\delta[\bar{\mathfrak{I}} \cap ((x) \times \mathcal{Y})] \leqslant \omega(x)$$

(следовательно, если $\omega(x)=0$, то существует не более одной точки y, такой, что $(x, y)\in\bar{\mathfrak{F}}$).

Доказательство. Предположим, что точки (x, y) и (x, y^*) принадлежат множеству $\bar{\mathfrak{F}}\cap((x)\times\mathcal{Y})$. Тогда в каждой окрестности E точки x для каждого $\varepsilon>0$ содержатся точка x_1 и точка x_1^*, такие, что $|f(x_1)-y|<\varepsilon$ и $|f(x_1^*)-y^*|<\varepsilon$. Поэтому

$$f(x_1)\in f(E) \quad \text{и} \quad f(x_1^*)\in f(E).$$

Итак,

$$\delta[f(E)]\geqslant|f(x_1)-f(x_1^*)|>|y-y^*|-2\varepsilon$$
$$\text{и} \quad \omega(x)=\inf\delta[f(E)]\geqslant|y-y^*|,$$

откуда следует формула (7).

IV. Число $\rho(A, B)$. Обобщенный шар. Нормальность метрических пространств.

Определение 1. Пусть A и B — непустые подмножества. Положим

$$\rho(A, B)=\inf_{\substack{a\in A,\\ b\in B}}|a-b|.$$

Имеют место следующие соотношения:

(1) $$\rho(x, y)=|x-y|;$$

(2) $$\rho(\bar{A}, \bar{B})=\rho(A, B);$$

(3) $$\{\rho(x, A)=0\}\equiv\{x\in\bar{A}\};$$

(4) $$\rho(A, C)\leqslant\rho(A, B)+\rho(B, C)+\delta(B);$$

(4′) $$\rho(A, C)\leqslant\rho(A, B)+\rho(A\cup B, C)+\delta(B);$$

(5) *функция* $\rho(x, A)$, *где* A — *фиксированное множество есть непрерывная функция точки* x.

Соотношения (1) — (3) очевидны. Соотношение (4) вытекает из (4′), так как

(6) $$\rho(A\cup B, C)\leqslant\rho(A, C).$$

Для доказательства справедливости формулы (4′) допустим противное. Тогда существуют две пары точек x, y и u, z, такие, что $x\in A$, $y\in B$, $u\in A\cup B$, $z\in C$ и

(i) $$|x-y|+|u-z|+\delta(B)<\rho(A, C).$$

[1])Хаусдорф называет $\rho(A, B)$ нижним расстоянием от A до B (см. Хаусдорф [5]).

Следовательно, $|u-z|<\rho(A, C)$. Но это означает, что $u \notin A$, поэтому $u \in B$, а следовательно, $|y-u| \leqslant \delta(B)$. Но тогда

$$\rho(A, C) \leqslant |x-z| \leqslant |x-y|+|y-u|+|u-z| \leqslant$$
$$\leqslant |x-y|+|u-z|+\delta(B),$$

что противоречит условию (i).

Для доказательства соотношения (5), очевидно, достаточно показать, что (см. Дьедонне [3])

$$(6') \qquad |\rho(x, A)-\rho(y, A)| \leqslant |x-y|.$$

Неравенство (6') можно установить следующим образом. Пусть $a \in A$ — такая точка, что $|y-a|<\rho(y, A)+\varepsilon$ (для данного $\varepsilon>0$). Так как $\rho(x, A) \leqslant |x-a|$ и $|x-a| \leqslant |x-y|+|y-a|$, то $\rho(x, A)<\rho(y, A)+|x-y|+\varepsilon$. Поэтому (так как $\varepsilon>0$ произвольно) $\rho(x, A)-\rho(y, A) \leqslant |x-y|$.

Аналогично $\rho(y, A)-\rho(x, A) \leqslant |x-y|$. Этим завершается доказательство соотношения (6'), а значит, и соотношения (5).

Следует заметить, что с помощью функции ρ можно определить равномерную непрерывность. Это вытекает из следующего утверждения.

Для того чтобы функция $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — метрические пространства, была равномерно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы (см. Ефремович [2], стр. 190)

$$[\rho(A, B)=0] \Rightarrow [\rho[f(A), f(B)]=0].$$

Имеет место следующее легко устанавливаемое соотношение:

$$(7) \qquad \rho(A, B \cup C) = \text{либо } \rho(A, B), \text{ либо } \rho(A, C).$$

Определение 2. *Обобщенным открытым шаром радиуса r с центром A* (множество A предполагается непустым) назовем множество всех точек x, таких, что $\rho(x, A)<r$. Заменяя знак $<$ знаком $\leqslant$, получим определение обобщенного *замкнутого* шара.

Так как функция $\rho(x, A)$ непрерывна и множество действительных чисел, меньших r, открыто, то обобщенный открытый шар является открытым множеством (см. § 13, IV); аналогично обобщенный замкнутый шар является замкнутым множеством. Более того, обобщенный открытый шар является объединением открытых шаров радиуса r с центрами в точках множества A.

Согласно равенству (2), шар не изменится, если заменить множество A множеством $\bar{A}$.

Теорема 1. *Всякое метрическое пространство совершенно нормально* (см. § 14, VI).

Более точно: *пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества; тогда функция*

$$f(x)=\frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A)+\rho(x, B)} \tag{8}$$

удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad [f(x)=0] \equiv (x \in A), \quad [f(x)=1] \equiv (x \in B).$$

(Здесь мы предполагаем, что $\rho(x, 0) \equiv 1$.)

Доказательство непосредственно вытекает из соотношений (3) и (5).

В силу теоремы Веденисова (§ 14, VI), *каждое замкнутое подмножество метрического пространства является множеством типа G_δ*. (Из соображений двойственности, *каждое открытое множество является множеством типа F_σ*.)

Эти утверждения можно также доказать непосредственно, замечая, что при $A=\overline{A}$ имеет место соотношение

$$A=B_1 \cap B_2 \cap \ldots, \tag{9}$$

где B_n — открытый шар радиуса $1/n$ с центром A.

Теорема 2. *Всякое метрическое пространство наследственно нормально.*

Эта теорема следует из теоремы 1 и теоремы Чеха, упомянутой в § 14, VI; ее можно также получить непосредственно из теоремы 1, согласно которой каждое метрическое пространство нормально, и из теоремы п. I, в силу которой каждое подмножество метрического пространства является метрическим пространством.

Замечания. Как мы уже видели, доказательство леммы Урысона в случае метрических пространств непосредственно вытекает из формулы (8) (см. § 14, IV).

Теорему продолжения Титце для метрических пространств можно также доказать более прямым методом. А именно, если $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, то непрерывное продолжение функции f можно получить, полагая

$$f^*(p)=\inf_{x \in F}\left\{f(x)+\frac{|p-x|}{\rho(p, F)}-1\right\} \quad \text{при} \quad p \in \mathscr{X}-F\text{[1]}.$$

Отсюда следует, что $0 \leqslant f^*(p) \leqslant 1$ (причем может иметь место равенство).

V. Ограничивающее отображение[2].

Теорема. *Всякое метрическое пространство гомеоморфно некоторому ограниченному пространству.*

---

[1]) См. Хаусдорф [3], стр. 296. Его доказательство воспроизведено в первом французском издании этой книги.

[2]) См. Хан [1], стр. 115, а также Бэр [4], стр. 6.

Определим „новое расстояние“, положив

$$\|x-y\|=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Расстояние $\|x-y\|$ удовлетворяет аксиомам (i) и (ii) метрического пространства. В самом деле, равенство $\|x-y\|=0$ эквивалентно равенству $|x-y|=0$. Кроме того,

$$\|x-y\|+\|x-z\|\geqslant\frac{|x-y|}{1+|x-y|+|x-z|}+\frac{|x-z|}{1+|x-y|+|x-z|}=$$
$$=\frac{|x-y|+|x-z|}{1+|x-y|+|x-z|}=\frac{1}{1+\frac{1}{|x-y|+|x-z|}}\geqslant\frac{1}{1+\frac{1}{|y-z|}}=\|y-z\|.$$

Два метрических пространства, состоящие из одних и тех же элементов, одно из которых метризовано расстоянием $|x-y|$, а другое — расстоянием $\|x-y\|$, гомеоморфны, т. е.

$$\left\{\lim_{n\to\infty}|x_n-y|=0\right\}\equiv\left\{\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|=0\right\}.$$

Это непосредственно вытекает из того, что функция $u=t/(1+t)$ взаимно непрерывна на множестве неотрицательных действительных чисел. При этом диаметр пространства не превосходит 1 (относительно расстояния $\|x-y\|$).

Замечание. Предыдущую теорему можно доказать более прямым способом, если положить „новое расстояние“ равным $|x-y|$, когда $|x-y|\leqslant 1$, и 1 в противном случае[1]).

VI. Метризация прямого произведения. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два метрических пространства. Произведение $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ можно метризовать, положив

$$(1)\qquad |\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1|=\sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2},\quad \text{где } \mathfrak{z}=(x, y).$$

Отсюда видно (ср. § 20, IV), что $\mathfrak{z}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{z}_n$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0$. Следовательно, это определение согласуется с топологией пространства $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, введенной в § 15, II.

Рассмотрим случай счетного числа сомножителей; пусть $\mathscr{X}_i$, $i=1, 2, \ldots,$ — метрическое пространство диаметра $\leqslant 1$ (см. п. V). Пространство $\prod\limits_i\mathscr{X}_i$ превратится в метрическое, если положить

$$(2)\qquad |\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|.$$

---

[1]) См. Ньюман [1], стр. 47.

Определенное таким образом расстояние удовлетворяет условиям (i) и (ii), так как тождество $\{|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|=0\}\equiv\{\mathfrak{z}=\mathfrak{y}\}$ очевидно, а неравенство треугольника следует из формулы

$$|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|+|\mathfrak{z}-\mathfrak{w}|=\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|+|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{w}^i|\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|\mathfrak{y}^i-\mathfrak{w}^i|=|\mathfrak{y}-\mathfrak{w}|.$$

Остается доказать, что $\mathfrak{z}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{z}_n$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0$, т. е. справедливо соотношение

$$\left\{\lim_{n\to\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0\right\}\equiv\left\{\lim_{n\to\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|=0 \text{ для любого } i\right\}.$$

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0$ следует, что для каждого i имеем $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|=0$, ибо $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|\leqslant 2^i|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|$. Обратно, предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|=0$, каково бы ни было i. Для данного $\varepsilon>0$ найдем такое целое положительное число m, что $2^{-m}<\varepsilon$. Пусть j — целое положительное число, такое, что $|\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}_n^1|<\varepsilon, \ldots, |\mathfrak{z}^m-\mathfrak{z}_n^m|<\varepsilon$ для любого $n>j$. Учитывая, что $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|<\delta(\mathscr{X}_i)\leqslant 1$, получаем неравенство

$$|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|\leqslant\sum_{i=1}^{m} 2^{-i}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|+\sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{-i}<2\varepsilon,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0$.

Замечание 1. Существуют и другие определения расстояния, которые можно использовать вместо формулы (1). Так, например, эквивалентными с топологической точки зрения будут следующие метрики: когда за расстояние между точками $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{z}_1$ принимается наибольшее из двух чисел $|x-x_1|$ и $|y-y_1|$ или сумма этих чисел.

Замечание 2. Если не предполагать, что $\delta(\mathscr{X}_i)\leqslant 1$, можно положить (см. формулу Фреше [5], стр. 82)

$$(3)\qquad |\mathfrak{z}-\mathfrak{w}|=\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\frac{|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{w}^i|}{1+|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{w}^i|}.$$

Теорема. *Расстояние $|x-y|$, рассматриваемое как функция переменной $\mathfrak{z}=(x, y)$, непрерывно.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{a}=(a, b)$ — данная точка, и пусть $|\mathfrak{z}-\mathfrak{a}|<\varepsilon$. Тогда $|x-a| \leqslant|\mathfrak{z}-\mathfrak{a}|<\varepsilon$ и $|y-b|<\varepsilon$, следовательно,

$$|x-y| \leqslant|x-a|+|a-b|+|b-y|<|a-b|+2 \varepsilon$$

и

$$|a-b| \leqslant|a-x|+|x-y|+|y-b|<|x-y|+2 \varepsilon .$$

Поэтому $||x-y|-|a-b||<2 \varepsilon$, откуда следует требуемое утверждение (см. п. III).

Отметим следующие легко доказываемые формулы:

$$\delta(A \times B)=\sqrt{[\delta(A)]^{2}+[\delta(B)]^{2}} ; \tag{4}$$

$$\delta\left(\prod_{n=1}^{\infty} A_{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta\left(A_{n}\right)}{2^{n}} . \tag{5}$$

VII. Расстояние между двумя множествами. Пространство $(2^{\mathscr{X}})_m$.

Определение. Мы обозначаем через $(2^{\mathscr{X}})_m$ пространство всех замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства $\mathscr{X}$; за расстояние¹) $\operatorname{dist}(A, B)$ между двумя множествами $A \neq 0$ и $B \neq 0$ мы примем наибольшее из чисел

$$\sup_{x \in A} \rho(x, B) \quad \text{и} \quad \sup_{y \in B} \rho(y, A).$$

Если $A=0 \neq B$, то $\operatorname{dist}(A, B)=\delta(\mathscr{X})$. Таким образом, если множество $\mathscr{X}$ не ограничено, мы должны удалить пустое множество из пространства $(2^{\mathscr{X}})_m$; если множество $\mathscr{X}$ сводится к единственной точке p, то мы полагаем $\operatorname{dist}(0,(p))=1$.

Теорема. *Пространство $(2^{\mathscr{X}})_m$ есть метрическое пространство относительно определенного выше расстояния.*

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{dist}(A, B)=0$ тогда и только тогда, когда $A=B$.

Что касается неравенства треугольника, то для $x \in A$ и $y \in B$ (п. IV (4)) мы имеем

$$\rho(x, C) \leqslant|x-y|+\rho(y, C) \leqslant|x-y|+\operatorname{dist}(B, C),$$

откуда

$$\rho(x, C) \leqslant \inf_{y \in B}|x-y|+\operatorname{dist}(B, C)=$$
$$=\rho(x, B)+\operatorname{dist}(B, C) \leqslant \operatorname{dist}(A, B)+\operatorname{dist}(B, C).$$

Из соображений симметрии,

$$\rho(z, A) \leqslant \operatorname{dist}(B, A)+\operatorname{dist}(B, C)$$

¹) См. Хаусдорф [1], гл. VIII, § 6, а также Помпейю [1].

при $z \in C$. Следовательно,

$$\operatorname{dist}(A, C) \leqslant \operatorname{dist}(B, A) + \operatorname{dist}(B, C).$$

Замечание 1. В этом пространстве нельзя принять $\rho(A, B)$ за расстояние. Пусть, например, A — множество, состоящее из числа 0, B — интервал (1, 2) и множество C состоит из числа 3; тогда неравенство треугольника для множеств A, B и C не выполняется ($\rho(A, B) = 0$, если множества A и B имеют общую точку).

Замечание 2. Как мы увидим далее (т. 2), если $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство, то множество $(2^{\mathscr{X}})_m$ гомеоморфно пространству $2^{\mathscr{X}}$, наделенному экспоненциальной топологией (см. § 17, I).

Заметим, что

(1) $$|a - b| = \operatorname{dist}[(a), (b)];$$

(2) $$\{\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \varepsilon\} \equiv \{A \subset R_\varepsilon(B) \text{ и } B \subset R_\varepsilon(A)\},$$

где $R_\varepsilon(X)$ — открытый шар радиуса ε, центром которого является множество X;

(3) $\delta((2^{\mathscr{X}})_m) = \delta(\mathscr{X})$ (если $\mathscr{X}$ содержит более одной точки).

VIII. Вполне ограниченные пространства. Метрическое пространство называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно разложить на конечное число множеств диаметра меньше ε (см. Хаусдорф [5]).

Теорема 1. *Для того чтобы пространство $\mathscr{X}$ было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы каждому $\varepsilon > 0$ соответствовало конечное множество F_ε, такое, что $\rho(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$, какова бы ни была точка x этого пространства.*

Доказательство. Пусть пространсто $\mathscr{X}$ вполне ограничено; тогда

$$\mathscr{X} = A_1^n \cup \ldots \cup A_{k_n}^n, \quad \delta(A_i^n) < 1/n \quad \text{для} \quad i \leqslant k_n.$$

Из каждого множества A_i^n выберем по точке p_i^n. Тогда множество $F_{1/n}$, составленное из точек $p_1^n, \ldots, p_{k_n}^n$, есть искомое множество (при $\varepsilon > 1/n$).

Обратно, если $F_{\varepsilon/2}$ — множество, удовлетворяющее условию теоремы, то система шаров радиуса $\varepsilon/2$ с центрами, принадлежащими множеству $F_{\varepsilon/2}$, представляет собой искомое покрытие пространства.

Замечание 0. Предложение, которое мы только что доказали, можно сформулировать, используя понятие расстояния между множествами (п. VII), следующим образом. *Вполне ограниченное пространство есть предел последовательности конечных множеств* (а именно последовательности $F_1, F_{1/2}, \ldots, F_{1/n}, \ldots$).

Это вытекает также из следующей теоремы.

Теорема 2. *Если пространство $\mathscr{X}$ вполне ограничено, то пространство $(2^{\mathscr{X}})_m$ также вполне ограничено.*

Для доказательства этой теоремы рассмотрим множество F_ε, построенное выше; пусть $H_{1,\varepsilon}, \ldots, H_{k,\varepsilon}$ — система всех подмножеств множества F_ε. Каждому замкнутому множеству X поставим в соответствие множество $H_{i,\varepsilon}$ точек p множества F_ε, такое, что $\rho(p, X) < \varepsilon$; тогда $\operatorname{dist}(X, H_{i,\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$.

Теорема 3. *Каждое вполне ограниченное пространство сепарабельно.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть множество точек p_i^n, $n = 1, 2, \ldots, i \leqslant k_n$, определенное при доказательстве теоремы 1.

Теорема 4. *Если G — открытое подмножество вполне ограниченного пространства $\mathscr{X}$, то существует последовательность открытых множеств $G_0, G_1, \ldots$, такая, что $G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots$ и*

(i) *множество G_i пересекается только с конечным числом множеств G_j;*

(ii) $\overline{G}_i \subset G$;

(iii) $\lim\limits_{i \to \infty} \delta(G_i) = 0$.

Доказательство. Можно допустить, что $G \neq \mathscr{X}$, ибо в противном случае можно положить $G_0 = \mathscr{X}$ и $G_i = 0$ для $i > 0$. Пусть B_m — открытый шар радиуса $1/m$, центром которого служит множество $\mathscr{X} - G$ (см. п. IV). Так как пространство $\mathscr{X}$ вполне ограничено, существует система открытых множеств $H_{1,m}, \ldots, H_{k_m,m}$, такая, что

$$\mathscr{X} = H_{1,m} \cup \ldots \cup H_{k_m,m} \quad \text{и} \quad \delta(H_{j,m}) < 1/m.$$

Поскольку $G = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} (B_m - \overline{B}_{m+2})$, имеем

$$G = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_m} (B_m - \overline{B}_{m+2}) \cap H_{j,m}.$$

Если расположить члены этого двойного ряда в бесконечную последовательность $G_0, G_1, \ldots$, условия (i) — (iii) будут выполняться.

В самом деле, условие (i) есть прямое следствие формулы

$$(B_m - \overline{B}_{m+2}) \cap (B_n - \overline{B}_{n+2}) \subset (B_{m+2} - \overline{B}_{m+2}) = 0 \text{ при } n \geqslant m + 2.$$

Условие (ii) вытекает из формулы

$$\overline{(B_m - \overline{B}_{m+2}) \cap H_{j,m}} \subset \overline{\mathscr{X} - B_{m+2}} \subset G.$$

Наконец, (iii) следует из неравенства $\delta(H_{j,m}) < 1/m$.

Замечания. 1. В *произвольном метрическом* пространстве каждому $\varepsilon > 0$ соответствует *замкнутое* множество F_ε, состоящее из изолированных точек (конечное или бесконечное), такое, что $\rho(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$, какова бы ни была точка x. В самом деле, расположим все точки пространства в трансфинитную последовательность p_0, $p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots$. Положим $p_{\alpha_0} = p_0$, и вообще при $\gamma > 0$ пусть p_{α_γ} — точка с минимальным индексом, такая, что $\left| p_{\alpha_\gamma} - p_{\alpha_\xi} \right| \geqslant \varepsilon$, каково бы ни было $\xi < \gamma$ (разумеется, если такая точка p_{α_γ} существует). Тогда искомое множество F_ε есть множество точек p_{α_γ}.

2. В качестве пространства $\mathcal{X}$ рассмотрим кривую $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$, причем расстояние между двумя точками p и q положим равным диаметру дуги pq. Очевидно, что это пространство сепарабельное и ограниченное (даже полное), но не вполне ограниченное. Семейство его подмножеств, расположенных на оси абсцисс (все они замкнуты), несчетно, и расстояние между двумя любыми элементами этого семейства превышает единицу; следовательно, это семейство и тем более *пространство* $(2^{\mathcal{X}})_m$ *не являются сепарабельными* (ср. с теоремой 2, п. II).

Однако кривая $\mathcal{X}$ может быть гомеоморфно отображена (с помощью проекции на ось x) таким образом, чтобы пространство $(2^{\mathcal{X}})_m$ стало сепарабельным.

Следовательно, топологическими свойствами пространства $(2^{\mathcal{X}})_m$ не обязательно являются топологические свойства пространства $\mathcal{X}$. Этим мы обязаны тому, что определение пространства $(2^{\mathcal{X}})_m$ не было топологически инвариантным.

Теорема 5. *Если* $\{\mathcal{X}_i\}$ — *последовательность* (*конечная или счетная*) *вполне ограниченных пространств, таких, что* $\delta(\mathcal{X}_i) \leqslant 1$, *то их прямое произведение, метризованное по формуле* VI (2), *является вполне ограниченным.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и i — целое число, такое, что $2^{-i} < \varepsilon/2$. Тогда для каждого $l \leqslant i$ существует (по предположению) конечная система точек $r_{l1}, \ldots, r_{lk_l}$, такая, что любая точка пространства $\mathcal{X}_l$ расположена на расстоянии $< \varepsilon/2$ от некоторой точки, принадлежащей этой системе. Пусть r_n $(n > i)$—точка, выбранная произвольно из пространства $\mathcal{X}_n$.

Рассмотрим при фиксированном i конечную систему последовательностей вида

$$\mathfrak{y} = \left[r_{1j_1}, r_{2j_2}, \ldots, r_{ij_i}, r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots \right], \text{ где } j_1 \leqslant k_1, \ldots, j_i \leqslant k_i.$$

Пусть $\mathfrak{z}=(x_1, x_2, \ldots)$ — некоторая точка пространства $\prod\limits_i \mathscr{X}_i$; тогда для каждого $l \leqslant i$ существует точка r_{lj_l}, такая, что $\left|r_{lj_l}-x_l\right|<\varepsilon/2$, откуда

$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{z}|=\sum_{l=1}^{i} 2^{-l}\,|r_{lj_l}-x_l|+\sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-n}\,|r_n-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Поэтому пространство $\prod\limits_i \mathscr{X}_i$ вполне ограничено.

Следствие 5а. *Гильбертов куб $\mathscr{J}^{\aleph_0}$ и, следовательно, пространство $\left(2^{(\mathscr{J}^{\aleph_0})}\right)_m$ вполне ограничены.*

Последнее утверждение следствия вытекает из теоремы 2.

IX. Эквивалентность между счетно-компактными и компактными метрическими пространствами.

Теорема 1. *Любое счетно-компактное метрическое пространство $\mathscr{X}$ вполне ограничено, следовательно, оно содержит счетную открытую базу и, более того, является пространством Линделёфа.*

Допустим противное, т. е. что пространство $\mathscr{X}$ не является вполне ограниченным; тогда, в силу VIII, 1, существует такое $\varepsilon>0$, что всякому конечному множеству F соответствует элемент x, для которого $\rho(x, F)\geqslant\varepsilon$. Отсюда вытекает существование бесконечной последовательности точек $p_1, p_2, \ldots$, такой, что $|p_m-p_n|\geqslant\varepsilon$ для любого n и $m\neq n$. Очевидно, что эта последовательность не содержит сходящейся подпоследовательности, следовательно, пространство $\mathscr{X}$ не является счетно-компактным.

Чтобы доказать, что $\mathscr{X}$ — пространство Линделёфа, применим сначала теорему 3 из п. VIII, согласно которой любое вполне ограниченное пространство сепарабельно, затем теорему 2 из п. II, согласно которой любое метрическое сепарабельное пространство содержит счетную открытую базу, и, наконец, теорему Линделёфа (§ 5, XI).

Теорема 2. *Любое счетно-компактное метрическое пространство компактно.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, оно является пространством Линделёфа. Следовательно, любое открытое покрытие может быть сведено к счетному, а последнее — согласно теореме Бореля (§ 20, V) — может быть сведено к конечному покрытию.

X. Равномерная сходимость. Метризация пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное и $\mathscr{Y}$ — метрическое пространства, обозначим через $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ семейство всех ограниченных отображений $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ т. е. таких отображений, что множество $f(\mathscr{X})$ ограничено).

Теорема 1. *$\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ есть метрическое пространство с расстоянием, определяемым формулой* ¹)

$$(1) \qquad |f_1 - f_2| = \sup_{x \in \mathscr{X}} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

В самом деле, расстояние, определенное таким образом, всегда конечно, ибо если x' — фиксированная точка, то

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant |f_1(x) - f_1(x')| + \\ + |f_1(x') - f_2(x')| + |f_2(x') - f_2(x)|.$$

Кроме того, соотношение $|f_1 - f_2| = 0$, очевидно, эквивалентно равенству $f_1 = f_2$; остается проверить неравенство треугольника. Мы имеем

$$|f_1 - f_2| + |f_1 - f_3| = \sup |f_1(x) - f_2(x)| + \sup |f_1(x) - f_3(x)| \geqslant \\ \geqslant \sup \{ |f_1(x) - f_2(x)| + |f_1(x) - f_3(x)| \} \geqslant \\ \geqslant \sup |f_2(x) - f_3(x)| = |f_2 - f_3|.$$

Согласно определению сходимости в метрических пространствах, последовательность функций $\{f_n\}$ сходится к функции f в рассматриваемом функциональном пространстве, если $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n - f| = 0$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что для $n > n(\varepsilon)$ имеем $\sup\limits_{x \in \mathscr{X}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, следовательно, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \mathscr{X}$. Отсюда вытекает

Следствие 1а. *Сходимость в пространстве $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ совпадает с равномерной сходимостью в обычном смысле.*

Замечание. Согласно теореме 5 из § 20, V, и в силу III (5), любое непрерывное отображение компактного метрического пространства в метрическое пространство ограничено, т. е. $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \subset \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. В этом случае формула (1) определяет метрическую структуру в $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. Итак, пусть $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство ²), $\mathscr{Y}$ — метрическое пространство; тогда мы будем рассматривать $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ как метрическое пространство с расстоянием, определяемым формулой (1).

Если пространство $\mathscr{X}$ некомпактно (не локально компактно), то трудно ожидать, что пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ будет метрическим. Однако можно ввести соответствующую топологию, так называемую *открыто-*

¹) См. Фреше [1], стр. 36. Это определение расстояния между функциями восходит (согласно Фреше) к Вейерштрассу.

²) Как будет выяснено в гл. 4, предположение о том, что $\mathscr{X}$ — метрическое пространство, можно опустить.

компактную, или *естественную*, определяя замыкание множества $\Gamma \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ соотношением

$$(f \in \overline{\Gamma}) \equiv [(f \mid F) \in \overline{\Gamma \mid F} \text{ для любого компактного } F \subset \mathcal{X}]$$

или, что то же самое, рассматривая множество $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ как предел обратного спектра множеств $\{\mathcal{Y}^F\}$ с операцией сужения.

Подробнее эти построения будут рассмотрены во втором томе.

Другое обобщение пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ состоит в рассмотрении топологии на множестве всех отображений $f \mid F$, где множество F компактно (см. Куратовский [42]).

Теорема 2. *Для всякого топологического пространства $\mathcal{X}$ множество всех непрерывных ограниченных отображений, т. е. множество $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \cap \Phi(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, замкнуто в пространстве $\Phi(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Эта теорема непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2'. *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3 из § 13, VI (случай $\mathcal{Y} = \mathcal{E}$).

Имеет место также следующая теорема[1]) (см. Хан [2], стр. 225):

Теорема 2''. *Предел непрерывно сходящейся последовательности функций (которые могут и не быть непрерывными) есть непрерывная функция.*

Доказательство. Пусть $\lim f_n(x) = f(x)$. Допустим, что $\lim a_n = a$, однако последовательность $\{f(a_n)\}$ не сходится в точке $f(a)$. Тогда существуют окрестность G точки $f(a)$ и последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что $f(a_{k_n}) \in \mathcal{Y} - \overline{G}$, каково бы ни было n. Так как множество $\mathcal{Y} - \overline{G}$ является окрестностью точки $f(a_{k_n})$, существует индекс m_n, такой, что $f_{m_n}(a_{k_n})$ принадлежит этой окрестности. При этом можно допустить, что $m_1 < m_2 < \ldots$. Поскольку последовательность $\{f_n\}$ сходится непрерывно, из равенства $\lim a_{k_n} = a$ (которое вытекает из равенства $\lim a_n = a$) следует, что $\lim f_{m_n}(a_{k_n}) = f(a)$, откуда $f(a) \in \overline{\mathcal{Y} - \overline{G}} \subset \overline{\mathcal{Y} - G} = \mathcal{Y} - G$, что противоречит определению множества G (согласно которому $f(a) \in G$).

Теорема 3. *Равномерная сходимость влечет за собой непрерывную сходимость в узком смысле, а следовательно, в области непрерывных функций — непрерывную сходимость* (см. § 20, VIII, 1).

---

[1]) Эта теорема справедлива также для топологических регулярных $\mathcal{L}^*$-пространств.

Иначе говоря: если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f, то из условия $\lim f(x_n) = y$ следует, что $\lim f_n(x_n) = y$.

Предположим противное, т. е. что последовательность $\{f_n(x_n)\}$ не сходится к точке y. Тогда она содержит подпоследовательность $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$, никакая подпоследовательность которой не сходится к точке y. Так как последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится, то последовательность $\{f_{k_n}\}$ также равномерно сходится. Поэтому существует последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \ldots$, такая, что для каждой точки x

$$|f_{k_{m_n}}(x) - f(x)| < 1/n$$

и, в частности,

$$\left|f_{k_{m_n}}\left(x_{k_{m_n}}\right) - f\left(x_{k_{m_n}}\right)\right| < 1/n.$$

Сопоставляя последнее неравенство с равенством $\lim f(x_n) = y$, из которого вытекает, что $\lim f\left(x_{k_{m_n}}\right) = y$, получаем равенство $\lim f_{k_{m_n}}\left(x_{k_{m_n}}\right) = y$, противоречащее определению последовательности $\{k_n\}$.

Теорема 4. *Если пространство $\mathcal{Y}$ компактно, то из непрерывной сходимости в узком смысле следует равномерная сходимость (т. е. эти два вида сходимости эквивалентны).*

В самом деле, если последовательность $\{f_n\}$ не является равномерно сходящейся к f, то существуют $\varepsilon > 0$, последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ и последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, такие, что

$$(2) \qquad \left|f_{k_n}(x_n) - f(x_n)\right| > \varepsilon \text{ для любого } n.$$

Так как пространство $\mathcal{Y}$ компактно, существует последовательность $m_1 < m_2 < \ldots$, такая, что последовательность $\left\{f\left(x_{m_n}\right)\right\}$ сходится: $\lim f\left(x_{m_n}\right) = y$. Но, по предположению, последовательность $\{f_n\}$ сходится непрерывно в узком смысле, поэтому последовательность $\left\{f_{k_{m_n}}\right\}$ также сходится непрерывно в узком смысле. Значит, из условия $\lim f\left(x_{m_n}\right) = y$ следует, что $\lim f_{k_{m_n}}\left(x_{m_n}\right) = y$. Но тогда при достаточно больших n имеем $\left|f_{k_{m_n}}\left(x_{m_n}\right) - f\left(x_{m_n}\right)\right| < \varepsilon$, что противоречит неравенству (2). Это противоречие показывает, что последовательность $\{f_n\}$ не является непрерывно сходящейся в узком смысле.

Теорема 5. *Если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то из непрерывной сходимости следует равномерная сходимость (т. е. эти два вида сходимости эквивалентны в области непрерывных функций).*

Предположим, как и в предыдущем доказательстве, что последовательность $\{f_n\}$ не является равномерно сходящейся к f, т. е. имеет место неравенство (2).

Так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, можно допустить, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, т. е. $\lim x_n = x$. По предположению, последовательность $\{f_n\}$ сходится непрерывно, поэтому последовательность $\{f_{k_n}\}$ также сходится непрерывно (см. § 20, VI, замечание), но тогда

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x_n) = f(x).$$

С другой стороны, так как $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x_n) = f(x_n)$, существует последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \ldots$, такая, что

$$|f_{m_n}(x_n) - f(x_n)| < 1/n, \text{ откуда } |f_{k_n}(x_n) - f_{m_n}(x_n)| > \varepsilon - 1/n,$$

согласно (2). Но это противоречит (3), ибо из формулы $\lim x_n = x$ следует, что $\lim f_{m_n}(x_n) = f(x)$.

Замечания. Если пространство $\mathcal{Y}$ компактно, то функции, являющиеся элементами пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, ограничены (см. III (5)). Следовательно, формула (1) определяет метрическую структуру пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Вытекающее отсюда понятие предела в соответствии с II (i) совпадает с понятием предела, которое рассматривалось в п. VIII, § 20 (непрерывная сходимость в узком смысле).

Эти утверждения следуют непосредственно из теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть p — фиксированная точка метрического пространства $\mathcal{X}$. Каждому ограниченному подмножеству $A (\neq 0)$ пространства $\mathcal{X}$ поставим в соответствие функцию f_A, определенную следующим образом:*

$$(4) \qquad f_A(x) = \rho(x, A) - |x - p|.$$

Тогда

$$(5) \qquad \operatorname{dist}(A, B) = |f_A - f_B|.$$

Доказательство. Заметим сначала, что функция f_A ограничена:

$$|f_A(x)| \leqslant \rho(p, A) + \delta(A).$$

Из неравенства IV (4) вытекают неравенства

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(p, A) + |x - p|,$$

$$|x - p| \leqslant \rho(x, A) + \rho(A, p) + \delta(A).$$

В силу симметрии, можно предположить, что

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x\in A} \rho(x, B).$$

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть a — точка множества A, такая, что $\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \rho(a, B) + \varepsilon$. Так как $\rho(a, A) = 0$, то, согласно (4), мы имеем

$$(6) \quad \operatorname{dist}(A, B) \leqslant \rho(a, B) - \rho(a, A) + \varepsilon \leqslant |f_B - f_A| + \varepsilon.$$

С другой стороны, каждой точке $x \in \mathscr{X}$ поставим в соответствие точку a_x множества A, такую, что $\rho(x, A) \geqslant |x - a_x| - \varepsilon$. Согласно IV (4), $\rho(x, B) \leqslant |x - a_x| + \rho(a_x, B)$, откуда

$$\rho(x, B) - \rho(x, A) \leqslant \rho(a_x, B) + \varepsilon \leqslant \operatorname{dist}(A, B) + \varepsilon;$$

кроме того,

$$\rho(x, A) - \rho(x, B) \leqslant \operatorname{dist}(A, B) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|f_B - f_A| \leqslant \operatorname{dist}(A, B) + \varepsilon. \tag{7}$$

Из формул (6) и (7) следует тождество (5).

Замечание. В случае, когда пространство $\mathscr{X}$ *ограничено*, функцию f_A можно определить более простым образом, полагая $f_A(x) = \rho(x, A)$.

Из теоремы 6 непосредственно вытекает

Теорема 7. *Пространство* $(2^{\mathscr{X}})_m$ *изометрично некоторому подмножеству пространства* $\mathscr{E}^{\mathscr{X}} \cap \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{E})$.

В частности, *если пространство* $\mathscr{X}$ *компактно, то имеют место „топологические“ (или точнее метрические) включения*

$$\mathscr{X} \underset{\text{top}}{\subset} (2^{\mathscr{X}})_m \underset{\text{top}}{\subset} \mathscr{E}^{\mathscr{X}},$$

причем последнее пространство метризуется при помощи формулы (1).

Предыдущая теорема позволяет рассматривать пространство $(2^{\mathscr{X}})_m$ как подпространство пространства $\mathscr{E}^{\mathscr{X}}$. Обратно, если f — непрерывная функция, т. е. элемент пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$, то множество точек $(x, f(x))$ прямого произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ (график функции f) есть замкнутое подмножество пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ (см. § 15, V, 2), следовательно, если это множество ограничено, то оно является элементом пространства $(2^{\mathscr{X} \times \mathscr{Y}})_m$. Более точно, справедлива

Теорема 8. *Если пространство* $\mathscr{X}$ *компактно, то имеет место топологическое включение*

$$\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \underset{\text{top}}{\subset} (2^{\mathscr{X} \times \mathscr{Y}})_m.$$

Доказательство. Заметим предварительно, что если $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{dist}(f, g) \leqslant |f - g|. \tag{8}$$

Чтобы убедиться в этом, положим $p_x = (x, f(x))$ и $q_x = (x, g(x))$. Тогда $p_x \in f$ и $q_x \in g$, следовательно,

$$\rho(p_x, g) \leqslant |p_x - q_x| = |f(x) - g(x)| \leqslant |f - g|,$$

откуда

$$\sup_{x \in \mathscr{X}} \rho(p_x, g) \leqslant |f - g|.$$

Из соображений симметрии получаем

$$\sup_{x \in \mathscr{X}} \rho(q_x, f) \leqslant |f - g|,$$

откуда вытекает неравенство (8).

Остается доказать, что последовательность функций $f_n \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ равномерно сходится к функции $f \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0.$$

Так как, по предположению, последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится, то имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} |f_n - f| = 0, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0,$$

в силу неравенства (8).

Обратно, допустим, что $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0$. Докажем, что сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f непрерывна. Отсюда, в силу теоремы 5, можно будет заключить, что она равномерна (так как пространство $\mathscr{X}$ компактно по предположению).

Пусть $\lim x_n = x$. Докажем, что $\lim f_n(x_n) = f(x)$. Положим $q_n = (x_n, f_n(x_n))$. Так как $\rho(q_n, f) \leqslant \operatorname{dist}(f_n, f)$, то $\lim \rho(q_n, f) = 0$. Поэтому существует последовательность точек $p_n \in f$, такая, что $\lim |q_n - p_n| = 0$. Положим $p_n = (x_n^*, f(x_n^*))$. Тогда имеет место соотношение $\lim |x_n - x_n^*| = 0$, откуда $\lim x_n^* = x$ и, следовательно, $\lim f(x_n^*) = f(x)$. С другой стороны, $\lim |f_n(x_n) - f(x_n^*)| = 0$, откуда окончательно получаем, что $\lim f_n(x_n) = f(x)$.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы 6 (а также из теоремы 7).

Теорема 9 [1]). *Всякое метрическое пространство $\mathscr{X}$ изометрично некоторому подмножеству пространства $\mathscr{E}^{\mathscr{X}} \cap \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{E})$.*

Чтобы убедиться в этом, подставим вместо множества A в формулу (4) множество, состоящее из одной точки a. Тогда имеем

$$f_a(x) = |x - a| - |x - p|,$$

[1]) См. Куратовский [28] и Кунугуи [2], стр. 351.

поэтому $|f_a(x)| \leqslant |a-p|$ и $|f_a(x)-f_b(x)| = ||x-a|-|x-b|| \leqslant \leqslant |a-b|$, откуда $|f_a - f_b| \leqslant |a-b|$. С другой стороны, $f_a(a) - f_b(a) = -|a-p| - |a-b| + |a-p|$, откуда $|f_a - f_b| \geqslant \geqslant |a-b|$. Следовательно, $|f_a - f_b| = |a-b|$.

XI. Продолжение относительно замкнутых и относительно открытых множеств. Пусть E — (непустое) фиксированное подмножество метрического пространства $\mathscr{X}$. Каждому множеству $X \subset E$ поставим в соответствие множество

(1) $$F(X) = \mathop{\mathsf{E}}_{x} [\rho(x, X) \leqslant \rho(x, E - X)].$$

Полагая $\rho(x, 0) = \infty$, получаем

(2) $$F(0) = 0;$$

(3) $$F(E) = \mathscr{X}.$$

Имеют место следующие соотношения:

(4) $$X \subset F(X);$$

(5) $$\overline{F(X)} = F(X);$$

(6) $$F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y);$$

(7) *если* $X_1 \cup \ldots \cup X_n = E$, *то* $F(X_1) \cup \ldots \cup F(X_n) = \mathscr{X}$;

(8) $$E \cap F(X) = E \cap \overline{X};$$

(9) *если* X *замкнуто в* E, *то* $E \cap F(X) = X$.

Включение (4) следует из того, что при $x \in X$ имеем $\rho(x, X) = 0$.

Равенство (5) является следствием непрерывности функции $\rho(x, A)$ (см. IV (5)). Перейдем к доказательству равенства (6).

Пусть $x \in F(X)$; тогда, согласно (1) и IV (6), имеем

$$\rho(x, X \cup Y) \leqslant \rho(x, X) \leqslant \rho(x, E - X) \leqslant \rho[x, E - (X \cup Y)],$$

откуда $x \in F(X \cup Y)$. Следовательно, $F(X) \subset F(X \cup Y)$.

С другой стороны, допустим, что $x \in F(X \cup Y)$, т. е.

(10) $$\rho(x, X \cup Y) \leqslant \rho[x, E - (X \cup Y)].$$

Согласно IV (7), функция $\rho(x, X \cup Y)$ равна либо $\rho(x, X)$, либо $\rho(x, Y)$. Допустим, что

(11) $$\rho(x, X \cup Y) = \rho(x, X).$$

Докажем, что $x \in F(X)$, т. е.

$$\rho(x, X) \leqslant \rho(x, E - X);$$

тем самым будет завершено доказательство формулы (6).

Согласно формулам (10), (11) и IV (6),

$$\rho(x, X) \leqslant \rho[x, E-(X \cup Y)] \quad \text{и} \quad \rho(x, X) = \rho(x, X \cup Y) \leqslant \rho(x, Y);$$

откуда, в силу IV (7), получаем неравенство

$$\rho(x, X) \leqslant \rho[x, E-(X \cup Y) \cup Y] \leqslant \rho(x, E-X),$$

так как

$$E-(X \cup Y) \cup Y = E - X \cup Y \supset E - X.$$

Таким образом, формула (6) установлена. Утверждение (7) вытекает из формул (6) и (3). Перейдем к доказательству формулы (8).

Согласно (4) и (5), $\overline{X} \subset F(X)$. Остается показать, что $E \cap F(X) \subset \overline{X}$.

Предположим противное, т. е. что $x \in [(E \cap F(X)) - \overline{X}]$. Согласно (1) и IV (3), имеем $0 < \rho(x, X) \leqslant \rho(x, E-X)$, откуда следует, что $x \notin E - X$; поскольку $x \in E$, имеем $x \in X$, что противоречит предположению.

Формула (9) вытекает из (8), ибо если множество X замкнуто в E, то $X = E \cap \overline{X}$.

Наряду с замкнутым множеством $F(X)$ рассмотрим следующее *открытое* множество $G(X)$:

(12) $$G(X) = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [\rho(x, X) < \rho(x, E-X)].$$

Заметим, что

(13) $$G(X) = -F(E-X).$$

Сопоставляя соотношения (2)—(9) с равенством (13), получаем следующие соотношения:

(14) $$G(E) = \mathscr{X};$$

(15) $$G(0) = 0;$$

(16) $$G(X \cap Y) = G(X) \cap G(Y);$$

(17) *если* $X_1 \cap \ldots \cap X_n = 0$, *то* $G(X_1) \cap \ldots \cap G(X_n) = 0$;

(18) $$E \cap G(X) = E - \overline{E-X};$$

(19) *если* X *открыто в* E, *то* $E \cap G(X) = X$.

Установленные свойства функций F и G позволяют непосредственно получить следующие теоремы о продолжении относительно замкнутых или относительно открытых множеств.

Теорема 1. *Пусть* $\{X_\iota\}$ — *семейство множеств, замкнутых в* E; *тогда существует семейство множеств* $\{F_\iota\}$, *замкнутых* *в пространстве* $\mathscr{X}$, *таких, что* $E \cap F_\iota = X_\iota$ *и*

(20) *из условия* $X_{\iota_1} \cup \ldots \cup X_{\iota_n} = E$

следует равенство $F_{\iota_1} \cup \ldots \cup F_{\iota_n} = \mathscr{X}$,

какова бы ни была конечная система индексов $\iota_1, \ldots, \iota_n$.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_\iota\}$ — *семейство множеств, открытых в* E; *тогда существует семейство множеств* $\{G_\iota\}$, *открытых в пространстве* $\mathscr{X}$, *таких, что* $E \cap G_\iota = X_\iota$ *и*

(21) *из условия* $X_{\iota_1} \cap \ldots \cap X_{\iota_n} = 0$

следует равенство $G_{\iota_1} \cap \ldots \cap G_{\iota_n} = 0$,

какова бы ни была конечная система индексов $\iota_1, \ldots, \iota_n$.

В самом деле, достаточно положить

$$F_\iota = F(X_\iota) \quad \text{и} \quad G_\iota = G(X_\iota).$$

Для метрических пространств теорему 4 из § 14, V, можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. *Условие* (21) *можно заменить следующим условием*:

(22) *из соотношения* $X_{\iota_1} \cap \ldots \cap X_{\iota_n} = 0$
следует соотношение

$$\overline{G}_{\iota_1} \cap \ldots \cap \overline{G}_{\iota_n} = \overline{X}_{\iota_1} \cap \ldots \cap \overline{X}_{\iota_n}.$$

Доказательство. В силу теоремы 2, существует семейство открытых множеств H_ι, такое, что $E \cap H_\iota = X_\iota$, и из равенства $X_{\iota_1} \cap \ldots \cap X_{\iota_n} = 0$ следует равенство $H_{\iota_1} \cap \ldots \cap H_{\iota_n} = 0$.

Положим $A = X_\iota$ и $B = \mathscr{X} - H_\iota$ в теореме 3, § 14, V; тогда существует открытое множество G_ι, такое, что

$$X_\iota \subset G_\iota \subset H_\iota \quad \text{и} \quad \overline{G}_\iota \cap (\mathscr{X} - H_\iota) \subset \overline{X}_\iota, \quad \text{т. е.} \quad \overline{G}_\iota \subset H_\iota \cup \overline{X}_\iota.$$

Допустим, что $X_{\iota_1} \cap \ldots \cap X_{\iota_n} = 0$. Тогда

$$\overline{X}_{\iota_1} \cap \ldots \cap \overline{X}_{\iota_n} \subset \overline{G}_{\iota_1} \cap \ldots \cap \overline{G}_{\iota_n} \subset (H_{\iota_1} \cup \overline{X}_{\iota_1}) \cap \ldots \cap (H_{\iota_n} \cup \overline{X}_{\iota_n}).$$

Остается доказать, что правая часть этого двойного включения содержится в левой части. Но, с одной стороны, $H_{\iota_1} \cap \ldots \cap H_{\iota_n} = 0$, а с другой стороны, любое пересечение n множеств, взятых из двух совокупностей $H_{\iota_1}, \ldots, H_{\iota_n}$ и $\overline{X}_{\iota_1}, \ldots, \overline{X}_{\iota_n}$ (причем хотя бы одно из них берется из второй совокупности), содержится в $\overline{X}_{\iota_1} \cap \ldots \cap \overline{X}_{\iota_n}$; в самом деле, из равенства $E \cap H_\iota = X_\iota$ следует (см. § 5, III) включение $\overline{E} \cap H_\iota \subset \overline{E \cap H_\iota} = \overline{X}_\iota$, откуда $H_\iota \subset \overline{X}_\varkappa \subset \overline{X}_\iota \cap \overline{X}_\varkappa$.

XII. Измельчение бесконечных покрытий. Следующее утверждение в случае метрических пространств является обобщением следствия из § 14, III, касающегося нормальных пространств.

Теорема. *Каждое покрытие метрического пространства* $\mathscr{X}$:

$$\mathscr{X} = \bigcup_{\iota} G_{\iota}, \quad \textit{множества } G_{\iota} \textit{ открыты}, \tag{1}$$

содержит измельчение

$$\mathscr{X} = \bigcup_{\iota} H_{\iota}, \quad \textit{множества } H_{\iota} \textit{ открыты и } \overline{H}_{\iota} \subset G_{\iota}. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\mathscr{X} = \bigcup_{\iota} F_{\iota}, \quad \text{где} \quad F_{\iota} = \overline{F}_{\iota} \subset G_{\iota}. \tag{2'}$$

Так как любое метрическое пространство гомеоморфно ограниченному пространству (согласно п. V), то можно считать, что пространство $\mathscr{X}$ ограничено.

Можно также считать, что $G_{\iota} \neq \mathscr{X}$ для каждого ι, ибо если бы было $G_{\iota_0} = \mathscr{X}$, то достаточно было бы положить $F_{\iota_0} = \mathscr{X}$ и $F_{\iota} = 0$ при $\iota \neq \iota_0$.

Положим $C_{\iota} = \mathscr{X} - G_{\iota}$. Тогда $C_{\iota} \neq 0$, каково бы ни было ι. Для каждой точки x пространства $\mathscr{X}$ положим

$$\sigma(x) = \sup_{\iota} \rho(x, C_{\iota}), \tag{3}$$

$$F_{\iota} = \mathop{\mathsf{E}}_{x} \left[\rho(x, C_{\iota}) \geqslant \frac{1}{2}\sigma(x)\right]. \tag{4}$$

Тогда $\overline{F}_{\iota} = F_{\iota}$. В самом деле, из очевидного соотношения

$$\left[\rho(x, C_{\iota}) \geqslant \frac{1}{2}\sigma(x)\right] \equiv \left[\rho(x, C_{\iota}) \geqslant \frac{1}{2}\rho(x, C_{\varkappa}) \text{ для любого } \varkappa\right]$$

следует, что

$$F_{\iota} = \bigcap_{\varkappa} \mathop{\mathsf{E}}_{x} \left[\rho(x, C_{\iota}) \geqslant \frac{1}{2}\rho(x, C_{\varkappa})\right].$$

Множество F_{ι} замкнуто, как пересечение замкнутых множеств (в силу непрерывности функции ρ, см. IV (5)).

По определению верхней грани, каждой точке x соответствует индекс ι_0, такой, что

$$\rho(x, C_{\iota_0}) \geqslant \frac{1}{2} \sup \rho(x, C_{\iota}).$$

Тогда, в силу равенств (3) и (4), $x \in F_{\iota_0}$, откуда следует равенство (2').

Равенство (1) означает, что каждой точке x соответствует индекс ι_0, такой, что $x \in G_{\iota_0}$, следовательно (так как множество G_{ι_0} открыто), $\rho(x, C_{\iota_0}) > 0$.

Поэтому $\sigma(x) > 0$. Предположим, что $x \in F_\iota$; тогда, в силу формулы (4), имеем

$$\rho(x, C_\iota) > 0.$$

Следовательно, $x \in G_\iota$ и $F_\iota \subset G_\iota$.

Далее, так как пространство $\mathscr{X}$ нормально, существует открытое множество H_ι, такое, что $F_\iota \subset H_\iota$ и $\bar{H}_\iota \cap C_\iota = 0$.

Формула (2) доказана.

XIII. G_δ-множества в метрических пространствах.

Теорема. *Пусть $Q \subset \mathscr{X}$ есть множество типа G_δ. Тогда существует непрерывное отображение $f: Q \to \mathscr{E}^{\aleph_0}$, такое, что множество $\mathfrak{J} = \underset{x,\, y}{\mathsf{E}}\,[y = f(x)]$ замкнуто в пространстве $\mathscr{X} \times \mathscr{E}^{\aleph_0}$.*

Доказательство. По предположению, $Q = G_1 \cap G_2 \cap \ldots$, где G_n — открытые множества ($n = 1, 2, \ldots$). Положим $F_k = \mathscr{X} - G_k$,

$$(1) \qquad f_k(x) = \frac{1}{\rho(x, F_k)} \quad \text{для} \quad x \in G_k;$$

$$(2) \qquad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots) \quad \text{для} \quad x \in Q,$$

так что $f: Q \to \mathscr{E}^{\aleph_0}$.

Согласно IV (3), $\rho(x, F_k) > 0$ при $x \in G_k$, а, в силу IV (5), функция ρ непрерывна, поэтому, согласно формуле (1), и функции f_k непрерывны. Из теоремы 3, § 16, II, следует, что отображение f непрерывно.

Предположим теперь, что множество $\mathfrak{J}$ не замкнуто, т. е. имеют место соотношения

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad x_n \in Q, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y, \qquad (x, y) \notin \mathfrak{J}.$$

Так как отображение f непрерывно на Q, отсюда следует, что $x \in \mathscr{X} - Q$. Поэтому существует целое число k, такое, что $x \in F_k$, и, значит, $\rho(x, F_k) = 0$. Так как функция ρ непрерывна, имеем $\rho(x, F_k) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F_k)$, откуда, в силу формулы (1),

$$\lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = \infty.$$

Это приводит к противоречию, так как, согласно соотношению (3), $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y = (y^1, y^2, \ldots)$, следовательно, $\lim_{n\to\infty} f_k(x_n) = y^k$.

Следствие. *Каждое G_δ-подмножество метрического пространства $\mathscr{X}$ гомеоморфно некоторому замкнутому подмножеству пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{E}^{\aleph_0}$.*

Это вытекает из того, что множество Q гомеоморфно множеству $\mathfrak{J}$ (согласно теореме 1 из § 15, V).

Замечание 1. Если множество Q представляет собой разность двух замкнутых множеств, т. е. $Q = A - B$, то в предыдущем следствии пространство $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ можно заменить пространством $\mathcal{E}$ (см. Серпинский и Куратовский [2], стр. 23). Действительно, в этом случае можно положить

$$f(x) = \frac{1}{\rho(x, B)}.$$

Замечание 2. Как мы увидим далее (§ 33, IV), из предыдущего следствия вытекает, что G_δ-подмножество полного пространства гомеоморфно полному пространству.

XIV. Пространства близости. Равномерные пространства (основные определения). В этом разделе мы не предполагаем, что пространство $\mathcal{X}$ метрическое.

Определение 1 [1]. Множество $\mathcal{X}$ называется *пространством близости*, если для любых двух подмножеств A, $B \subset \mathcal{X}$ установлено, являются ли они близкими (близость множеств A и B обозначается записью $A \delta B$; запись $A \bar{\delta} B$ означает, что A и B не являются близкими), причем выполняются следующие аксиомы близости:

1. *Отношение δ симметрично.*
2. $[A \delta (B \cup C)] \equiv (A \delta B$ или $A \delta C)$.
3. $(p \delta q) \equiv (p = q)$.
4. $0 \bar{\delta} \mathcal{X}$.
5. *Если $A \bar{\delta} B$, то существуют множества C и D, такие, что*

$$A \subset C, \quad B \subset D, \quad C \cap D = 0, \quad A \bar{\delta} (-C), \quad B \bar{\delta} (-D).$$

Естественная топология пространства $\mathcal{X}$ определяется тождеством

$$(x \in \bar{A}) \equiv (x \delta A). \tag{1}$$

Можно показать, что при таком определении *$\mathcal{X}$ есть вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство.*

Обратно, *каждое вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство можно рассматривать как пространство близости*, т. е. можно определить отношение близости, удовлетворяющее аксиомам 1—5 и формуле (1). А именно, можно считать, что $A \bar{\delta} B$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такое, что $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$ $(A \neq 0 \neq B)$.

[1]) См. Ефремович [1], [2], см. также Смирнов [4], [8], Мрувка [2], [3], Исбелл [1].

В метрическом пространстве отношение близости δ можно ввести наиболее естественным образом при помощи тождества

$$(2)\qquad (A\,\delta B)\equiv[\rho(A,\ B)=0]\qquad (A\neq 0\neq B).$$

Пространства близости представляют интерес в основном потому, что в них можно ввести понятие равномерно непрерывных отображений. А именно если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — пространства близости, то отображение $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ называется *равномерно непрерывным*, если

$$(3)\qquad (A\,\delta B)\Rightarrow(f(A)\,\delta f(B)).$$

Если пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — метрические, это определение эквивалентно обычному определению равномерной непрерывности, принятому в метрических пространствах (см. IV).

Существует и другое важное понятие, связанное с равномерной непрерывностью.

Определение 2[1]. Говорят, что множество $\mathscr{X}$ снабжено *равномерной структурой относительно непустого семейства* $\boldsymbol{U}$ подмножеств множества $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$, если для любого $V\in\boldsymbol{U}$ выполняются следующие аксиомы:

а) *диагональ множества* $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ *является подмножеством множества* V;

б) *множество* $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}[(y,\ x)\in V]$ *является элементом семейства* $\boldsymbol{U}$;

в) *если* $V_1\in\boldsymbol{U}$ *и* $V_2\in\boldsymbol{U}$, *то* $(V_1\cap V_2)\in\boldsymbol{U}$;

г) *если* $V\in Z$, *то* $Z\in\boldsymbol{U}$;

д) *существует* $V_1\in\boldsymbol{U}$, *такое, что*

$$\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\ \bigvee_{z}([(x,\ z)\in V_1]\wedge[(z,\ y)\in V_1])\subset V.$$

Более того, предположим, что

е) *пересечение всех элементов семейства* $\boldsymbol{U}$ *есть диагональ множества* $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$.

Пусть p — произвольная точка множества $\mathscr{X}$; окрестностью точки p будем считать каждое множество вида $\underset{x}{\mathsf{E}}[(p,\ x)\in V]$, где $V\in\boldsymbol{U}$. Таким образом в множестве $\mathscr{X}$ определяется некоторая топология, которую мы будем называть топологией, *индуцированной равномерной структурой относительно* $\boldsymbol{U}$. Легко показать, что $\mathscr{X}$ — *вполне регулярное* $\mathscr{T}_1$-*пространство*.

Обратно, *каждое вполне регулярное* $\mathscr{T}_1$-*пространство можно наделить равномерной структурой* (см. Бурбаки [1]).

[1]) См. Вейль [1], см. также Бурбаки [1], гл. II. См. также Чассар [1], [2].

Интересно сравнить эту теорему с аналогичной теоремой о пространствах близости [1]).

В метрических пространствах U можно определить как семейство, состоящее из множеств, содержащих множество

$$V_\varepsilon = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} [\,|x-y|<\varepsilon], \quad \text{где} \quad \varepsilon>0. \tag{4}$$

XV. Псевдометрические пространства.

Определение 1. Функция $\psi: \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathscr{E}$ называется *псевдометрикой*, если выполняются следующие аксиомы (ср. I):

α) $\psi(x, x)=0$;

β) $\psi(x, y)+\psi(x, z)\geqslant\psi(y, z)$.

Отсюда следует, что

$$\psi(x, y)\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \psi(x, y)=\psi(y, x).$$

Если, кроме того, предположить, что

$$(x\neq y)\Rightarrow[\psi(x, y)\neq 0],$$

то псевдометрика, очевидно, становится метрикой.

Следует заметить, что

1° *если* $f:\mathcal{X}\to\mathscr{E}$, *то* $\psi(x, y)=|f(x)-f(y)|$ *есть псевдометрика*;

2° *сумма и максимум двух псевдометрик есть псевдометрика*;

3° *сумма сходящегося ряда псевдометрик есть псевдометрика*;

4° *если* ψ — *псевдометрика, то и функция* $\bar\psi$, *определенная следующим образом*:

$$\bar\psi(x, y)=\begin{cases}\psi(x, y), & \text{если} \quad \psi(x, y)\leqslant 1,\\ 1, & \text{если} \quad \psi(x, y)\geqslant 1,\end{cases}$$

является псевдометрикой.

Определение 2 [2]). Пространство $\mathcal{X}$ называется *псевдометрическим* относительно семейства $\Psi=\{\psi_t\}$ псевдометрик $(t\in T)$, если

γ) *для каждой пары* $x\neq y$ *существует* $t\in T$, *такое, что* $\psi_t(x, y)\neq 0$.

---

[1]) О различных связях между пространствами близости и равномерными пространствами см. Смирнов [7], [6].

[2]) Что касается этого определения и последующих теорем, см. Мрувка [4].

Обозначим через Ψ^* пополнение семейства Ψ всеми максимумами конечных систем псевдометрик, принадлежащих Ψ.

Теорема 1. *Пусть „псевдошары"*

(1) $B_{t,p,\varepsilon} = \mathop{\mathsf{E}}\limits_{x} [\psi_t(p, x) < \varepsilon]$, *где* $\psi_t \in \Psi^*$, $p \in \mathscr{X}$ *и* $\varepsilon > 0$,

образуют базу пространства $\mathscr{X}$. *Тогда пространство* $\mathscr{X}$ *становится вполне регулярным* $\mathcal{T}_1$*-пространством* (это индуцированная топология псевдометрического пространства $\mathscr{X}$).

Доказательство. Пусть $F = \bar{F} \subset \mathscr{X}$ и $p \in \mathscr{X} - F$. Тогда существуют t и ε, такие, что $F \cap B_{t,p,\varepsilon} = 0$. Положим $\varphi_t = \psi_t/\varepsilon$ и $f(x) = \overline{\varphi}_t(p, \varepsilon)$. Тогда

$$f \in \mathcal{J}^x, \quad f(p) = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in F.$$

Справедлива также обратная

Теорема 2. *В любом вполне регулярном* $\mathcal{T}_1$*-пространстве можно определить псевдометрику, не меняя его топологии.*

А именно пусть $\{f_t\}$ — семейство функций $f_t \in \mathcal{J}^x$, таких, что для каждого множества $F = \bar{F}$ и любой точки $p \in \mathscr{X} - F$ существует t, удовлетворяющее условию

(2) $$f_t(p) \in \mathcal{J} - \overline{f_t(F)};$$

тогда

(3) $$\psi_t(x, y) = |f_t(x) - f_t(y)|.$$

Доказательство. Очевидно, что пространство $\mathscr{X}$ является псевдометрическим по отношению к семейству $\{\psi_t\}$. Покажем, что топология, индуцированная этим семейством, согласуется с исходной топологией пространства $\mathscr{X}$.

Пусть G — открытое множество и $p \in G$. Положим $F = \overline{\mathscr{X} - G}$. Пусть t удовлетворяет условию (2), положим $\varepsilon = \rho[f_t(p), \overline{f_t(F)}]$. Отсюда легко получить, что $B_{t,p,\varepsilon} \subset G$, и поэтому множество G открыто в топологии, индуцированной семейством $\{\psi_t\}$.

Обратно, множество $B_{t,p,\varepsilon}$ открыто в исходной топологии пространства $\mathscr{X}$, так как функция ψ_t непрерывна.

Замечание 1. Можно построить теорию псевдометрических пространств по аналогии с теорией метрических пространств (см. Мрувка [4]).

Можно показать, например, что любое замкнутое подмножество вполне регулярного пространства является пересечением семейства открытых множеств, причем мощность этого семейства равна мощности семейства $\{\psi_t\}$, рассмотренного выше.

Замечание 2. Если множество T счетно и выполнено условие γ), то формула

$$|x-y|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{\psi_n(x,y)}{1+\psi_n(x,y)},$$

так же как и формула

$$|x-y|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\overline{\psi}_n(x,y),$$

определяет расстояние в пространстве $\mathscr{X}$ (ср. 3° и 4°).

XVI. Паракомпактность метрических пространств.

Определения. Семейство $\boldsymbol{A}$ подмножеств топологического пространства называется *дискретным*, если каждая точка пространства имеет окрестность, которая пересекается самое большее с одним элементом семейства $\boldsymbol{A}$.

Семейство называется *σ-дискретным*, если оно является объединением счетного числа дискретных семейств.

Теорема 1. *Каждое открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ метрического пространства имеет открытое σ-дискретное измельчение.*

Доказательство. Положим

$$G_{\alpha,n}=\mathop{\mathsf{E}}_{x}\left[\rho(x,-G_\alpha)>\frac{1}{2^n}\right]. \tag{0}$$

Очевидно (ср. IV (3)), что

$$G_\alpha=G_{\alpha,1}\cup G_{\alpha,2}\cup\ \ldots, \tag{1}$$

причем множества $G_{\alpha,n}$ открыты (так как функция ρ непрерывна, см. IV (5)).

Пусть $x\in G_{\alpha,n}$ и $y\notin G_{\alpha,n+1}$. Тогда, согласно IV (6′),

$$|x-y|\geqslant|\rho(x,-G_\alpha)-\rho(y,-G_\alpha)|>\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}},$$

откуда следует, что

$$\rho(G_{\alpha,n},-G_{\alpha,n+1})\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}. \tag{2}$$

Так как множество индексов α произвольно, можно предположить, что α — некоторое порядковое число. Положим

$$H_{\alpha_0,n}=G_{\alpha_0,n}-\overline{\bigcup_{\alpha<\alpha_0}G_{\alpha,n+1}}. \tag{3}$$

Тогда, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то либо $H_{\alpha_2, n} \subset -G_{\alpha_1, n+1}$, либо $H_{\alpha_1, n} \subset -G_{\alpha_2, n+1}$, поскольку либо $\alpha_1 < \alpha_2$, либо $\alpha_2 < \alpha_1$.

Таким образом, согласно формулам (2) и (3), мы имеем

$$\rho(H_{\alpha_1, n}, H_{\alpha_2, n}) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \text{если} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Следовательно, для каждого n семейство $\boldsymbol{B}_n = \{H_{\alpha, n}\}$ дискретно, а тогда семейство $\{H_{\alpha, n}\}$ σ-дискретно при переменных α и n.

Остается показать, что это семейство является покрытием пространства. т. е. что

$$\mathscr{X} = \bigcup_{\alpha, n} H_{\alpha, n}.$$

Пусть x_0 — данная точка. Обозначим через α_0 наименьший индекс, такой, что $x_0 \in G_{\alpha_0}$. Согласно равенству (1), существует такой индекс n_0, что $x_0 \in G_{\alpha_0, n_0}$. Очевидно, что если $\alpha < \alpha_0$, то $x_0 \notin G_{\alpha, n_0+2}$. Обозначим через K открытый шар с центром x_0 радиусом $1/2^{n_0+2}$. Из неравенства (2) следует, что

$$K \cap \bigcup_{\alpha < \alpha_0} G_{\alpha, n_0+1} = 0, \text{ значит, } x_0 \in H_{\alpha_0, n_0}, \text{ согласно (3).}$$

Следствие 1а. *Каждое метрическое пространство имеет σ-дискретную базу.*

Доказательство. Для каждого n рассмотрим семейство $\boldsymbol{F}_n$ всех шаров радиуса меньше $1/n$ и обозначим через $\boldsymbol{A}_n$ σ-дискретное измельчение семейства $\boldsymbol{F}_n$. Тогда $\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 \cup \ldots$ — искомая база.

Теорема 2. *Для каждого σ-локально конечного открытого покрытия $\boldsymbol{A}$* (см. § 5, VII) *метрического пространства существует локально конечное открытое измельчение.*

Доказательство. Пусть

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad \boldsymbol{A}_n = \{G_{n, t}\},$$

где $t \in T_n$, множества $G_{n, t}$ открыты, а семейства $\boldsymbol{A}_n$ локально конечны.

Согласно теореме из п. XII, существуют открытые множества $H_{n, t}$, такие, что

$$\overline{H}_{n, t} \subset G_{n, t} \quad \text{и} \quad \bigcup_t H_{n, t} = \bigcup_t G_{n, t}. \tag{4}$$

Положим $\boldsymbol{B}_n = \{H_{n, t}\}$, где $t \in T_n$. Так как $\bigcup\limits_t G_{n, t} = \mathscr{X}$, объединение $\boldsymbol{B}_1 \cup \boldsymbol{B}_2 \cup \ldots$ является открытым покрытием пространства. Семейства $\boldsymbol{A}_n$ локально конечны, поэтому и семейства $\boldsymbol{B}_n$ локально конечны. Следовательно, в силу теоремы из § 5, VII, множества

$$K_{n, t} = G_{n, t} - \bigcup_{m < n} \bigcup_{t \in T_m} \overline{H}_{m, t} \tag{5}$$

— открытые. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что семейство $\{K_{n,t}\}$ с переменными индексами n и t является локально конечным покрытием рассматриваемого пространства.

Пусть x_0 — фиксированная точка, и пусть n_0 — наименьший индекс, такой, что $x \in \bigcup H_{n_0,t}$, $t \in T_{n_0}$. Тогда существует индекс $t_0 \in T_{n_0}$, такой, что $x_0 \in H_{n_0,t_0}$. Так как семейства A_m локально конечны, существует система $V_1, V_2, \ldots, V_{n_0}$ открытых множеств, содержащих x_0, такая, что множество V_m пересекается только с конечным числом элементов семейства A_m. Ясно, что множество $H_{n_0,t_0} \cap V_1 \cap \ldots \cap V_{n_0}$ пересекается только с конечным числом множеств вида (5).

Наконец, чтобы показать, что $x_0 \in \bigcup\limits_{n,t} K_{n,t}$, обозначим через n_0 наименьший индекс, такой, что $x_0 \in \bigcup G_{n_0,t}$, где $t \in T_{n_0}$. Тогда существует индекс $t_0 \in T_{n_0}$, такой, что $x_0 \in G_{n_0,t_0}$. Согласно (4) и (5), отсюда следует, что

$$x_0 \in K_{n_0,t_0}.$$

Следствие 2а. (Теорема Стоуна А. [1].) *Всякое метрическое пространство паракомпактно.*

Это предложение вытекает из теорем 1 и 2, так как дискретное семейство, очевидно, локально конечно.

XVII. Проблема метризации. Эта проблема состоит в нахождении необходимых и достаточных условий того, чтобы топологическое пространство (регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство) было метризуемым (т. е. было гомеоморфно некоторому метрическому пространству).

Метризационная теорема Бинга—Нагата—Смирнова[1]). *Следующие три условия, наложенные на регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство $\mathcal{X}$, эквивалентны:*

1° *пространство $\mathcal{X}$ метризуемо;*

2° *пространство $\mathcal{X}$ имеет σ-дискретную базу;*

3° *пространство $\mathcal{X}$ имеет σ-локально конечную базу.*

Доказательство. Импликация $1° \Rightarrow 2°$ представляет собой следствие 1а, п. XVI. Импликация $2° \Rightarrow 3°$ очевидна. Итак, в пространстве $\mathcal{X}$ с σ-локально конечной базой $\boldsymbol{B}$ мы должны определить расстояние, сохраняющее топологию пространства $\mathcal{X}$.

---

[1]) См. Бинг [1], Нагата [1], Смирнов [3] и [1]. См. также Александров [20], Архангельский [1], [2], [5], [4], Нагата [2], Майкл [3].

Исторически первое условие метризуемости было дано в статье Александрова и Урысона [1]. См. также Фреше [5], стр. 220, и условие Аронштайна, данное во французском издании этой книги на стр. 138.

См., кроме того, Читтенден [1].

Добавим еще, что имеется обширная литература, касающаяся проблемы метризации *образов метрических пространств* при различных отображениях, таких, как замкнутые, открытые, взаимно непрерывные (метризация факторпространств). См., например, Мартин [1], Ханаи [1], Морита и Ханаи [1], Морита [1], Стоун А. [3].

Положим

$$(0)\qquad B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots, \quad B_n = \{G_{n,t}\}, \quad t \in T_n,$$

где семейства B_n локально конечны.

В силу теоремы 3 из § 14, VI, отсюда следует, что пространство $\mathscr{X}$ совершенно нормально, значит (по теореме 1 из § 14, VI), для каждой пары n, t существует непрерывное отображение $f_{n,t}: \mathscr{X} \to \mathscr{J}$, такое, что

$$(1)\qquad (x \in G_{n,t}) \equiv (f_{n,t}(x) \neq 0).$$

Так как семейства B_n локально конечны, каждая точка x содержится в открытом множестве $U_n(x)$, которое пересекается только с конечным числом множеств $G_{n,t}$. Следовательно, на множестве $U_n(x)$ все функции $f_{n,t}$, за исключением конечного числа, тождественно равны 0.

Таким образом, следующая функция

$$(2)\qquad f_n(x, y) = \sum_{t \in T_n} |f_{n,t}(x) - f_{n,t}(y)|,$$

где $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{X}$, определена корректно.

Кроме того, функция f_n непрерывна (ср. § 13, V, 1).

Применим к функции f_n ограничивающее отображение (см. п. V)

$$(3)\qquad \bar{f}_n(x, y) = \frac{f_n(x, y)}{1 + f_n(x, y)}.$$

Легко видеть, что функции f_n и $\bar{f}_n$ удовлетворяют неравенству треугольника (I (ii)).

Теперь положим

$$(4)\qquad |x - y| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \bar{f}_n(x, y).$$

Покажем, что $|x - y|$ — метрика (т. е. что выполняются условия (i) и (ii) из п. I) и что эта метрика согласуется с исходной топологией пространства $\mathscr{X}$.

Заметим сначала, что поскольку функции $\bar{f}_n$ удовлетворяют условию (ii), то и функция $|x - y|$ удовлетворяет этому условию. Далее, чтобы показать, что функция $|x - y|$ удовлетворяет условию (i) и что расстояние $|x - y|$ согласуется с топологией пространства $\mathscr{X}$, достаточно показать (см. IV (3)), что

$$(5)\qquad (x \in \bar{A}) \equiv (\rho(x, A) = 0),$$

каковы бы ни были точка $x \in \mathscr{X}$ и множество $A \subset \mathscr{X}$.

Так как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна (см. § 13, VI, 3), а проекция является непрерывным отображением, то из левой части равенства (5) следует его правая часть.

С другой стороны, если $x \notin \overline{A}$, то существует пара индексов n, t, такая, что

$$x \in G_{n,t} \quad \text{и} \quad A \subset \mathscr{X} - G_{n,t},$$

и из формул (1) — (4) следует, что для каждой точки $a \in A$

$$|x - a| \geqslant \frac{1}{2^n} \cdot \frac{f_{n,t}(x)}{1 + f_{n,t}(x)} > 0.$$

Следовательно, $\rho(x, A) > 0$. Тем самым доказательство теоремы завершено.

Замечание. Из этой теоремы непосредственно следует, что регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство со счетной базой метризуемо. В § 22 мы дадим более прямое доказательство этого важного утверждения.

§ 22. Пространства со счетной базой

I. Общие свойства. Пусть R_1, R_2, ... — база, состоящая из непустых открытых множеств, данного $\mathcal{T}_1$-пространства $\mathscr{X}$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Свойство пространства обладать открытой счетной базой наследственно.*

В самом деле, если $E \subset \mathscr{X}$, то $E \cap R_1$, $E \cap R_2$, ... есть открытая база множества E.

Теорема 2. *Если $\mathscr{X}$ — регулярное пространство, а G — открытое множество, то для каждой точки $p \in G$ существует индекс n, такой, что $p \in R_n$ и $\overline{R}_n \subset G$.*

Действительно, поскольку пространство $\mathscr{X}$ регулярно, существует открытое множество H, такое, что $p \in H$, $\overline{H} \subset G$. Более того, существует такой индекс n, что $p \in R_n \subset H$, следовательно, $\overline{R}_n \subset G$.

Теорема 3. *Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение на. Отображение f является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$(\overline{R}_k \subset R_j) \Rightarrow [f(R_k) \cap \overline{f(\mathscr{X} - R_j)} = 0].$$

Доказательство. Если f — гомеоморфизм, то из включения $\overline{R}_k \subset R_j$, эквивалентного соотношению $\overline{R}_k \cap (\mathscr{X} - R_j) = 0$, следует, что

$$f(\overline{R}_k) \cap f(\mathscr{X} - R_j) = 0,$$

откуда

$$f(R_k) \cap f(\mathscr{X} - R_j) = 0,$$

Поэтому

$$f(R_k) \cap \overline{f(\mathscr{X} - R_j)} = 0,$$

так как множество $f(R_k)$ открыто.

Обратно, если отображение f непрерывно, но не является гомеоморфизмом, возможны два случая: либо f не является взаимно однозначным, либо существует открытое множество G, такое, что множество $f(G)$ не является открытым. В первом случае существуют две точки $x \neq x'$, такие, что $f(x) = f(x')$, т. е. существует такой индекс j, что

$$x \in R_j \quad \text{и} \quad x' \in \mathscr{X} - R_j, \quad \text{откуда} \quad f(x) = f(x') \in f(\mathscr{X} - R_j).$$

Во втором случае существует точка x, такая, что $x \in G$, $f(x) \in \overline{f(\mathscr{X}) - f(G)}$. Следовательно, существует индекс j, такой, что

$$x \in R_j \subset G, \quad \text{откуда} \quad f(x) \in \overline{f(\mathscr{X}) - f(R_j)}.$$

В обоих случаях $f(x) \in f(\mathscr{X} - R_j)$.

С другой стороны, $x \in R_j$; следовательно, согласно теореме 2, существует такой индекс k, что $x \in R_k$ и $\overline{R}_k \subset R_j$. Поэтому $f(x) \in f(R_k) \cap \overline{f(\mathscr{X} - R_j)}$, что завершает доказательство.

Теорема 4. *В любом пространстве со счетной базой существует последовательность открыто-замкнутых множеств, такая, что любое открыто-замкнутое множество является пределом* (в смысле § 1, V) *некоторой ее подпоследовательности* (см. Серпинский [58], а также де Гроот [1]).

Эта теорема непосредственно вытекает из следующей теоремы теории множеств:

Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — последовательность подмножеств фиксированного пространства $\mathscr{X}$. Пусть $\mathbf{A}$ — семейство всех множеств X данного пространства, таких, что множество X, а также множество $-X$ представляют собой объединение некоторых членов этой последовательности. Тогда существует последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots$, принадлежащих семейству $\mathbf{A}$, такая, что каждое множество $A \in \mathbf{A}$ имеет вид

$$A = \operatorname*{Limes}_{k \to \infty} A_{i_k}.$$

Доказательство. Рассмотрим все множества, состоящие из четного числа положительных целых чисел $(m_0, \ldots, m_k, n_0, \ldots, n_k)$, для которых существует множество $X \in \mathbf{A}$, такое, что

$$(1) \quad G_{m_0} \cup \ldots \cup G_{m_k} \subset X \quad \text{и} \quad G_{n_0} \cup \ldots \cup G_{n_k} \subset -X.$$

Упорядочим такие системы в бесконечную последовательность $s_1, s_2, \ldots$. Пусть $\left(m_0^i, \ldots, m_{k_i}^i, n_0^i, \ldots, n_{k_i}^i\right)$ есть i-й член последовательности $\{s_i\}$; обозначим через A_i произвольное множество $X \subset \boldsymbol{A}$, удовлетворяющее условию (1) (для индекса i).

Пусть $A \in \boldsymbol{A}$. По предположению, существуют две последовательности целых чисел $m_0, m_1, \ldots$ и $n_0, n_1, \ldots$, такие, что

$$A = G_{m_0} \cup G_{m_1} \cup \ldots \quad \text{и} \quad -A = G_{n_0} \cup G_{n_1} \cup \ldots .$$

Положим $s_{i_k} = (m_0, \ldots, m_k, n_0, \ldots, n_k)$. Так как множество A удовлетворяет условию (1) при каждом k, то

$$G_{m_0} \cup \ldots \cup G_{m_k} \subset A_{i_k} \quad \text{и} \quad G_{n_0} \cup \ldots \cup G_{n_k} \subset -A_{i_k},$$

откуда

$$G_{m_0} \cup \ldots \cup G_{m_k} \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \quad \text{и} \quad G_{n_0} \cup \ldots \cup G_{n_k} \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} (-A_{i_{k+j}}).$$

Следовательно,

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \quad \text{и} \quad -A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} (-A_{i_{k+j}}),$$

и окончательно

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \subset A, \quad \text{т. е.} \quad A = \operatorname*{Limes}_{k \to \infty} A_{i_k}.$$

II. Метризация и введение координат.

Теорема 1 (Урысон [2]). *Любое регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство $\mathcal{X}$ со счетной базой гомеоморфно некоторому сепарабельному метрическому пространству.*

Более точно:

$$(0) \qquad \mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{J}^{\aleph_0}.$$

Другими словами, существует последовательность функций $f^n : \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такая, что $f = [f^1, f^2, \ldots]$ есть гомеоморфизм; расстояние между двумя точками пространства $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, т. е. между двумя последовательностями действительных чисел $y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots]$, $z = [z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots]$, определяется формулой (ср. § 21, VI (2))

$$\text{(i)} \qquad |y - z| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| y^{(n)} - z^{(n)} \right|.$$

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства $\mathcal{X}$. Рассмотрим все пары (R_{k_n}, R_{m_n}), такие, что $\overline{R}_{k_n} \subset R_{m_n}$. Согласно следствию 1a из § 14, II, пространство $\mathcal{X}$ нормально, следовательно, в силу леммы Урысона (§ 14, IV), существует непрерывная функция f^n, такая, что

(ii) $0 \leqslant f^n(x) \leqslant 1$, $f^n(x) = 0$ при $x \in R_{k_n}$ и $f^n(x) = 1$ при $x \notin R_{m_n}$.

Так как функции f^n непрерывны, то функция $f=[f^1, f^2, \ldots]$ также непрерывна (§ 16, II, теорема 3).

Для доказательства того, что f — гомеоморфизм, достаточно показать, что (§ 13, VIII(3a)) из условия $p \notin \overline{X}$ следует соотношение $f(p) \notin \overline{f(X)}$, где $X \subset \mathscr{X}$.

Так как $p \in \mathscr{X} - \overline{X}$, то существует индекс m_n, такой, что $p \in R_{m_n} \subset \mathscr{X} - \overline{X}$. В силу теоремы 2 из п. I, существует индекс k_n, такой, что $p \in \overline{R}_{k_n} \subset R_{m_n}$.

Пусть $x \in X$. Отсюда следует, что $x \notin R_{m_n}$ и, согласно (ii), $f^n(x) = 1$. Из формулы (ii) вытекает также, что $f^n(p) = 0$ и, согласно (i), $|f(x) - f(p)| \geqslant \frac{1}{2^n}$.

Следовательно, шар с центром в точке $f(p)$ радиуса $1/2^n$ не пересекается с множеством $f(X)$. Поэтому $f(p) \notin \overline{f(X)}$.

Замечание 1. Как мы видели выше (§ 21, II, теорема 2), обратная теорема также верна: *любое метрическое сепарабельное пространство представляет собой $\mathcal{T}_1$-пространство со счетной базой.*

Среди этих пространств гильбертов куб $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ имеет наивысший топологический ранг, т. е. сам является метрическим сепарабельным пространством и топологически содержит все другие метрические сепарабельные пространства. Более того, любое подмножество пространства $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ является сепарабельным метрическим пространством.

Следовательно, изучение регулярных $\mathcal{T}_1$-пространств со счетной базой равносильно (с топологической точки зрения) изучению подмножеств пространства $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ или подмножеств пространства Фреше $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ (так как пространства $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ и $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, очевидно, имеют один и тот же топологический ранг).

Замечание 2. Интересно сравнить теорему Урысона (и вышеизложенное замечание) со следующей теоремой Банаха и Мазура (см. Банах [8], Урысон [9], Серпинский [62]): *любое сепарабельное метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ всех действительнозначных непрерывных функций, определенных в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.*

Таким образом, топологический ранг пространства $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ также является наивысшим среди сепарабельных метрических пространств. С топологической точки зрения пространство $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ имеет тот недостаток по сравнению с пространством $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, что оно не является компактом, однако с геометрической точки зрения оно имеет то преимущество, что является пространством не только наивысшего топологического, но и наивысшего геометрического ранга среди сепарабельных метрических пространств.

Замечание 3. В случае метрических сепарабельных пространств включение (0) можно доказать непосредственно следующим образом.

В силу § 21, V, можно предположить, что пространство $\mathscr{X}$ имеет диаметр $\leqslant 1$. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — бесконечная последовательность точек, плотная в данном пространстве. Каждой точке $x \in \mathscr{X}$ поставим в соответствие точку $h(x)$ куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ с координатами $|x - p_1|$, $|x - p_2|, \ldots$:

(1) $h(x) = [|x - p_1|, |x - p_2|, \ldots]$, т. е. $h^{(n)}(x) = |x - p_n|$.

Функции $h^{(n)}$ непрерывны (в силу § 21, IV), и поэтому функция h непрерывна (согласно теореме 3 из § 16, II). Мы докажем, что h — гомеоморфизм.

Пусть

$$\lim_{k \to \infty} h(x_k) = h(x). \tag{2}$$

Покажем, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$. Допустим, что это равенство не имеет места. Тогда существуют $\eta > 0$ и последовательность $m_1 < m_2 < \ldots$, такие, что

$$|x_{m_k} - x| > \eta \quad \text{при любом} \quad k. \tag{3}$$

Пусть j — индекс, такой, что

$$|x - p_j| < \eta/3. \tag{4}$$

Из условия (2) следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} h^{(j)}(x_k) = h^{(j)}(x)$, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - p_j| = |x - p_j|.$$

Следовательно, для достаточно больших k

$$|x_{m_k} - p_j| < |x - p_j| + \eta/3,$$

откуда $|x_{m_k} - x| \leqslant |x_{m_k} - p_j| + |x - p_j| < \eta$ в силу неравенства (4).

Таким образом, мы пришли к противоречию с соотношением (3).

Замечание 4. Предположение о регулярности пространства $\mathscr{X}$, сделанное в теореме 1, нельзя заменить более слабым предположением, что пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово. Это видно на примере хаусдорфова нерегулярного (следовательно, неметризуемого) пространства, рассмотренного в замечании 2, § 5, X. Это пространство имеет счетную базу.

Следствие 1а. *Любое сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно вполне ограниченному пространству.*

Это следует из того, что пространство $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ вполне ограничено (ср. § 21, VIII, следствие 5а).

Теорему 1 можно уточнить следующим образом:

Теорема 2. *Гомеоморфизмы образуют плотное множество в пространстве* $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$.

Иными словами: *для каждого непрерывного отображения* $f:\mathcal{X}\to\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *и каждого* $\varepsilon>0$ *существует гомеоморфизм* $h:\mathcal{X}\to\mathcal{J}^{\aleph_0}$, *такой, что* $|h(x)-f(x)|<\varepsilon$ *для любой точки* x.

Следовательно, непрерывное отображение f является пределом равномерно сходящейся последовательности гомеоморфизмов.

Для доказательства достаточно формулу (1) заменить следующей формулой:

$$h(x)=\left[f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x),\ |x-p_1|,\ |x-p_2|,\ \ldots\right],$$

где целое число n выбрано так, что $1/2^n<\varepsilon$.

Следствие 1б. *Любое метрическое сепарабельное пространство является непрерывным взаимно однозначным образом некоторого подмножества канторова дисконтинуума* $\mathcal{C}$ *(а также множества иррациональных чисел).*

Это утверждение следует из теоремы Урысона и следствия 6а, § 16, II, в силу которых пространство $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ является непрерывным образом множества $\mathcal{C}$.

Так как множество $\mathcal{C}$ топологически содержится в множестве $\mathcal{N}$ иррациональных чисел, то доказательство завершено.

III. Сепарабельность пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Теорема[1]. *Пусть $\mathcal{X}$—компактное метрическое пространство, а $\mathcal{Y}$ — сепарабельное метрическое пространство; тогда пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ сепарабельно.*

В самом деле, из включения $\mathcal{Y}\underset{\text{top}}{\subset}\mathcal{J}^{\aleph_0}$ следует (ср. § 21, X, теорема 8), что

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}\underset{\text{top}}{\subset}(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}\subset\left(2^{\mathcal{J}^{\aleph_0}\times\mathcal{X}}\right)_m.$$

Последнее пространство сепарабельно, так как пространство $\mathcal{J}^{\aleph_0}\times\mathcal{X}$ компактно (см. § 21, IX, теорема 2, п. VIII, теоремы 2 и 3).

Замечание 1. Если метрическое пространство $\mathcal{X}$ не компактно, то пространство $\mathcal{J}^{\mathcal{X}}$ (метризованное при помощи формулы (1), § 21, X)

[1]) См. Борсук [1].

не сепарабельно. В самом деле, по предположению, пространство $\mathcal{X}$ содержит счетное (бесконечное) замкнутое дискретное подмножество $F = (p_1, p_2, \ldots)$.

Поставим в соответствие каждой точке $z = [z^1, z^2, \ldots]$ канторова множества $\mathscr{C}$ функцию f_z, определенную на множестве F равенством $f_z(p_i) = \frac{1}{2} z^i$. Так как множество F — дискретное, функция f_z непрерывна: $f_z \in \mathcal{J}^F$. Пусть, в соответствии с теоремой Титце (§ 14, IV), f_z^* есть продолжение функции f_z на все пространство $\mathcal{X}$. Тогда

$$|f_z^* - f_w^*| \geqslant |f_z - f_w| = 1 \quad \text{при} \quad z \neq w.$$

Так как семейство функций f_z, где $z \in \mathscr{C}$, несчетно, то пространство $\mathcal{J}^{\mathcal{X}}$ не сепарабельно.

Замечание 2. Сепарабельность пространства $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$ является прямым следствием теоремы Вейерштрасса, согласно которой каждая непрерывная функция является пределом равномерно сходящейся последовательности полиномов с рациональными коэффициентами. Эта теорема, выраженная в других терминах, означает, что множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в пространстве $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$.

IV. Отождествление замкнутых множеств. Пусть F — замкнутое подмножество метрического сепарабельного пространства $\mathcal{X}$. Отождествляя все точки множества F, получим новое метрическое сепарабельное пространство, удовлетворяющее тем же аксиомам.

Точнее, справедлива

Теорема 1[1]). *Существует непрерывная функция f, преобразующая F в одну точку, не принадлежащую множеству $f(\mathcal{X} - F)$, причем f является гомеоморфизмом на множестве $\mathcal{X} - F$.*

Доказательство. В силу теоремы Урысона, можно допустить, что $\mathcal{X} \subset \mathscr{E}^{\aleph_0}$, т. е. что точками пространства $\mathcal{X}$ являются последовательности действительных чисел $x = [x^1, x^2, x^3, \ldots]$. Положим для краткости $\delta(x) = \rho(x, F)$; через $f(x)$ обозначим точку пространства $\mathscr{E}^{\aleph_0}$, определенную следующим образом:

$$f(x) = [\delta(x), \ x^1 \cdot \delta(x), \ x^2 \cdot \delta(x), \ \ldots].$$

Пусть $x \in F$, тогда $\delta(x) = 0$, поэтому $f(x) = [0, 0, 0, \ldots]$. Обратно, из последнего равенства следует, что $\delta(x) = 0$, откуда $x \in F$.

Так как каждая из координат точки $f(x)$ является непрерывной функцией точки x, функция f непрерывна.

[1]) См. Куратовский [39], Хаусдорф [8], Нитка [1]. Заметим, что $f(\mathcal{X})$ не обязано быть факторпространством.

Покажем, наконец, что f есть гомеоморфизм на множестве $\mathscr{X} - F$. В самом деле, из условия $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ следует, что $\lim_{n\to\infty} \delta(x_n) = \delta(x)$ и $\lim_{n\to\infty} x_n^k \cdot \delta(x_n) = x^k \cdot \delta(x)$ для каждого k. Пусть $x \in \mathscr{X} - F$, тогда $\delta(x) \neq 0$ и, следовательно, $\delta(x_n) \neq 0$ для достаточно больших n. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^k \cdot \delta(x_n)}{\delta(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k \cdot \delta(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} \delta(x_n)} = \frac{x^k \cdot \delta(x)}{\delta(x)} = x^k,$$

поэтому $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Теорему 1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{X}$ — метрическое сепарабельное пространство, и пусть $F_1, \ldots, F_n$ — замкнутые непересекающиеся подмножества. Тогда существует непрерывное отображение f пространства $\mathscr{X}$ на некоторое метрическое сепарабельное пространство, отображающее множества $F_1, \ldots, F_n$ в различные точки $p_1, \ldots, p_n$, ни одна из которых не принадлежит множеству $f[\mathscr{X} - (F_1 \cup \ldots \cup F_n)]$, причем f есть гомеоморфизм на множестве $\mathscr{X} - (F_1 \cup \ldots \cup F_n)$.*

В самом деле, при помощи повторного применения теоремы 1 мы отобразим множества $F_1, F_2, \ldots$ последовательно в точки $p_1, p_2, \ldots$ требуемым образом.

Можно получить также следующее обобщение теорем Урысона и Титце.

Теорема 3. *Пусть $F = \bar{F} \subset \mathscr{X} \subset \mathscr{J}^{\aleph_0}$ и $f \in (\mathscr{J}^{\aleph_0})^F$. Существует непрерывное отображение $g: \mathscr{X} \to \mathscr{J}^{\aleph_0} \times \mathscr{J} \times \mathscr{J}^{\aleph_0}$, совпадающее с f на множестве F и являющееся гомеоморфизмом на множестве $\mathscr{X} - F$.*

В самом деле, пусть $f^* \in (\mathscr{J}^{\aleph_0})^{\mathscr{X}}$ — продолжение функции f (теорема Титце, § 14, IV). Положим[1])

$$g(x) = [f^*(x),\ \rho(x, F),\ x \cdot \rho(x, F)], \quad \text{где} \quad x \in \mathscr{X}.$$

V. Произведение пространств со счетной базой. Множества первой категории. В этом пункте мы будем предполагать, что пространство $\mathscr{Y}$ имеет счетную базу.

Обозначим вертикальное сечение пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ через $\mathscr{Y}^x$:

$$\mathscr{Y}^x = (x) \times \mathscr{Y}.$$

---

[1]) См. Куратовский [39], теорема 1.

Теорема 1[1]). *Пусть $Z \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Если множество Z нигде не плотно, то существует множество $P \subset \mathcal{X}$ первой категории, такое, что для каждой точки $x \in \mathcal{X} - P$ множество $Z \cap \mathcal{Y}^x$ нигде не плотно в пространстве $\mathcal{Y}^x$.*

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — открытая база пространства $\mathcal{Y}$. Положим

(1) $E_n = \underset{x}{\mathsf{E}}\, [(x) \times R_n \subset \overline{Z \cap \mathcal{Y}^x}]$ и $P = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$.

Очевидно, что $E_n \times R_n \subset \bar{Z}$, и поэтому $\bar{E}_n \times \bar{R}_n = \overline{E_n \times R_n} \subset \bar{Z}$.

Отсюда следует, что множества E_n нигде не плотны, ибо в противном случае существовало бы открытое непустое множество $G \subset \bar{E}_n$ и, следовательно, $0 \neq G \times R_n \subset \bar{E}_n \times \bar{R}_n \subset \bar{Z}$, что невозможно, так как множество Z нигде не плотно.

Поэтому P — множество первой категории.

Пусть теперь $x \in \mathcal{X} - P$; предположим, что множество $Z \cap \mathcal{Y}^x$ не является нигде не плотным в пространстве $\mathcal{Y}^x$. Тогда существует n, такое, что $(x) \times R_n \subset \overline{Z \cap \mathcal{Y}^x}$ (последовательность $(x) \times R_n$, $n=1, 2, \ldots$, есть база пространства $\mathcal{Y}^x$). Отсюда следует (согласно формуле (1)) включение $x \in E_n \subset P$, что приводит к противоречию.

Следствие 1а. *Пусть $Z \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Если Z — множество первой категории, то существует множество $P \subset \mathcal{X}$ первой категории, такое, что для любой точки $x \in \mathcal{X} - P$ множество $Z \cap \mathcal{Y}^x$ есть множество первой категории в пространстве $\mathcal{Y}^x$.*

Доказательство. Положим $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots$, где множества Z_n нигде не плотны. Применим предыдущую теорему к каждому из множеств Z_n и обозначим через P_n соответствующее множество первой категории. Тогда $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots$ есть искомое множество.

Следствие 1б. *Произведение $Z = A \times B$ есть множество первой категории в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ тогда и только тогда, когда либо множество A, либо множество B первой категории.*

Доказательство. Пусть Z — множество первой категории. Предположим, что ни множество A, ни множество B не являются множествами первой категории. Пусть P — множество, рассмотренное в следствии 1а, тогда $A \not\subset P$.

Пусть $x \in A - P$. Тогда $Z \cap \mathcal{Y}^x$ — множество первой категории в пространстве $\mathcal{Y}^x$. Так как $Z = A \times B$, имеем $Z \cap \mathcal{Y}^x = (x) \times B$ и,

---

[1]) См. Улам и Куратовский [1].

Предположение о том, что пространство $\mathcal{Y}$ имеет счетную базу, существенно. См. цит. раб., примечание 1 на стр. 248.

следовательно, B — также множество первой категории (в пространстве $\mathscr{Y}$, ср. § 15, VI).

Таким образом, сформулированное условие является необходимым. Достаточность его вытекает из следствия 2а, § 15, VII.

Следствие 1б можно усилить следующим образом:

Следствие 1в[1]. $D(A \times B) = D(A) \times D(B)$.

Доказательство. По определению, $(a, b) \notin D(A \times B)$ означает, что множество $A \times B$ первой категории в точке (a, b); иными словами, существует открытое множество G, содержащее точку (a, b), такое, что множество $G \cap (A \times B)$ первой категории. При этом мы можем допустить, что множество G принадлежит базе пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Таким образом,

$$G = M \times N, \quad a \in M, \quad b \in N, \quad M \text{ и } N \text{ — открытые множества.}$$

Так как $(M \times N) \cap (A \times B) = (M \cap A) \times (N \cap B)$, то

$$[(a, b) \notin D(A \times B)] \equiv$$

$$\equiv \bigvee_{M, N} (a \in M)(b \in N) \text{ } (M, N \text{ открыты}) [(M \cap A) \times (N \cap B) \text{ первой кат.}].$$

Но, согласно следствию 1б,

$$[(M \cap A) \times (N \cap B) \text{ — множество первой категории}] \equiv$$

$$\equiv [\text{либо } M \cap A, \text{ либо } N \cap B \text{ — множество первой категории}].$$

Поэтому

$$[(a, b) \notin D(A \times B)] \equiv [\text{либо } a \notin D(A), \text{ либо } b \notin D(B)] \equiv$$

$$\equiv [(a, b) \notin D(A) \times D(B)].$$

Теорема 2[2]. *Пусть* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *и* $\mathfrak{Z} = \underset{x, y}{E} [y = f(x)]$. *Пусть пространство* $\mathscr{Y}$ *плотно в себе. Если множество* $(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - \mathfrak{Z}$ *первой категории в точке* (x, y), *то либо множество* $\mathscr{X}$ *первой категории в точке* x, *либо множество* $\mathscr{Y}$ *первой категории в точке* y.

Иначе говоря (см. следствие 1в),

$$D(\mathscr{X} \times \mathscr{Y} - \mathfrak{Z}) = D(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}). \tag{2}$$

Доказательство. По условию теоремы, существуют множество G, открытое в пространстве $\mathscr{X}$, и множество H, открытое в пространстве $\mathscr{Y}$, такие, что $x \in G$, $y \in H$ и $(G \times H) - \mathfrak{Z}$ есть множе-

[1]) См. Сикорский [2].
[2]) См. Куратовский [8а] и Улам и Куратовский [1], стр. 250.

ство первой категории. Допустим, что пространство $\mathscr{X}$ не является множеством первой категории в точке x.

Тогда G не является множеством первой категории, и из следствия 1a вытекает существование точки $a \in G$, такой, что множество

$$\mathscr{Y}^a \cap (G \times H) - \mathfrak{Z} = ((a) \times H) - \mathfrak{Z}$$

является множеством первой категории в пространстве $\mathscr{Y}^a$. Далее, это множество отличается от множества $((a) \times H)$ только одной точкой, а именно точкой $((a), f(a))$. Так как это точка накопления множества $\mathscr{Y}^a$ (пространство $\mathscr{Y}$ плотно в себе) и, следовательно, нигде не плотное множество в пространстве $\mathscr{Y}^a$, то множество $((a) \times H)$ является множеством первой категории в пространстве $\mathscr{Y}^a$. Поэтому H — множество первой категории в пространстве $\mathscr{Y}$. Но это означает, что пространство $\mathscr{Y}$ является множеством первой категории в точке y.

***VI. Произведения пространств со счетной базой. Свойство Бэра.** Как и в п. V, предположим, что пространство $\mathscr{Y}$ имеет счетную базу.

Теорема 1[1]). *Пусть $Z \subset \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Если множество Z обладает свойством Бэра, то существует множество $P \subset \mathscr{X}$ первой категории, такое, что множество $Z \cap \mathscr{Y}^x$ обладает свойством Бэра относительно $\mathscr{Y}^x$ для любой точки $x \in \mathscr{X} - P$.*

Доказательство. Так как множество Z обладает свойством Бэра, оно представимо в виде $Z = U \cup V$, где U — множество первой категории, а V — множество типа G_δ (см. § 11, IV, 2). В силу следствия 1a, п. V, существует множество $P \subset \mathscr{X}$ первой категории, такое, что $U \cap \mathscr{Y}^x$ является множеством первой категории в $\mathscr{Y}^x$ для каждой точки $x \in \mathscr{X} - P$. Так как, очевидно, $V \cap \mathscr{Y}^x$ есть G_δ-множество в пространстве $\mathscr{Y}^x$, то из равенства

$$Z \cap \mathscr{Y}^x = (U \cap \mathscr{Y}^x) \cup (V \cap \mathscr{Y}^x)$$

следует, что множество $Z \cap \mathscr{Y}^x$ обладает свойством Бэра относительно $\mathscr{Y}^x$.

Теорема 2. *Произведение $Z = A \times B$ обладает свойством Бэра, не являясь при этом множеством первой категории, тогда и только тогда, когда каждое из множеств A и B обладает свойством Бэра, но не является множеством первой категории.*

Доказательство. Напомним (ср. § 11, IV, 4), что множество A обладает свойством Бэра тогда и только тогда, когда множество $D(A) \cap D(\mathscr{X} - A)$ нигде не плотно; с другой стороны,

[1]) См. Улам и Куратовский [1].

A есть множество первой категории тогда и только тогда, когда $D(A)=0$ (ср. § 10, V (7)), а это в свою очередь эквивалентно тому, что множество $D(A)$ нигде не плотно (ср. § 10, V (11)). Далее, согласно следствию 1в, п. V, имеем

$$\begin{aligned} &D(A\times B)\cap D[(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})-(A\times B)]= \\ &\quad=[D(A)\times D(B)]\cap\{D[(\mathscr{X}-A)\times\mathscr{Y}]\cup D[\mathscr{X}\times(\mathscr{Y}-B)]\}= \\ &\quad=\{[D(A)\times D(B)]\cap[D(\mathscr{X}-A)\times D(\mathscr{Y})]\}\cup \\ &\quad\cup\{[D(A)\times D(B)]\cap[D(\mathscr{X})\times D(\mathscr{Y}-B)]\}= \\ &\quad=\{[D(A)\cap D(\mathscr{X}-A)]\times D(B)\}\cup\{D(A)\times[D(B)\cap D(\mathscr{Y}-B)]\}. \end{aligned}$$

Пусть множество $A\times B$ обладает свойством Бэра; тогда первый член этой формулы, а следовательно, и последний член являются нигде не плотными множествами. Поэтому множество $[D(A)\cap\cap D(\mathscr{X}-A)]\times D(B)$ нигде не плотно.

Из теоремы 2, § 15, VII, следует, что либо множество $D(A)\cap D(\mathscr{X}-A)$, либо множество $D(B)$ нигде не плотны.

Аналогично: либо множество $D(A)$, либо множество $D(B)\cap D(\mathscr{Y}-B)$ нигде не плотно. Предположим теперь, что $A\times B$ не является множеством первой категории; тогда $D(A\times B)\neq 0$, и поэтому $D(A)\neq 0\neq D(B)$, согласно следствию 1в, п. V.

Отсюда следует, в силу § 10, V (11), что ни множество $D(A)$, ни множество $D(B)$ не являются нигде не плотными. Таким образом, множества

$$\text{(i)}\qquad D(A)\cap D(\mathscr{X}-A)\quad\text{и}\quad D(B)\cap D(\mathscr{Y}-B)$$

нигде не плотны и, следовательно, множества A и B обладают свойством Бэра, но ни одно из них не является множеством первой категории.

Таким образом, наше условие является необходимым. Его достаточность следует из того, что множества (i) нигде не плотны, поэтому и множества

$$[D(A)\cap D(\mathscr{X}-A)]\times D(B)\quad\text{и}\quad D(A)\times[D(B)\cap D(\mathscr{Y}-B)]$$

(так же как и их объединение) нигде не плотны, а это означает, что множество $A\times B$ обладает свойством Бэра. Далее, так как ни одно из множеств A и B не является множеством первой категории, то и $A\times B$ не является множеством первой категории (согласно следствию 1б, п. V).

Замечания. Аналогия между свойством Бэра и измеримостью, на которую мы указывали в § 11, касается также только что установленных предложений. А именно, если мы в теоремах этого пункта и в следствиях 1а и 1б п. V заменим множества первой категории множествами меры нуль, а свойство Бэра — измеримостью, мы получим хорошо известные теоремы теории меры [1]).

Теорема 3. *Пусть* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *и* $\mathfrak{J} = \underset{x, y}{\mathsf{E}} [y = f(x)]$; *пусть пространство* $\mathscr{Y}$ *плотно в себе. Если множество* $\mathfrak{J}$ *обладает свойством Бэра, то оно является множеством первой категории.*

Доказательство. Согласно V (2), имеем

$$D(\mathfrak{J}) = D(\mathfrak{J}) \cap D(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = D(\mathfrak{J}) \cap D((\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) - \mathfrak{J}).$$

Последнее множество нигде не плотно, потому что $\mathfrak{J}$ обладает свойством Бэра (ср. § 11, IV, 4).

Далее, множество $D(\mathfrak{J})$ не может быть нигде не плотным, если оно не пусто (согласно § 10, V (11)). Этим завершается доказательство теоремы, так как условие $D(\mathfrak{J}) = 0$ означает, что множество $\mathfrak{J}$ — первой категории (согласно § 10, V (7)).

Замечание. Если не предполагать, что множество $\mathfrak{J}$ обладает свойством Бэра, то оно может и не быть множеством первой категории [2]).

Б. ПРОБЛЕМЫ МОЩНОСТИ

Мы будем рассматривать регулярные $\mathcal{T}_1$-пространства со счетной базой. Поэтому можно считать, что определено расстояние $|x - y|$ между точками пространства. Иначе говоря, можно предполагать, что рассматриваются сепарабельные метрические пространства.

§ 23. Мощность пространства. Точки конденсации

I. Мощность пространства.

Теорема. *Мощность пространства* $\leqslant \mathfrak{c}$.

В самом деле, существует последовательность точек $r_1, r_2, \ldots$, такая, что каждая точка пространства является пределом некоторой подпоследовательности этой последовательности.

Поэтому мощность пространства не превосходит мощности множества всех последовательностей, составленных из элементов счетного множества, т. е. мощности континуума.

II. Плотное подмножество.

Теорема. *Любое подмножество пространства содержит счетное плотное подмножество.*

---

[1]) См. Сакс [8] (теорема Фубини).

[2]) См. Куратовский [8a], стр. 85.

В самом деле, любое подмножество метрического сепарабельного пространства сепарабельно (§ 21, I, теорема 2 и § 22, I, теорема 1).

III. Точки конденсации. Точка p называется *точкой конденсации* множества X, если каждая ее окрестность содержит несчетное множество точек множества X[1]), иначе говоря, если множество X не является локально счетным в точке p (§ 7, IV).

Множество точек конденсации множества X мы будем обозначать через $X^{\odot}$.

Теорема. *Множество $X - X^{\odot}$ счетно.*

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства. Поставим в соответствие каждой точке p множества $X - X^{\odot}$ индекс $n(p)$ так, чтобы множество $X \cap R_{n(p)}$ было счетным. Тогда $X - X^{\odot} \subset \bigcup\limits_p (X \cap R_{n(p)})$, а это объединение, как счетное объединение счетных множеств, счетно (в силу одной теоремы теории множеств, опирающейся на аксиому выбора).

IV. Основные свойства операции $\odot$.

(1) $(X \cup Y)^{\odot} = X^{\odot} \cup Y^{\odot}$;

(2) $X^{\odot} - Y^{\odot} \subset (X - Y)^{\odot}$;

(3) $\left(\bigcap\limits_\iota X_\iota\right)^{\odot} \subset \bigcap\limits_\iota X_\iota^{\odot}$;

(4) $\bigcup\limits_\iota X_\iota^{\odot} \subset \left(\bigcup\limits_\iota X_\iota\right)^{\odot}$;

(5) $(X \subset Y) \Rightarrow (X^{\odot} \subset Y^{\odot})$;

(6) $(X - X^{\odot})^{\odot} = 0$;

(7) $X^{\odot} \subset X^d \subset \overline{X}$;

(8) $X^{\odot} = X^{\odot\odot} = X^{\odot d} = \overline{X^{\odot}} = (X \cap X^{\odot})^{\odot}$;

(9) $X \cap X^{\odot} \subset (X \cap X^{\odot})^d$.

Формулы (1)—(5) вытекают непосредственно из того, что (§ 7, IV) объединение двух счетных множеств счетно и что подмножество счетного множества счетно.

Формула (6) вытекает из п. III (потому что счетное множество не обладает, очевидно, ни одной точкой конденсации). Так как каждая точка конденсации является точкой накопления (§ 9, II), то имеет место формула (7).

[1]) Линделёф [2], Юнг [3].

В силу формулы (3), имеем

$$(X \cap X^{\odot})^{\odot} \subset X^{\odot} \cap X^{\odot\odot} \subset X^{\odot\odot};$$

а так как, кроме того, множество $X^{\odot}$ замкнуто (§ 7, IV), то, согласно формуле (7), имеем

$$X^{\odot\odot} \subset X^{\odot d} \subset \overline{X^{\odot}} = X^{\odot}.$$

Таким образом установлена формула (8), ибо из равенства $X = (X \cap X^{\odot}) \cup (X - X^{\odot})$, в силу формул (1) и (6), следует, что $X^{\odot} = (X \cap X^{\odot})^{\odot}$. Наконец, из формул (8) и (7) вытекает формула (9):

$$X \cap X^{\odot} \subset X^{\odot} = (X \cap X^{\odot})^{\odot} \subset (X \cap X^{\odot})^{d}.$$

V. Разреженные множества.

Теорема. *Любое разреженное пространство счетно.*

Так как, согласно IV (9), множество $\mathscr{X}^{\odot}$ плотно в себе, то из предположения разреженности пространства следует, что $\mathscr{X}^{\odot} = 0$, откуда $\mathscr{X} = \mathscr{X} - \mathscr{X}^{\odot}$; поскольку эта разность, согласно п. III, счетна, теорема доказана.

Сравнивая эти результаты с § 9, VI, 3, мы приходим к теореме Кантора — Бендиксона[1]): *любое пространство есть объединение двух множеств, одно из которых является совершенным, а другое счетным* (*и разреженным*).

VI. Объединения разреженных множеств.

Теорема (Серпинский [14]). *Любое пространство, являющееся объединением монотонного семейства*[2]) *разреженных множеств, счетно.*

Предположим, что $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{\iota} C_{\iota}$, где множества C_{ι} — разреженные (индекс ι пробегает множество произвольной мощности), и что пространство $\mathscr{X}$ несчетно.

В силу предыдущей теоремы, это пространство содержит множество, плотное в себе, которое в свою очередь (согласно II) содержит плотное счетное подмножество $D = [p_1, p_2, \ldots]$. Множество D плотно в себе. Каждой точке p_n поставим в соответствие индекс ι_n, такой, что $p_n \in C_{\iota_n}$, и положим

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\iota_n}.$$

---

1) См. Кантор [5], Бендиксон [1], Линделёф [2].

2) Семейство множеств называется *монотонным*, если, каковы бы ни были множества X и Y, принадлежащие этому семейству, имеет место одно из включений: либо $X \subset Y$, либо $Y \subset X$.

Тогда $D \subset S$. Множество S, как счетное объединение счетных множеств, счетно, поэтому достаточно доказать, что

$$S = \mathscr{X}.$$

Допустим противное, т. е. что $q \in \mathscr{X} - S$. Тогда существует множество C_0, такое, что $q \in C_0$. Отсюда следует, что множество C_0 не содержится ни в каком из множеств C_{ι_n}. Так как семейство множеств C_ι монотонно, то $C_{\iota_n} \subset C_0$, каково бы ни было n.

Следовательно, $S \subset C_0$, откуда $D \subset S \subset C_0$, что невозможно, потому что множество C_0 разреженное, а множество D плотно в себе (и не пусто).

VII. Точки порядка $\mathfrak{m}$. Утверждение п. III, в силу которого любое несчетное пространство содержит точки конденсации (т. е. точки „несчетного порядка"), может быть уточнено следующим образом: *если* $\mathfrak{m} > \aleph_0$ — *мощность пространства* и она не конфинальна с ω (т. е. если она не является суммой счетного множества кардинальных чисел, меньших $\mathfrak{m}$), *то в пространстве существует точка порядка* $\mathfrak{m}$ (т. е. точка, каждая окрестность которой имеет мощность $\mathfrak{m}$). Имеет место следующее утверждение: пространство состоит из разреженного множества и последовательности множеств, таких, что все точки каждого из них имеют один и тот же порядок [1]).

VIII. Понятие эффективности. Это понятие *метаматематической* природы: оно касается метода доказательства теорем существования. Говорят, что теорема существования, т. е. теорема вида $\bigvee_x \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция высказываний (см. § 1, III), доказывается *эффективным* образом, если *определен* объект a и доказано, что a удовлетворяет рассматриваемой теореме, т. е. что $\varphi(a)$ [2]).

В топологии регулярных $\mathcal{T}_1$-пространств со счетной базой *мы будем считать, что база пространства определена* (это оправдывается тем, что в евклидовом пространстве известна определенная база: последовательность шаров, радиусы и координаты центров которых рациональны). С помощью базы пространства можно определить различные объекты (множества, функции и т. д.).

В проблемах мощности задача, вообще говоря, состоит в доказательстве того, что некоторое множество имеет ту или иную

---

[1]) См. Серпинский [7], Кантор [7]. Отметим также недавнюю работу Ефимова [1*].

[2]) Ср. с понятием эффективности у Бореля и Лебега, а также у Ф. Бернштейна [1] (который различает „Existenz" и „Herstellung").

Этой теме посвящены многочисленные исследования Серпинского (см. Серпинский [11]). См. также замечания о эффективности в статье Кнастера и Куратовского [1].

мощность. При этом доказательство *эффективно*, если *определено* требуемое соответствие.

Так, например, данное в п. III доказательство того, что множество $X - X^{\odot}$ счетно, не является эффективным: мы не определили конкретную последовательность, содержащую все точки этого множества; мы лишь доказали, что последовательности такого рода существуют.

Напротив, легко *эффективным* образом установить, что *множество* $X - X^d$ *счетно.*

В самом деле, если $p \in X - X^d$, то существует такой индекс n, что $p = X \cap R_n$ (где R_n — множество, принадлежащее базе пространства). Обозначим через $n(p)$ первый индекс, обладающий этим свойством. Очевидно, что двум различным точкам соответствуют различные индексы. Таким образом, точки множества $X - X^d$ располагаются в последовательность (конечную или бесконечную).

Эффективное доказательство счетности множества $X - X^{\odot}$ дано в § 24.

§ 24. Мощность различных семейств множеств

I. Семейства открытых множеств. Семейства множеств, обладающих свойством Бэра.

Теорема 1. *Семейство всех открытых множеств пространства имеет мощность* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Доказательство. Так как каждое открытое множество является объединением некоторого семейства множеств, принадлежащих базе, то мощность множества всех открытых множеств не превосходит мощности множества всех последовательностей элементов базы данного пространства.

Так как каждое замкнутое множество является дополнением к открытому, *то семейство всех замкнутых множеств также имеет мощность* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Замечание. Соответствие между открытыми множествами и элементами некоторого подмножества линейного континуума можно установить непосредственно следующим образом.

Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства. Допустим, что каждый элемент в этой последовательности повторяется бесконечное число раз. Пусть G — открытое множество, а $k_1, k_2, \ldots$ — последовательность индексов, таких, что $R_{k_n} \subset G$. Положим

$$(1) \qquad t(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}}, \qquad t(0) = 0 \text{ [1]}.$$

[1]) Эту конструкцию предложил Феликс Хаусдорф.

Иначе говоря, двоичное разложение $t(G)$ имеет вид 0, α_1, α_2, ..., где $\alpha_n = 1$ или 0, в зависимости от того, содержится множество R_n в множестве G или нет. Такое разложение всегда содержит бесконечное число единиц (за исключением того случая, когда $G = 0$). Отсюда вытекает, что функция t взаимно однозначна:

(2) *из неравенства* $G \neq H$ *следует неравенство* $t(G) \neq t(H)$.

Легко установить также, что

(3) *из включения* $G \subset H$ *следует неравенство* $t(G) \leqslant t(H)$.

Теорема 2. *Всякое семейство попарно непересекающихся открытых множеств (эффективно) счетно.*

Доказательство. Если G — (непустое) множество рассматриваемого семейства, то существует элемент базы, такой, что $R_n \subset G$. Пусть $n(G)$ — первый индекс такого рода. Так как рассматриваемые открытые множества, по предположению, не пересекаются, то двум различным множествам всегда соответствуют два различных индекса, так что семейство этих множеств оказывается занумерованным в последовательность (конечную или бесконечную).

В частности, на прямой всякое множество попарно непересекающихся *интервалов* счетно.

Из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Всякое семейство попарно непересекающихся множеств $\{X_\iota\}$, обладающих свойством Бэра, ни одно из которых не является множеством первой категории, (эффективным образом) счетно.*

В самом деле, в силу следствия 3, § 11, IV, множества $\operatorname{Int}[D(X_\iota)]$ не пересекаются, а, в силу § 10, V (7), они не пусты.

Замечание. Следует заметить, что теорему 2 можно распространить (за исключением утверждения об эффективности) на *произведения любого числа пространств, каждое из которых сепарабельно*[1]).

Пользуясь обозначениями § 3, XIV, 3, получаем следующую теорему.

Теорема 4[2]). *Пусть R — результат применения $(\mathcal{A})$-операции к множествам $A_{k_1 \dots k_n}$, обладающим свойством Бэра. Тогда существует индекс $\mu < \Omega$, такой, что $R - K_\mu$ есть множество первой категории.*

---

[1]) См. Марчевский [1], [2]. Ср. Бокштейн [1].

[2]) См. Селивановский [2], Серпинский [48], стр. 29, Шпильрайн-Марчевский [4].

Утверждение 4 остается верным (в пространстве действительных чисел), если заменить свойство Бэра измеримостью (в смысле Лебега), а множества первой категории — множествами меры нуль.

Доказательство. Так как $A^{\beta}_{k_1 \ldots k_n} \subset A^{\alpha}_{k_1 \ldots k_n}$ при $\alpha < \beta$, то множества

$$B^{\alpha}_{k_1 \ldots k_n} = A^{\alpha}_{k_1 \ldots k_n} - A^{\alpha+1}_{k_1 \ldots k_n}, \quad \text{где } \alpha < \Omega,$$

попарно не пересекаются (при фиксированных $k_1, \ldots, k_n$).

Согласно теореме 3, каждой системе $r = (k_1, \ldots, k_n)$ соответствует индекс $\gamma_r < \Omega$, такой, что при $\alpha > \gamma_r$ множество $B^{\alpha}_{k_1 \ldots k_n}$ первой категории. Так как множество таких систем r счетно, существует индекс $\mu < \Omega$, такой, что $\mu > \gamma_r$, каково бы ни было r. Следовательно, множество $B^{\mu}_{k_1 \ldots k_n}$ первой категории, какова бы ни была система $k_1 \ldots k_n$. Поэтому объединение $\bigcup B^{\mu}_{k_1 \ldots k_n}$ (которое берется по всем системам $k_1 \ldots k_n$) тоже является множеством первой категории.

В силу включений

$$R - K_{\mu} \subset E_{\mu} - K_{\mu} \subset T_{\mu} = \bigcup B^{\mu}_{k_1 \ldots k_n},$$

множество $R - K_{\mu}$ есть множество первой категории.

Теорема 5. *Если множества $A_{k_1 \ldots k_n}$ обладают свойством Бэра в узком смысле и если Z — множество, содержащее по одной точке из каждой непустой разности $K_{\alpha} - \bigcup\limits_{\xi < \alpha} K_{\xi}$, то Z — множество первой категории на любом совершенном множестве.*

Доказательство. Так как $K_{\alpha} \subset R$, то

$$Z \subset \bigcup_{\alpha < \mu} \Big(K_{\alpha} - \bigcup_{\xi < \alpha} K_{\xi}\Big) \cup (R - K_{\mu}).$$

Отсюда следует, в силу теоремы 4, что Z является объединением счетного множества и множества первой категории. Применяя теорему 4 к произвольному совершенному множеству P, получаем, что множество $Z \cap P$ есть объединение счетного множества и множества первой категории на P. Так как множество P совершенно, то любая его отдельная точка нигде не плотна в P; следовательно, $Z \cap P$ является множеством первой категории на P.

Как будет показано далее, если R — некоторое неборелевское A-множество (в пространстве $\mathscr{E}$ действительных чисел), то множество Z, являющееся множеством первой категории на любом совершенном подмножестве, можно считать *несчетным*; это весьма интересная особенность пространства $\mathscr{E}$.

Добавим, что множество первой категории на любом совершенном множестве можно также получить, извлекая по одной точке из каждой непустой разности $D_{\alpha+1} - D_{\alpha}$, где $D_{\alpha} = -E_{\alpha}$ (по поводу E_{α} см. § 3, XIV) и где предполагается, что $\{A_{k_1 \ldots k_n}\}$ — регулярная система замкнутых множеств [1]).

[1]) См. Лузин и Серпинский [5].

II. Вполне упорядоченные монотонные семейства[1]**.**

Теорема 1. *Любое вполне упорядоченное семейство убывающих открытых множеств (эффективно) счетно.*

Доказательство. Пусть $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_\xi \supset G_{\xi+1} \supset \ldots$ — трансфинитная последовательность различных открытых множеств. Если α не является последним индексом, то существует точка $p_\alpha \in (G_\alpha - G_{\alpha+1})$; следовательно, существует индекс n, такой, что $p_\alpha \in R_n \subset G_\alpha$, причем

(i) $$R_n \subset G_\alpha \quad \text{и} \quad R_n - G_{\alpha+1} \neq 0.$$

Пусть $n(\alpha)$ — наименьший индекс, удовлетворяющий условию (i). Двум различным трансфинитным числам соответствуют два различных индекса, так как из условия $\alpha < \beta$ следует, что $R_{n(\beta)} \subset G_\beta \subset G_{\alpha+1}$, тогда как, согласно (i), включение $R_{n(\alpha)} \subset G_{\alpha+1}$ не имеет места. Таким образом, все индексы α (за исключением, может быть, последнего) занумерованы в счетную последовательность.

Теорема 2. *Любое вполне упорядоченное семейство убывающих замкнутых множеств (эффективным образом) счетно.*

Пусть $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_\xi \supset F_{\xi+1} \supset \ldots$ — такая последовательность. Если α не является последним индексом, то существует точка $p_\alpha \in (F_\alpha - F_{\alpha+1})$; пусть $n(\alpha)$ — наименьший индекс, такой, что

$$R_{n(\alpha)} \cap F_\alpha \neq 0 = R_{n(\alpha)} \cap F_{\alpha+1}.$$

Тогда при $\alpha < \beta$ имеем $F_\beta \subset F_{\alpha+1}$, поэтому из соотношения $R_{n(\beta)} \cap F_\beta \neq 0$ следует соотношение $R_{n(\beta)} \cap F_{\alpha+1} \neq 0$, откуда $n(\alpha) \neq n(\beta)$. Следовательно, множество индексов α (эффективным образом) счетно.

Так как открытые множества являются дополнениями замкнутых, можно сформулировать следующее утверждение, являющееся обобщением двух предыдущих.

Теорема 3. *Любое вполне упорядоченное семейство возрастающих или убывающих множеств, которые все замкнуты или все открыты, (эффективным образом) счетно.*

Замечания. 1. *Любое множество действительных чисел, вполне упорядоченное отношением „меньше", счетно.* В самом деле, трансфинитная последовательность действительных чисел $x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_\xi < x_{\xi+1} < \ldots$ определяет вполне упорядоченное возрастающее семейство замкнутых множеств $\{F_\xi\}$, где F_ξ — полупрямая $x \leqslant x_\xi$.

2. Утверждения 1 и 2 остаются истинными, если вместо полной упорядоченности рассматривать такой порядок, при котором для каждого элемента (за исключением последнего, если он существует)

[1]) См. Бэр [1].

имеется элемент, непосредственно следующий за ним. Таким образом, и утверждение 3 можно обобщить на случай такой упорядоченности.

Другие обобщения будут указаны в следующих пунктах (III, 2 и VII, 1).

III. Разложимые множества. Множество E называется *разложимым* (§ 12, II), если оно представимо в виде

$$E = F_1 - F_2 \cup F_3 - F_4 \cup \ldots \cup F_\xi - F_{\xi+1} \cup \ldots,$$

где элементы F_ξ трансфинитного ряда — убывающие замкнутые множества.

В силу теоремы 2, п. II, это — счетное множество (иначе говоря, все индексы ξ меньше некоторого $\alpha < \Omega$).

Теорема 1. *Разложимые множества являются одновременно множествами типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и $\boldsymbol{G}_\delta$.*

В самом деле, разность двух замкнутых множеств есть множество типа $\boldsymbol{F}_\sigma$, как пересечение замкнутого множества с открытым (которое есть множество типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ в силу § 21, IV). Разложимое множество, как объединение счетного семейства разностей замкнутых множеств, также является множеством типа $\boldsymbol{F}_\sigma$. Кроме того, оно является множеством типа $\boldsymbol{G}_\delta$, так как дополнение к разложимому множеству разложимо (§ 12, VI, 1) и, следовательно, является $\boldsymbol{F}_\sigma$-множеством.

Следствие 1a[1]). *Разреженные множества являются множествами типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и $\boldsymbol{G}_\delta$.*

Действительно, каждое разреженное множество разложимо (§ 12, VI, 4).

Замечания. 1. Разложимые множества являются множествами типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и $\boldsymbol{G}_\delta$ *эффективным образом*: каждому разложимому множеству мы можем поставить в соответствие определенную последовательность замкнутых множеств, объединением которых является данное множество (а также последовательность открытых множеств, пересечением которых является данное множество).

В самом деле, если множество E разложимо, то, в силу § 12, V, 3°,

$$E = \bigcup_{\xi < \alpha} (A_\xi - B_\xi),$$

где множества A_ξ и B_ξ — элементы разложения (§ 12, III, 3° (i)).

Так как последовательность A_ξ, в силу II, 2, эффективным образом счетна, то индексы $\xi < \alpha$ можно занумеровать в последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (которая не обязательно возрастает). С другой сто-

---

[1]) Теорема Юнга [5], стр. 65.

роны, поставим в соответствие (§ 21, IV) каждому замкнутому множеству последовательность открытых множеств, пересечением которых оно является. Тогда

$$B_\xi = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_\xi^k \quad \text{и} \quad E = \bigcup_{n,\ k=1}^{\infty} \left[A_{\xi_n} - G_{\xi_n}^k\right].$$

Так как двойной ряд легко преобразовать в простой, то *определена* простая бесконечная последовательность замкнутых множеств, объединением которых является множество E. Это означает, что E есть множество типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ *эффективно*.

Так как дополнение к разложимому множеству разложимо (§ 12, VI, 1), то любое разложимое множество есть эффективным образом множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$.

2. Теорема, обратная теореме 1, имеет место, как мы увидим в § 37, в полных пространствах, в произвольных же пространствах она, вообще говоря, не верна.

В самом деле, в пространстве рациональных чисел любое множество, одновременно всюду плотное и граничное, является множеством типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и $\boldsymbol{G}_\delta$ (так как пространство счетно), но оно не разложимо, так как его граница не является нигде не плотным множеством (она совпадает со всем пространством (см. § 12, V, 2°)).

3. Теорема 1 имеет место *во всяком метрическом пространстве*, не обязательно сепарабельном (см. § 30, X, теорема 5).

Перейдем теперь к доказательству следующего утверждения, которое представляет собой обобщение теоремы 3 из п. II.

Теорема 2. *Любое вполне упорядоченное семейство разложимых возрастающих (или убывающих) множеств счетно.*

Принимая во внимание, что характеристическая функция разложимого множества точечно-разрывна на любом замкнутом множестве (§ 13, VI), утверждение 2 можно вывести[1]) из следующей более общей теоремы, которую мы сейчас докажем[2]).

Теорема 2'. *Любое вполне упорядоченное семейство вещественнозначных функций*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_\xi(x) \leqslant f_{\xi+1}(x) \leqslant \ldots \qquad (\xi < \Omega),$$

точечно-разрывных на любом замкнутом множестве, счетно.

Для доказательства теоремы необходимо установить существование такого индекса α, что $f_{\alpha+\xi}(x) = f_\alpha(x)$ для любых x и ξ. При фиксированном n пусть $R_{n,1}, R_{n,2}, \ldots, R_{n,i}, \ldots$ — последователь-

---

[1]) Более прямое доказательство можно найти в работе Хаусдорфа [5]. См. также Зальцвассер [1].

[2]) Это доказательство дано Зальцвассером.

ность множеств, принадлежащих базе пространства и таких, что существует порядковое число $\alpha_{n,i}$, удовлетворяющее условию

$$f_{\alpha_{n,i}+\xi}(x) - f_{\alpha_{n,i}}(x) < \frac{1}{n} \text{ при } x \in R_{n,i}, \text{ каково бы ни было } \xi.$$

Положим $R^n = R_{n,1} \cup R_{n,2} \cup \ldots$. Пусть $\alpha_n > \alpha_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$f_{\alpha_n+\xi}(x) - f_{\alpha_n}(x) < \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad x \in R^n.$$

Следовательно, если $\alpha > \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то для $x \in R^1 \cap R^2 \cap \ldots$ имеем

$$f_{\alpha+\xi}(x) - f_\alpha(x) < \frac{1}{n}, \text{ каково бы ни было } n,$$

откуда

$$f_{\alpha+\xi}(x) = f_\alpha(x).$$

Наша теорема будет доказана, как только будет установлено равенство $R^n = \mathscr{X}$ для каждого n.

Допустим противное: существует такое n, что замкнутое множество $F = \mathscr{X} - R^n$ не пусто.

Пусть $[a_1, a_2, \ldots]$ — счетное множество, плотное в F. Тогда существует индекс γ, такой, что

$$\text{(i)} \qquad (\xi \geqslant \gamma) \Rightarrow (f_\xi(a_m) = f_\gamma(a_m)) \text{ при любом } m.$$

Действительно, каждому m соответствует индекс γ_m, такой, что $f_\xi(a_m) = f_{\gamma_m}(a_m)$ при $\xi \geqslant \gamma_m$ (см. замечание 1, п. II); следовательно, достаточно, чтобы γ было больше всех γ_m, где $m = 1, 2, \ldots$. При этом можно еще допустить, что $\gamma > \alpha_n$.

Так как точка a_m расположена вне множества R^n, то в каждой ее окрестности существуют точка x и индекс $\beta_m > \gamma$, такие, что $f_{\beta_m}(x) - f_\gamma(x) \geqslant 1/n$.

Следовательно, существует точка b_m, такая, что

$$|b_m - a_m| < \frac{1}{n}, \quad f_{\beta_m}(b_m) - f_\gamma(b_m) \geqslant \frac{1}{n}.$$

С другой стороны, из неравенства $\gamma > \alpha_n$ следует, что $f_{\alpha_n}(b_m) \leqslant f_\gamma(b_m)$, поэтому $f_{\beta_m}(b_m) - f_{\alpha_n}(b_m) \geqslant 1/n$, откуда $b_m \in F$.

Пусть β — число, большее всех чисел β_m, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\text{(ii)} \qquad f_\beta(b_m) - f_\gamma(b_m) \geqslant \frac{1}{n}, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Так как функция f_β точечно-разрывна на каждом замкнутом множестве, существует точка непрерывности ее сужения $f_\beta | F$. Пусть

$G(\neq 0)$ — множество, открытое в F и такое, что $|f_\beta(x)-f_\beta(x')|<$ $< 1/2n$, где x, $x' \in G$.

Аналогично в множестве G существует точка непрерывности функции $f_\gamma|\overline{G}$. Пусть $H(\neq 0)$ — множество, открытое в F, такое, что

$$|f_\beta(x)-f_\beta(x')|<\frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad |f_\gamma(x)-f_\gamma(x')|<\frac{1}{2n}$$

для x, $x' \in H$.

При подходящем выборе m в эти неравенства можно подставить a_m вместо x и b_m вместо x'. В силу (i), имеем $f_\beta(a_m)=f_\gamma(a_m)$; таким образом,

$$|f_\beta(a_m)-f_\beta(b_m)|<\frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad |f_\beta(a_m)-f_\gamma(b_m)|<\frac{1}{2n},$$

откуда $|f_\beta(b_m)-f_\gamma(b_m)|<1/n$, вопреки (ii).

Следствие 2a. *Всякое вполне упорядоченное семейство возрастающих (убывающих) разреженных множеств счетно*[1]).

Это следует из того, что каждое разреженное множество разложимо (§ 12, VI, 4).

IV. Производные множества порядка α[2]). Производное множество порядка α множества X определяется условиями:

$$X^{(1)}=X^d, \quad X^{(\alpha+1)}=\left(X^{(\alpha)}\right)^d \quad \text{и} \quad X^{(\lambda)}=\bigcap_{\alpha<\lambda}X^{(\alpha)},$$

если λ — предельное число.

Так как производное множество X^d замкнуто и пересечение замкнутых множеств также замкнуто, легко доказать (с помощью трансфинитной индукции), что множество $X^{(\alpha)}$ замкнуто, каково бы ни было α.

Кроме того, так как каждое замкнутое множество содержит свое производное множество, семейство производных множеств является убывающим:

$$X^{(1)}\supset X^{(2)}\supset \ldots \supset X^{(\alpha)}\supset \ldots .$$

Следовательно (согласно II, 2), *семейство производных множеств множества X* счетно; иначе говоря, существует порядковое число $\beta<\Omega$, такое, что $X^{(\beta)}=X^{(\beta+1)}= \ldots$.

Так как множество $X^{(\beta)}$ совпадает со своим производным множеством, оно *совершенно*.

---

[1]) В работе Куратовского [5] имеется прямое доказательство этого утверждения. Впрочем, эффективное доказательство вытекает из теоремы Серпинского (§ 23, VI) (см. цитированную работу Серпинского).

[2]) См. Кантор [4].

В частности, положим $X = \mathscr{X}$ и $\mathscr{X}^{(0)} = \mathscr{X}$. Тогда (§ 12, I)

$$\mathscr{X} = \bigcup_{\alpha<\beta} \left(\mathscr{X}^{(\alpha)} - \mathscr{X}^{(\alpha+1)}\right) \cup \mathscr{X}^{(\beta)}. \tag{i}$$

Поскольку каждое из множеств $\mathscr{X}^{(\alpha)} - \mathscr{X}^{(\alpha+1)}$, как состоящее из изолированных точек (§ 23, VIII), счетно, то счетное объединение $\bigcup_{\alpha<\beta} \left(\mathscr{X}^{(\alpha)} - \mathscr{X}^{(\alpha+1)}\right)$ тоже является счетным множеством.

Замечание. В формуле (i) содержится теорема Кантора — Бендиксона (§ 23, V): *отнимая от пространства некоторое счетное множество, мы получаем совершенное множество.*

Именно таким способом впервые была доказана эта теорема.

Преимущество этого рассуждения перед рассуждением, изложенным в предыдущем параграфе, заключается в том, что оно не пользуется аксиомой выбора и дает возможность *эффективно* занумеровать элементы каждого разреженного множества, так как последовательность производных множеств и множество $X - X^d$ эффективным образом счетны (§ 23, VIII). (См. Серпинский [4].)

V. Логический анализ[1]. В $\mathscr{L}$-пространствах изучались соотношения между следующими предложениями:

(1) *любое вполне упорядоченное бесконечное семейство возрастающих замкнутых множеств счетно*;

(2) *любое вполне упорядоченное бесконечное семейство убывающих замкнутых множеств счетно*;

(3) *любое множество содержит плотное счетное подмножество*;

(4) *любое разреженное множество счетно*;

(5) *любое несчетное множество содержит точку конденсации.*

Можно доказать, что предложения (4) и (5) эквивалентны, из предложения (4) следует предложение (2), а из (3) предложение (1). Обратные импликации имеют место в тех $\mathscr{L}$-пространствах, в которых замыкание всегда является замкнутым множеством, но они могут быть неверны в более общих $\mathscr{L}$-пространствах.

VI. Семейства непрерывных функций. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение. Если пространство $\mathscr{X}$ сепарабельно, то существует такая последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, что каждая точка p пространства $\mathscr{X}$ является пределом некоторой подпоследовательности этой последовательности: $p = \lim x_{k_n}$. Поэтому, так как функция f непрерывна, ее значения определяются значениями в точках x_n, ибо $f(p) = \lim f(x_{k_n})$.

---

[1]) См. Серпинский [10], Куратовский [5]. См. также (случай метрических пространств) Гросс [1].

Иначе говоря, если $f(x_n)=g(x_n)$ для каждого n, то функции f и g совпадают. Отсюда вытекает, что мощность множества $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ всех непрерывных функций, отображающих пространство $\mathscr{X}$ в подмножества пространства $\mathscr{Y}$, не может превосходить мощности множества (счетных) подмножеств пространства $\mathscr{Y}$, т. е. мощности $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$, которая равна $\mathfrak{c}$. *Следовательно, рассматриваемое множество имеет мощность* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Таким образом, множество подмножеств пространства $\mathscr{Y}$, являющихся непрерывными образами фиксированного подмножества пространства $\mathscr{X}$, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$.

Отсюда следует, что в пространстве, имеющем мощность континуума, существует столько же *топологических типов* (§ 13, VIII), сколько типов подмножеств, а именно $2^{\mathfrak{c}}$.

VII. Структура монотонных семейств замкнутых множеств [1]. В метрическом сепарабельном пространстве $\mathscr{X}$ рассмотрим *монотонное* семейство $\boldsymbol{F}$ замкнутых множеств, т. е. такое семейство, что для каждой пары его элементов A, B либо $A\subset B$, либо $B\subset A$.

Мы будем рассматривать семейство $\boldsymbol{F}$ как упорядоченное: множество A предшествует множеству B, если $A\subset B$ и $A\neq B$.

Очевидно, что семейство $\boldsymbol{G}$ дополнений к множествам — элементам семейства $\boldsymbol{F}$ есть монотонное семейство открытых множеств. Функция t, рассмотренная в I (1), устанавливает, в силу (2) и (3), подобие между семейством $\boldsymbol{G}$ и некоторым подмножеством интервала $\mathscr{J}$. Другими словами, справедлива

Теорема 1. *Семейство $\boldsymbol{F}$ подобно некоторому подмножеству интервала $\mathscr{J}$.*

Иначе говоря, *каждый элемент A семейства $\boldsymbol{F}$ можно снабдить таким индексом y, что $0\leqslant y\leqslant 1$ и неравенство $y_1<y_2$ эквивалентно соотношению*

$$A_{y_1}\subset A_{y_2},\quad A_{y_1}\neq A_{y_2}.$$

Докажем более точное утверждение.

Теорема 2. *Пусть J — множество индексов y, которыми нумеруются множества A_y. Это множество можно выбрать так, чтобы выполнялось следующее условие: концы интервалов, смежных с множеством $\overline{J}$, принадлежат J; если семейство $\boldsymbol{F}$ содержит первый или последний элемент, то эти элементы снабжены индексами* 0 *и* 1.

Отсюда следует, что *если семейство $\boldsymbol{F}$ не имеет пустых интервалов и содержит первый и последний элементы, то*

[1] По поводу п. VII—X см. Куратовский [38]. Приложения можно найти во втором томе.

множество J замкнуто. Если, кроме того, семейство $\boldsymbol{F}$ не имеет скачков, то множество J совпадает со всем интервалом $\mathcal{J}$.

Теорема 2 является прямым следствием следующей теоремы общей теории упорядоченных множеств.

Пусть F — линейно упорядоченное множество, имеющее плотное счетное подмножество D; тогда существует отображение $\varphi\colon F \to \mathcal{J}$, сохраняющее порядок элементов; множество $J = \varphi(F)$ может быть подчинено дополнительному условию, сформулированному в теореме 2.

Отображение φ можно построить следующим образом[1]).

Пусть d_0, d_1, ... — последовательность, составленная из всех элементов множества D и всех тех элементов множества F, которые имеют соседний элемент. Очевидно, можно допустить, что множество F содержит первый элемент d_0 и последний элемент d_1.

Положим

$$\varphi(d_0) = 0, \ \varphi(d_1) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi(d_n) = \frac{1}{2}[\varphi(d_k) + \varphi(d_l)],$$

где (при $n > 1$) d_k, d_l — пара соседних элементов в системе $d_0, \ldots$ $\ldots, d_{n-1}$, таких, что $d_k \leqslant d_n \leqslant d_l$.

Наконец, при $a \in F - D$ положим $\varphi(a)$ равным нижней грани чисел $\varphi(d_n)$, где $a \leqslant d_n$.

Определенное таким образом отображение φ устанавливает требуемое соответствие.

В самом деле, можно доказать по индукции для каждого n, что если d_j и d_q — два соседних элемента в системе $d_0, \ldots, d_{n-1}$, то существует такое s, что

$$|\varphi(d_j) - \varphi(d_q)| = \frac{1}{2^s}.$$

Отсюда заключаем, что если $\varphi(d_n) = i/2^m$, где i нечетно, то

$$\varphi(d_k) = \frac{i-1}{2^m} \quad \text{и} \quad \varphi(d_l) = \frac{i+1}{2^m},$$

где k и l имеют тот же смысл, что и выше.

Пусть (u, v) — интервал, смежный с множеством $\bar{J}$.

Обозначим через m наибольшее целое число, такое, что в последовательности $\varphi(d_0)$, $\varphi(d_1)$, ... существуют два числа вида $i/2^m$ и $(i+1)/2^m$, удовлетворяющие условию

$$\frac{i}{2^m} \leqslant u < v \leqslant \frac{i+1}{2^m}.$$

Одно из двух чисел i или $i+1$ нечетно; пусть это будет i; обозначим через n такой индекс, что $\varphi(d_n) = i/2^m$. Тогда существует

[1]) См. Куратовский [3], стр. 215.

такой индекс $l < n$, что $\varphi(d_l) = (i+1)/2^m$, а в системе $d_0, \ldots, d_n$ элементы d_n и d_l являются соседними. Отсюда следует, что

$$\frac{l}{2^m} = u \quad \text{и} \quad \frac{i+1}{2^m} = v.$$

В самом деле, если это не так, то существует элемент d_s, такой, что $d_n \leqslant d_s \leqslant d_l$; пусть s — наименьший из таких индексов, тогда $\varphi(d_s) = (2i+1)/2^{m+1}$.

Согласно определению числа m, имеем $u < (2i+1)/2^{m+1} < v$, но это противоречит предположению, что (u, v) — смежный интервал.

Теорема 3. *Для любого индекса y, за исключением, быть может, счетного множества индексов, имеем* (см. Серпинский [12])

$$A_y = \overline{\bigcup_{u<y} A_u}; \tag{1}$$

$$A_y = \bigcap_{z>y} A_z. \tag{2}$$

В самом деле, пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства $\mathscr{X}$. Каждому $y \in J$, не удовлетворяющему равенству (1), поставим в соответствие целое число $n(y)$, такое, что

$$A_y \cap R_{n(y)} \neq 0 \quad \text{и} \quad R_{n(y)} \cap \Big(\bigcup_{u<y} A_u\Big) = 0.$$

Если $y \neq y'$, то $n(y) \neq n(y')$. Следовательно, множество индексов y, не удовлетворяющих равенству (1), счетно.

Случай равенства (2) аналогичен.

Теорема 4. *Для любого y, за исключением, быть может, счетного множества, имеем*

$$\operatorname{Int}(A_y) = \bigcup_{u<y} \operatorname{Int}(A_u). \tag{3}$$

В самом деле, так как семейство множеств $B_y = \overline{\mathscr{X} - A_y}$ монотонно, то множество тех B_y, для которых

$$B_y \neq \bigcap_{u<y} B_u, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{Int}(A_y) \neq \bigcup_{u<y} \operatorname{Int}(A_u),$$

счетно, в силу теоремы 3. Теперь достаточно доказать, что если $y' < y$ и $B_{y'} = B_y$, то $B_y = \bigcap_{u<y} B_u$.

Но это равенство следует из двойного включения

$$B_y \subset \bigcap_{u<y} B_u \subset B_{y'}.$$

VIII. Строго монотонные семейства. Мы говорим, что семейство замкнутых множеств *строго монотонно*, если для каждой пары A, B ($A \neq B$) его элементов либо $A \subset \operatorname{Int}(B)$, либо $B \subset \operatorname{Int}(A)$. Если элементы данного семейства занумерованы некоторым множеством индексов (в соответствии с теоремами 1 и 2, п. VII), то строгая монотонность означает, что *из неравенства* $y_1 < y_2$ *следует включение* $A_{y_1} \subset \operatorname{Int}(A_{y_2})$.

Теорема. *Если* $\boldsymbol{F}$ — *строго монотонное семейство замкнутых множеств, то для любого* y, *за исключением, быть может, счетного множества, имеют место соотношения*

$$A_y = \bigcap_{z > y} A_z = \bigcap_{z > y} \operatorname{Int}(A_z); \tag{4}$$

$$A_y = \overline{\bigcup_{u < y} A_u} = \overline{\operatorname{Int}(A_y)}; \tag{5}$$

$$\operatorname{Int}(A_y) = \bigcup_{u < y} \operatorname{Int}(A_u) = \bigcup_{u < y} A_u; \tag{6}$$

$$\overline{\mathscr{X} - A_y} = \bigcap_{u < y} \overline{\mathscr{X} - A_u} = \bigcap_{u < y} (\mathscr{X} - A_u). \tag{7}$$

Формула (4) вытекает из формулы (2), в силу включения $A_y \subset \operatorname{Int}(A_z) \subset A_z$. Формула (5) является следствием формулы (1); она означает, что A_y является *замкнутой областью*. Формулы (6) и (7), эквивалентные между собой, вытекают из формулы (3), в силу включения $\operatorname{Int}(A_u) \subset A_u \subset \operatorname{Int}(A_y)$.

Комбинируя формулы (4) и (7), мы получим формулы для *границы* множества A_y. Мы имеем

$$\operatorname{Fr}(A_y) = \bigcap_{z > y} \operatorname{Int}(A_z) - \bigcup_{u < y} A_u, \tag{8}$$

и, кроме того (см. (2) и (7)), существуют две последовательности индексов $\{u_n\}$ и $\{z_n\}$, такие, что

$$u_1 < u_2 < \ldots < y < \ldots < z_2 < z_1$$

и

$$\operatorname{Fr}(A_y) = \bigcap_n \left[\operatorname{Int}(A_{z_n}) - A_{u_n}\right] = \bigcap_n \left(A_{z_n} \cap \overline{\mathscr{X} - A_{u_n}}\right). \tag{9}$$

IX. Связь строго монотонных семейств с непрерывными функциями.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathscr{I}^{\mathscr{X}}$; *тогда семейство* $\boldsymbol{F}$ *множеств*

$$f^{-1}([0,\ y]) = \mathop{\mathrm{E}}_x [0 \leqslant f(x) \leqslant y], \quad \text{где } y \in \mathscr{Y} = f(\mathscr{X}),$$

строго монотонно, и для каждого элемента y, *не имеющего непосредственно следующего за ним элемента, множество*

$f^{-1}([0, y])$ *является пересечением всех тех элементов, которые за ним следуют, т. е.*

$$f^{-1}([0, y]) = \bigcap_{z > y} f^{-1}([0, z]),$$

где область изменения переменной z есть множество $\mathcal{Y}$.

В самом деле, пусть $y_1 < y_2$ — два элемента пространства $\mathcal{Y}$. Из очевидного включения $[0, y_1] \subset [0, y_2] - y_2 = \operatorname{Int}([0, y_2])$ следует, что

$$f^{-1}([0, y_1]) \subset f^{-1}(\operatorname{Int}[0, y_2]) \subset \operatorname{Int}\left[f^{-1}([0, y_2])\right],$$

так как включение $f^{-1}[\operatorname{Int}(B)] \subset \operatorname{Int}\left[f^{-1}(B)\right]$ выполняется для каждой непрерывной функции f.

Следовательно, семейство $\boldsymbol{F}$ строго монотонно.

Допустим, что y не является последним элементом в $\mathcal{Y}$ и что среди элементов $z > y$ не существует наименьшего в $\mathcal{Y}$.

Тогда $\mathcal{Y} \cap [0, y] = \bigcap_{z > y} (\mathcal{Y} \cap [0, z])$, откуда $f^{-1}([0, y]) = f^{-1}\left[\bigcap_{z > y} (\mathcal{Y} \cap [0, z])\right] = \bigcap_{z > y} f^{-1}([0, z])$.

Принимая во внимание (1) и (7), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *За исключением, быть может, счетного множества элементов y множества $f(\mathcal{X})$, имеем*

$$f^{-1}([0, y]) = \overline{f^{-1}([0, y] - y)}; \quad f^{-1}([y, 1]) = \overline{f^{-1}([y, 1] - y)},$$

$$f^{-1}(y) = \overline{f^{-1}([0, y] - y)} \cap \overline{f^{-1}([y, 1] - y)}.$$

Последнее равенство является следствием двух предыдущих:

$$f^{-1}(y) = f^{-1}([0, y] \cap [y, 1]) = f^{-1}([0, y]) \cap f^{-1}([y, 1]).$$

Теореме 1 соответствует следующая обратная

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — строго монотонное семейство замкнутых множеств, занумерованных в соответствии с теоремами* 1 *и* 2 *из* п. VII *некоторым множеством индексов* (где $A_1 = \mathcal{X}$); *тогда существует функция $f \in \mathcal{J}^{\mathcal{X}}$, такая, что для каждого индекса $y < 1$ имеем*

$$(10) \qquad A_y = f^{-1}([0, y]) \quad \text{или} \quad \bigcap_{z > y} A_z = f^{-1}([0, y]),$$

в соответствии с тем, допускает множество A_y элемент, который непосредственно следует за ним в семействе $\boldsymbol{F}$, или нет.

Функцию f можно определить следующим образом. Пусть (A_{r_1}, A_{s_1}), (A_{r_2}, A_{s_2}), ... — последовательность скачков. Положим

$$\mathscr{X}^* = \mathscr{X} - \bigcup_n \left[\operatorname{Int}(A_{s_n}) - A_{r_n}\right]$$

и определим функцию f следующим образом:

1° для $x \in \mathscr{X}^*$

$$f(x) = \inf_{x \in A_y} y;$$

2° для $x \in \operatorname{Int}(A_{s_n}) - A_{r_n}$

$$f(x) = r_n + (s_n - r_n) \cdot \frac{\rho(x, A_{r_n})}{\rho(x, A_{r_n}) + \rho[x, \mathscr{X} - \operatorname{Int}(A_{s_n})]} \text{ [1]}.$$

Докажем сначала, что функция f непрерывна на множестве $\mathscr{X}^*$. С этой целью отметим очевидную двойную импликацию

$$(11) \qquad [f(x) < y] \Rightarrow [x \in A_y] \Rightarrow [f(x) \leqslant y],$$

истинную для каждого y, принадлежащего множеству индексов J.

Итак, пусть $\lim x_n = x$, $x_n \in \mathscr{X}^*$, $f(x) = q$ и $\lim f(x_n) = q'$. Покажем, что $q = q'$.

Для доказательства неравенства $q' \geqslant q$ рассмотрим два случая в зависимости от того, является или нет q правым концом интервала, смежного с множеством $\bar{J}$. В первом случае, в силу VII, 2, имеем $q \in J$. Пусть r — левый конец рассматриваемого смежного интервала ($r \in J$). Так как точка x не принадлежит множеству A_r, то точка x_n также не принадлежит этому множеству при достаточно большом n; отсюда $f(x_n) \geqslant q$ и, следовательно, $q' \geqslant q$.

Рассмотрим случай, когда точка q не является правым концом смежного интервала; пусть $y_1 < y_2 < \ldots$, $\lim y_n = q$ и $y_n \in J$. Ни при каком фиксированном n точка x не принадлежит A_{y_n}, поэтому $x_k \notin A_{y_n}$ для достаточно больших k, откуда $f(x_k) \geqslant y_n$. Следовательно, $q' \geqslant q$.

Доказательство неравенства $q' \leqslant q$ аналогично. Пусть точка q — левый конец интервала смежности (q, s), тогда для достаточно больших n мы имеем $x_n \in A_q$, ибо из соотношений $x_n \in \mathscr{X}^*$ и $x_n \notin A_q$ следует, что $x_n \notin \operatorname{Int}(A_s)$, тогда как $x \in A_q \subset \operatorname{Int}(A_s)$. Отсюда $f(x_n) \leqslant q$ и $q' \leqslant q$.

В противном случае пусть $y_1 > y_2 > \ldots$, $\lim y_n = q$ и $y_n \in J$. Для любого фиксированного n мы имеем $x \in A_{y_{n+1}} \subset \operatorname{Int}(A_{y_n})$. Следовательно, $x_k \in A_{y_n}$ для достаточно больших k, откуда $f(x_k) \leqslant y_n$ и $q' \leqslant q$.

---

[1] Эта формула осуществляет *интерполяцию* функции f, определенной условием 1°: $f(x) \leqslant r_n$ при $x \in A_{r_n}$, $r_n < f(x) < s_n$ при $x \in \operatorname{Int}(A_{s_n}) - A_{r_n}$ и $f(x) \geqslant s_n$ при $x \in \mathscr{X} - \operatorname{Int}(A_{s_n})$.

Если $E = 0$, то положим $\rho(x, E) = 1$.

Итак, непрерывность функции f на множестве $\mathscr{X}^*$ доказана. Покажем, что если $\{x_n\}$ — последовательность элементов множества $A_{s_{m_n}} - A_{r_{m_n}}$, сходящаяся в точке x, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Мы вправе допустить, что $r_{m_1} < r_{m_2} < \ldots$; полагая $q' = \lim r_{m_n}$, получаем $q' = \lim f(x_n)$, поскольку $r_{m_n} \leqslant f(x_n) \leqslant s_{m_n} \leqslant r_{m_{n+1}}$.

Очевидно, что точка x не принадлежит никакому из множеств $A_{r_{m_n}}$, поэтому $f(x) \geqslant q'$. С другой стороны, если $q' \leqslant y \in J$, то $x \in \overline{\bigcup_n A_{s_{m_n}}} \subset A_y$, ибо $s_{m_n} \leqslant q'$; следовательно, $f(x) \leqslant y$, и поэтому $f(x) \leqslant q'$.

Наконец, чтобы установить формулу (10), заметим, что, в силу (11),

(12) $A_y \subset f^{-1}([0,\ y])$ и $f^{-1}([0,\ y]) \subset A_z$ для $y < z \in J$.

Итак, в случае, когда точка y является левым концом смежного интервала, включение $f^{-1}([0,\ y]) \subset A_y$ следует непосредственно из 1° и 2°. В противном случае положим $y = \lim z_n$, $z_1 > z_2 > \ldots$. Тогда, согласно (12),

$$\bigcap_{z>y} A_z = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{z_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([0,\ z_n]) \subset \bigcap_{n=2}^{\infty} A_{z_{n-1}} = \bigcap_{z>y} A_z,$$

и так как $[0,\ y] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0,\ z_n]$, то $f^{-1}([0,\ y]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([0,\ z_n]) = \bigcap_{z>y} A_z$.

Следствия из теоремы 3.

(13) $\quad f^{-1}([0,\ y] - y) \subset \operatorname{Int}(A_y) \subset A_y \subset f^{-1}([0,\ y])$;

(14) $\operatorname{Fr}(A_y) \subset f^{-1}(y) \subset \bigcap_{z>y} A_z - \bigcup_{u<y} A_u \subset \bigcap_{z>y} A_z - \bigcup_{u<y} \operatorname{Int}(A_u)$;

(15) *если элемент y не имеет непосредственно предшествующего ему элемента, то*

$$f^{-1}([0,\ y] - y) = \bigcup_{u<y} \operatorname{Int}(A_u), \text{ т. е. } f^{-1}([y,\ 1]) = \bigcap_{u<y} \overline{\mathscr{X} - A_u};$$

(16) *если y не имеет соседнего элемента и $0 < y < 1$, то*

$$f^{-1}(y) = \Big(\bigcap_{u<y} \overline{\mathscr{X} - A_u}\Big) \cap \Big(\bigcap_{z>y} A_z\Big);$$

(17) *за исключением, быть может, счетного множества индексов y, имеем*

$$A_y = f^{-1}([0,\ y]), \quad \operatorname{Int}(A_y) = f^{-1}([0,\ y] - y),$$
$$\mathscr{X} - A_y = f^{-1}([y,\ 1] - y),$$
$$\operatorname{Fr}(A_y) = f^{-1}(y);$$

(18) *если* $\bigcup_{y<1} A_y = A_0 \cup \left[\bigcup_{0<y<1} \operatorname{Fr}(A_y)\right]$,

то $\operatorname{Fr}(A_y) = f^{-1}(y)$ *при* $0 \neq y \neq 1$.

Для доказательства соотношения (13) положим $u = f(x) < y$, откуда $x \in f^{-1}([0, u])$. Если y имеет предшествующий соседний элемент, то $f^{-1}([0, u]) \subset \operatorname{Int}(A_y)$. Если $u < v < y$ и $v \in J$, то $f^{-1}([0, u]) \subset A_v \subset \operatorname{Int}(A_y)$. Следовательно, $f^{-1}([0, y] - y) \subset \operatorname{Int}(A_y)$. Оставшаяся часть соотношения (13) очевидна.

Формула (14) следует из (13) и (10):

$$\operatorname{Fr}(A_y) = A_y - \operatorname{Int}(A_y) \subset f^{-1}([0, y]) - f^{-1}([0, y] - y) = \\ = f^{-1}(y) \subset f^{-1}([0, y]) \subset A_z$$

и $A_u \subset f^{-1}([0, u])$, откуда $A_u \cap f^{-1}(y) = 0$. Для доказательства формулы (15) положим $f(x) < u < y$; тогда $x \in f^{-1}([0, u] - u)$ и, в силу формулы (13), $x \in \operatorname{Int}(A_u)$, следовательно,

$$f^{-1}([0, y] - y) \subset \bigcup_{u<y} \operatorname{Int}(A_u).$$

Обратное включение вытекает из формулы (13).

Формула (16) следует из (15) и (10).

В силу формул (4), (6), (10) и (15), для всех индексов y, за исключением, быть может, счетного множества, имеем

$$A_y = \bigcap_{z>y} A_z = f^{-1}([0, y]) \quad \text{и} \quad \operatorname{Int}(A_y) = \bigcup_{u<y} \operatorname{Int}(A_u) = f^{-1}([0, y] - y),$$

откуда следует формула (17).

Наконец, формула (18) следует из формулы (14).

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 3а. *Пусть* F — *строго монотонное семейство замкнутых подмножеств пространства* $\mathscr{X}$. *Пусть каждый элемент этого семейства, не имеющий непосредственно следующего за ним элемента, является пересечением всех элементов, которые за ним следуют.*

Тогда существуют действительная непрерывная функция f, *определенная на* $\mathscr{X}$, *и множество* $J \subset \mathscr{J}$, *такие, что семейство* F *совпадает с семейством множеств* $f^{-1}([0, y])$, *где* $y \in J$.

X. Строго монотонные семейства замкнутого порядкового типа. Пусть F — строго монотонное семейство замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$ ($\mathscr{X} \neq 0$), *не содержащее лакун и содержащее в качестве элементов пустое множество и все пространство* $\mathscr{X}$. Эти предположения означают, что

$$J = \bar{J}, \qquad 0 \in J, \qquad 1 \in J.$$

В случае, когда множество J несчетно, обозначим через P его совершенное ядро (множество $J - P$ счетно; см. § 23, V) и через P^* — множество, которое получается из P, если выбросить концы его смежных интервалов.

Пусть φ — неубывающая непрерывная функция на множестве $\mathcal{J}$, такая, что $\varphi(P) = \mathcal{J}$ и φ возрастает на множестве P^* [1]).

Пусть $\gamma(t)$ и $\Gamma(t)$ — соответственно первый и последний элемент y, такой, что $\varphi(y) = t$. Пусть $g(x) = \varphi f(x)$, где f — функция, рассмотренная в теореме 3 из п. IX.

В случае, когда $\overline{\overline{J}} \leqslant \aleph_0$, мы положим $\varphi(x) = 0$ для $x \in \mathcal{J}$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$. Следовательно, $g(x) = 0$. Это приводит к следующей теореме.

Теорема 1. *Множество* $J \cap \varphi^{-1}(t) = \underset{y}{\mathsf{E}} (y \in J) [\gamma(t) \leqslant y \leqslant \Gamma(t)]$ *счетно.*

Если $\gamma(t) \neq \Gamma(t)$ *и* $P \neq 0$, *то* $\gamma(t)$ *и* $\Gamma(t)$ *являются концами одного и того же интервала смежности для множества* P. *Если* $\gamma(t) = \Gamma(t)$, *то* $\gamma(t)$ *есть точка множества* P^*. *Следовательно,* $\gamma(t)$ *не имеет в множестве* J *непосредственно предшествующего ей элемента, а* $\Gamma(t)$ *не имеет непосредственно следующего за ней элемента.*

Теорема 2. $g^{-1}(t) = \left(\bigcap_{\Gamma(t) < z} A_z\right) \cup \left(\bigcap_{u < \gamma(t)} \overline{\mathcal{X} - A_u}\right)$.

В самом деле, в силу формул (10) и (15),

$$\bigcap_{\Gamma(t) < z} A_z = f^{-1}[0, \Gamma(t)] = \underset{x}{\mathsf{E}} [0 \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(t)],$$

$$\bigcap_{u < \gamma(t)} \overline{\mathcal{X} - A_u} = f^{-1}[\gamma(t), 1] = \underset{x}{\mathsf{E}} [\gamma(t) \leqslant f(x) \leqslant 1].$$

С другой стороны,

$$\underset{x}{\mathsf{E}} [0 \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(t)] \cap \underset{x}{\mathsf{E}} [\gamma(t) \leqslant f(x) \leqslant 1] = \underset{x}{\mathsf{E}} [\gamma(t) \leqslant f(x) \leqslant \Gamma(t)] =$$

$$= \underset{x}{\mathsf{E}} \left[f(x) \in \varphi^{-1}(t)\right] = f^{-1}\varphi^{-1}(t) = g^{-1}(t),$$

поскольку $\varphi^{-1}(t) = \underset{y}{\mathsf{E}} [\gamma(t) \leqslant y \leqslant \Gamma(t)]$, в силу определения γ и Γ.

Теорема 3. *За исключением, быть может, счетного множества значений* t, *имеем*

1° $g^{-1}([0, t]) \subset \boldsymbol{F}$,

2° $g^{-1}(t) = f^{-1}(y)$, *где* $t = \varphi(y)$.

---

[1]) Определение такой функции φ не представляет трудностей. См., например, § 16, II, следствие 6а (определение функции f).

В самом деле, за исключением счетного множества значений t, каждое t имеет вид $t = \varphi(y)$, где $y \in P^*$. Поэтому

$$g^{-1}([0, t]) = \underset{x}{\mathsf{E}}[0 \leqslant \varphi f(x) \leqslant t] = \underset{x}{\mathsf{E}}[0 \leqslant f(x) \leqslant y] = f^{-1}([0, y]),$$

так как условия $y' \leqslant y$ и $\varphi(y') \leqslant \varphi(y) = t$ эквивалентны. Используя формулу (17), получаем равенство 1°.

Равенство 2° следует из тождества

$$\{g(x) = t\} \equiv \{\varphi f(x) = t\} \equiv \{f(x) = y\}.$$

Теорема 4. *Пусть F — несчетное семейство; для любого непрерывного отображения h, такого, что $h(\mathscr{X}) = \mathscr{J}$ и что для всех $t \in \mathscr{J}$, за исключением счетного множества, $h^{-1}([0, t]) \in F$, справедливо соотношение $g^{-1}(t) \subset h^{-1}(t)$.*

Если F — счетное (или конечное) семейство, то не существует никакой функции h, удовлетворяющей указанным выше условиям.

Покажем, что из условия $g(x) = g(x')$ следует, что $h(x) = h(x')$.

Допустим противное; пусть, например, $h(x) < h(x')$. Для каждого t, такого, что $h(x) < t < h(x')$, имеем

$$x \in h^{-1}([0, t]) \quad \text{и} \quad x' \notin h^{-1}([0, t]). \tag{19}$$

Так как множество таких t несчетно, то существует несчетное множество таких t, что $h^{-1}([0, t]) \in F$.

Следовательно, каждой точке t такого рода соответствует индекс $w \in J$, для которого $h^{-1}([0, t]) = A_w$. Более того, двум различным t всегда соответствуют два различных индекса w, ибо если допустить, что $h^{-1}([0, t]) = h^{-1}([0, t'])$ при $t < t'$, то найдется точка t'', такая, что $t < t'' < t'$ и

$$h^{-1}(t'') \subset h^{-1}([0, t']) - h^{-1}([0, t]) = 0,$$

вопреки предположению, что h — отображение на.

Следовательно, множество W всех индексов w, таких, что

$$A_w = h^{-1}([0, t]), \quad \text{где} \quad h(x) < t < h(x'), \tag{20}$$

несчетно. Обозначим через W^* множество, которое получается из W удалением его первой точки (если она существует). Тогда для $w \in W^*$ имеем

$$x \in \operatorname{Int}(A_w) \quad \text{и} \quad x' \notin A_w. \tag{21}$$

В самом деле, пусть $w' < w$; тогда, в силу (20),

$$A_{w'} = h^{-1}([0, t']), \quad \text{где} \quad h(x) < t' < h(x').$$

Поэтому $x \in h^{-1}([0, t']) = A_{w'} \subset \operatorname{Int}(A_w)$, откуда вытекает первая часть формулы (21). Вторая часть является прямым следствием формул (19) и (20).

Положим $g(x) = t_0 = g(x')$, т. е. $x \in g^{-1}(t_0)$ и $x' \in g^{-1}(t_0)$. Тогда, в силу теоремы 2, $x' \in A_z$ для каждого индекса $z > \Gamma(t_0)$; кроме того, $x \in \mathscr{X} - A_u$, т. е. $x \notin \operatorname{Int}(A_u)$ для любого индекса $u < \gamma(t_0)$. В силу формулы (21), отсюда получаем, что $w \leqslant \Gamma(t_0)$ и $w \geqslant \gamma(t_0)$, т. е.

$$W^* \subset J \cap \mathop{\mathrm{E}}_{y}[\gamma(t_0) \leqslant y \leqslant \Gamma(t_0)].$$

Но тогда множество W^* счетно, в силу теоремы 1.

В. ПРОБЛЕМЫ РАЗМЕРНОСТИ

Мы сохраняем предположения относительно пространства, сделанные в разделе Б.

§ 25. Определения. Общие свойства

I. Определение размерности[1]. Поставим в соответствие пространству $\mathscr{X}$ целое число $n \geqslant -1$ или ∞, которое назовем *размерностью* пространства $\mathscr{X}$ и обозначим $\dim \mathscr{X}$.

Символом $\dim_p \mathscr{X}$ обозначим *размерность пространства* $\mathscr{X}$ *в точке* p. Три следующие аксиомы дают индуктивное определение понятия размерности:

1) *равенство* $\dim \mathscr{X} = -1$ *означает, что пространство* $\mathscr{X}$ *пусто*;

2) *если* $\mathscr{X} \neq 0$, *то* $\dim \mathscr{X} = \sup\limits_{p \in \mathscr{X}} \dim_p \mathscr{X}$;

3) *неравенство* $\dim_p \mathscr{X} \leqslant n+1$ *означает, что существуют сколь угодно малые открытые окрестности точки* p, *граница которых имеет размерность* $\leqslant n$.

Утверждение 3 можно сформулировать эквивалентным образом в топологических терминах:

---

[1]) Идея определения размерности восходит к Анри Пуанкаре ([3] и [4] стр. 65). Затем это определение было точно сформулировано Брауэром ([1], стр. 146 и [3], стр. 795). Теория размерности, основанная на определении, очень близком к определению Пуанкаре — Брауэра, была создана и независимо развита К. Менгером и П. Урысоном в многочисленных работах начиная с 1922 г. См. Менгер [4] и Урысон [6].

Более современное изложение теории размерности можно найти в работе Гуревича и Уолмена [1].

Теория размерности, основанная на понятии гомологии, была построена П. С. Александровым [14].

3′) $\dim_p \mathscr{X} \leqslant n+1$ *тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки p содержит окрестность точки p, граница которой имеет размерность $\leqslant n$.*

Таким образом, размерность пространства определена чисто топологически, и поэтому она *инвариантна относительно гомеоморфных отображений пространства.*

Примеры. По определению, непустое пространство имеет размерность 0, если каждая точка обладает произвольно малыми открытыми окрестностями с пустой границей. Таково, например, пространство рациональных чисел, так как каждый интервал с иррациональными концами имеет в этом пространстве пустую границу; 0-мерным является также пространство иррациональных чисел и, вообще, каждое *граничное множество, расположенное на вещественной прямой.*

Пространство действительных чисел имеет размерность $\leqslant 1$, ибо граница интервала состоит из двух точек и имеет, следовательно, размерность 0. Аналогичным образом, плоскость имеет размерность $\leqslant 2$ (ибо окружность имеет размерность $\leqslant 1$), и, вообще, n-мерное евклидово пространство $\mathscr{E}^n$ имеет размерность $\leqslant n$. Доказательство того, что размерность этого пространства в точности равна n, менее элементарно. Мы вернемся к этому в § 28.

II. Размерность подмножеств. Пусть $E \subset \mathscr{X}$ и p — произвольная точка множества E. Неравенство $\dim_p E \leqslant n+1$, в силу 3), означает, что существует произвольно малая открытая окрестность точки p *относительно* E, граница которой относительно E имеет размерность $\leqslant n$; иначе говоря, существует произвольно малое открытое множество G, содержащее точку p, такое, что $\dim((E \cap \overline{E \cap G}) - G) \leqslant n$.

Действительно, границей множества $E \cap G$ относительно E, по определению, является множество

$$(E \cap \overline{E \cap G}) - (E \cap G) = (E \cap \overline{E \cap G}) - G.$$

Теорема 1. *Размерность подмножества не превосходит размерности всего пространства:*

$$\text{если} \quad p \in E, \quad \text{то} \quad \dim_p E \leqslant \dim_p \mathscr{X}.$$

Доказательство. Рассуждая по индукции, можно допустить, что это утверждение имеет место для n-мерного пространства и что $\dim_p \mathscr{X} \leqslant n+1$. Пусть тогда G — открытая окрестность точки p, такая, что $\dim[\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$. Необходимо доказать, что граница множества $E \cap G$ относительно E имеет размерность $\leqslant n$. Но относительная граница равна

$$(E \cap \overline{E \cap G}) - G \subset \overline{G} - G = \mathrm{Fr}(G),$$

и, по предположению индукции, имеет место неравенство

$$\dim((E \cap \overline{\overline{E} \cap G}) - G) \leqslant \dim[\operatorname{Fr}(G)] \leqslant n.$$

Теорема 2. *Для того чтобы* $\dim_p E \leqslant n+1$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала произвольно малая открытая окрестность* G *точки* p, *такая, что*

$$\dim[E \cap \operatorname{Fr}(G)] \leqslant n.$$

Доказательство. Предположим, что $\dim_p E \leqslant n+1$. Пусть тогда H — множество, открытое в E, такое, что $\dim[(E \cap \overline{H}) - H] \leqslant n$. Так как множества H и $E - \overline{H}$ отделимы (§ 6, V, 3), то существует (согласно § 14, V, 1 и § 21, IV, 2) открытое множество G, такое, что

$$H \subset G \quad \text{и} \quad (\overline{G} \cap E) - \overline{H} = 0, \quad \text{откуда} \quad (E \cap \overline{G}) - G \subset (E \cap \overline{H}) - H,$$

и, согласно 1,

$$\dim[(E \cap \overline{G}) - G] \leqslant \dim[(E \cap \overline{H}) - H] \leqslant n.$$

Так как, кроме того, в силу § 14, V, 1, диаметр множества G сколь угодно мало отличается от диаметра множества H, необходимость условия установлена.

Для доказательства достаточности рассмотрим указанное множество G и положим $H = E \cap G$. Тогда

$$(E \cap \overline{H}) - H = (E \cap \overline{E \cap G}) - G \subset (E \cap \overline{G}) - G = E \cap \operatorname{Fr}(G),$$

откуда

$$\dim[(E \cap \overline{H}) - H] \leqslant \dim[E \cap \operatorname{Fr}(G)] \leqslant n,$$

следовательно, $\dim_p E \leqslant n+1$.

Отметим частный случай теоремы 2.

Теорема 2_0. *Для того чтобы* $\dim_p E = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала произвольно малая окрестность* G *точки* p, *такая, что* $E \cap \operatorname{Fr}(G) = 0$.

III. Множество $E_{(n)}$.

Определение. *Точка* p *принадлежит множеству* $E_{(n)}$, *если* $\dim_p(E \cup p) \leqslant n$, т. е. если существует произвольно малая окрестность G точки p, такая, что $\dim[E \cap \operatorname{Fr}(G)] \leqslant n-1$.

В частности, если множество E представляет собой все пространство $\mathscr{X}$, то $E_{(n)}$ является множеством тех точек, в которых это пространство имеет размерность $\leqslant n$.

Включение $E \subset E_{(n)}$ эквивалентно неравенству $\dim E \leqslant n$. Согласно II, 1, из включения $A \subset B$ следует, что $B_{(n)} \subset A_{(n)}$.

Теорема 1. $\dim (E \cap E_{(n)}) \leqslant n$.

В самом деле, если $p \in E \cap E_{(n)}$, то, по определению, $\dim_p E \leqslant n$, следовательно, в силу II, 1,

$$\dim_p (E \cap E_{(n)}) \leqslant n.$$

Впрочем, следует заметить, что размерность множества $E_{(n)}$ может быть больше n. Если, например, множество E состоит из одной точки, то $E_{(0)} = \mathscr{X}$.

Теорема 2. *Множество $E_{(n)}$ есть множество типа G_δ* [1]).

В самом деле, $p \in E_{(n)}$ тогда и только тогда, когда для каждого k существует открытое множество G, содержащее точку p, такое, что

$$\dim [E \cap \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n - 1 \quad \text{и} \quad \delta(G) < \frac{1}{k}.$$

Обозначим через H_k объединение всех множеств G такого рода. Тогда $E_{(n)} = H_1 \cap H_2 \cap \ldots$.

Теорема 3. *Пусть заданы множество E и целое число n. Тогда существует последовательность открытых множеств $D_1, D_2, \ldots$, такая, что*

1° $\dim [E \cap \mathrm{Fr}(D_i)] \leqslant n - 1$;

2° *множества* $E_{(n)} \cap D_i$, $i = 1, 2, \ldots$, *образуют базу множества* $E_{(n)}$; иначе говоря, для любой точки $p \in E_{(n)}$ существует множество D_i, содержащее точку p, диаметр которого сколь угодно мал;

3° *положим* $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}(D_i)$; *имеют место следующие соотношения*:

$$E_{(n)} \subset (E - S)_{(0)} \quad \textit{и} \quad \dim [E_{(n)} - S] \leqslant 0.$$

Доказательство. При фиксированном k произвольной точке $p \in E_{(n)}$ поставим в соответствие открытое множество $G(p)$, содержащее p, такое, что

$$\dim \{E \cap \mathrm{Fr}[G(p)]\} \leqslant n - 1 \quad \text{и} \quad \delta[G(p)] < \frac{1}{k}.$$

В силу теоремы Линделёфа (§ 17, I), можно найти счетную последовательность $D_{k,1}, D_{k,2}, \ldots$ множеств $G(p)$, объединение которых равно объединению всех множеств $G(p)$. Преобразовав двойную последовательность $\{D_{k,m}\}$ в простую последовательность, получим искомую последовательность $\{D_i\}$.

---

[1]) См. Менгер [1], стр. 141; Урысон [5], стр. 277; Тумаркин [1], стр. 360.

В самом деле, так как любая точка p множества $E_{(n)}$ содержится в произвольно малом множестве $G(p)$, то существует такое множество D_i, что $p \in D_i \subset G(p)$, откуда вытекает условие 2°.

Условие 3° является следствием условия 2°, в силу очевидной формулы:

$$(E - S) \cap \operatorname{Fr}(D_i) = 0 = (E_{(n)} - S) \cap \operatorname{Fr}(D_i).$$

Частным случаем теоремы 3 является

Теорема 4. *Любое n-мерное пространство содержит счетную базу, состоящую из открытых множеств, границы которых имеют размерность $\leqslant n-1$. Отнимая от пространства эти границы, получаем 0-мерное (или пустое) множество.*

Теорема 5. *Из условия* $\dim X \leqslant n$ *следует, что* $E_{(0)} \subset (E \cup X)_{(n+1)}$.

В самом деле, если $p \in E_{(0)}$, то существует окрестность G точки p, такая, что $E \cap \operatorname{Fr}(G) = 0$. Следовательно, $(E \cup X) \cap \operatorname{Fr}(G) = X \cap \operatorname{Fr}(G) \subset X$, откуда $\dim[(E \cup X) \cap \operatorname{Fr}(G)] \leqslant n$; тем самым доказано, что $p \in (E \cup X)_{(n+1)}$.

§ 26. Нульмерные пространства[1]

I. База пространства. По определению, пространство имеет размерность 0, если любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, являющуюся одновременно замкнутой и открытой (это эквивалентно предположению, что граница этой окрестности пуста).

Из § 25, III, 4 вытекает следующая

Теорема 1. *Во всяком 0-мерном пространстве существует счетная база, состоящая из открыто-замкнутых множеств.*

Кроме того, можно предположить, что *диаметр этих множеств не превосходит заранее заданного положительного числа.*

Следствия. *Во всяком 0-мерном пространстве*

1а. *Любое открытое множество (в частности, все пространство) является объединением последовательности непересекающихся открыто-замкнутых множеств произвольно малого диаметра.*

1б. *Любое замкнутое множество является пересечением последовательности открыто-замкнутых множеств.*

---

[1]) Бо́льшая часть теорем этого параграфа будет обобщена по индукции в следующем параграфе, где приводятся также библиографические ссылки.

Для доказательства следствия 1а положим, в соответствии с теоремой 1,

$$G = F_1 \cup F_2 \cup \ldots = F_1 \cup (F_2 - F_1) \cup (F_3 - F_1 - F_2) \cup \ldots,$$

где G — данное открытое множество и $F_1, F_2, \ldots$ — открыто-замкнутые множества. Правая часть последнего равенства представляет собой искомое разложение.

Следствие 1б непосредственно вытекает из 1а.

*Теорема 1'[1]. *Во всяком нульмерном пространстве любое множество типа G_δ, одновременно плотное и граничное, является результатом $(\mathcal{A})$-операции, примененной к регулярной системе* (§ 3, XIV) *непустых открыто-замкнутых множеств* $\{A_{k_1 \ldots k_n}\}$, *таких, что*

1) $\delta(A_{k_1 \ldots k_n}) < \frac{1}{n}$,

2) *два множества* $A_{k_1 \ldots k_n}$ *и* $A_{l_1 \ldots l_n}$ *с различными системами n индексов не пересекаются.*

Пусть Q — рассматриваемое множество типа G_δ: $Q = G_1 \cap G_2 \cap \ldots$, где G_n — открытые множества и $G_n \supset G_{n+1}$. Так как множество Q не замкнуто, существует индекс j_1, такой, что множество G_{j_1} не замкнуто. Поэтому, в силу следствия 1а, можно положить

$$G_{j_1} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \qquad \delta(A_i) < 1,$$

где множества A_i замкнуты, открыты, не пересекаются и непусты. Продолжим этот процесс по индукции.

Предположим, что множества $A_{k_1 \ldots k_n}$ определены и выполнены включения

(i) $$A_{k_1 \ldots k_n} \subset G_n$$

для целых $n \geqslant 1$; тогда множества $A_{k_1 \ldots k_n k_{n+1}}$ определим следующим образом.

Если множество $A_{k_1 \ldots k_n}$ открыто, то существует индекс $j_{n+1} \geqslant n+1$, такой, что множество $A_{k_1 \ldots k_n} \cap G_{j_{n+1}}$ не является замкнутым, так как в противном случае множество $Q \cap A_{k_1 \ldots k_n}$ будет замкнутым, вопреки предположению, что оно плотное и граничное в множестве $A_{k_1 \ldots k_n}$. Следовательно, можно положить, как и выше,

$$A_{k_1 \ldots k_n} \cap G_{j_{n+1}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k_1 \ldots k_n i}, \qquad \delta(A_{k_1 \ldots k_n i}) < \frac{1}{n+1},$$

где множества $A_{k_1 \ldots k_n i}$ непусты, замкнуты, открыты и не пересекаются. Кроме того, в силу неравенства $j_{n+1} \geqslant n+1$, откуда следует, что $G_{j_{n+1}} \subset G_{n+1}$, в (i) можно заменить n на $n+1$.

[1]) Эта теорема будет использована в главе о полных пространствах (§ 36).

Таким образом, множества $A_{k_1 \dots k_n}$ определены для любого n; мы докажем, что множество Q совпадает с результатом $(\mathcal{A})$-операции, примененной к этим множествам.

С одной стороны, пусть $p \in Q$. Тогда $p \in G_{j_1}$. Следовательно, существует индекс k_1, такой, что $p \in A_{k_1}$. Предположим, что $p \in A_{k_1 \dots k_n}$. Так как, кроме того, $p \in G_{j_{n+1}}$, то существует индекс k_{n+1}, такой, что $p \in A_{k_1 \dots k_n k_{n+1}}$. Таким образом, мы приходим к формуле

$$(1) \qquad p \in A_{k_1} \cap A_{k_1 k_2} \cap A_{k_1 k_2 k_3} \cap \dots .$$

С другой стороны, если эта формула выполняется, то из включения (i) следует, что $p \in G_1 \cap G_2 \cap \dots = Q$.

II. Теоремы редукции и отделимости. В нульмерных сепарабельных пространствах теорема из § 21, XII допускает следующее уточнение: можно предположить, что множества F_ι в формуле (2′) *открыто-замкнутые*.

В самом деле, имеет место следующее утверждение (ср. с теоремой Линделёфа).

Теорема 1 (теорема редукции)[1]. *Пусть $\mathcal{X}$ — нульмерное пространство. Тогда любой последовательности (конечной или бесконечной) открытых множеств $G_0, G_1, \dots$ соответствует последовательность непересекающихся открытых множеств $H_0, H_1, \dots$, таких, что*

$$(0) \qquad H_i \subset G_i \quad \text{и} \quad H_0 \cup H_1 \cup \dots = G_0 \cup G_1 \cup \dots .$$

Следовательно, *если $\mathcal{X} = G_0 \cup G_1 \cup \dots$, то множества H_i открыто-замкнуты.*

В самом деле, положим $G_i = F_{i,0} \cup F_{i,1} \cup \dots$, где множества $F_{i,j}$ открыто-замкнуты (см. I, следствие 1a). Перенумеруем двойную последовательность $\{i, j\}$ в простую последовательность. Пусть $n = \varphi(i, j)$ — целое число, которое соответствует паре (i, j). Пусть $F^*_{i,j} = F_{i,j} - \bigcup F_{k,l}$, где объединение берется по всем парам (k, l), таким, что $\varphi(k, l) < \varphi(i, j)$. Очевидно, что

$$\bigcup_{i,j=0}^{\infty} F^*_{i,j} = \bigcup_{i,j=0}^{\infty} F_{i,j} = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i.$$

Положим $H_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} F^*_{i,j}$. Тогда $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$ и

$$H_i \subset F_{i,0} \cup F_{i,1} \cup \dots = G_i.$$

[1]) См. Куратовский [29], стр. 184.

Так как множества $F^*_{i,j}$ попарно не пересекаются, то и множества H_i попарно не пересекаются.

Из теоремы редукции вытекает следующая

Теорема 2 (теорема отделимости). *Пусть в нульмерном пространстве $\mathscr{X}$ задана (конечная или бесконечная) последовательность замкнутых множеств $F_0, F_1, \ldots,$ таких, что $F_0 \cap F_1 \cap \ldots = 0$; тогда существует последовательность открыто-замкнутых множеств $E_0, E_1, \ldots,$ таких, что*

$$F_i \subset E_i \quad \textit{и} \quad E_0 \cap E_1 \cap \ldots = 0.$$

В частности, *если A и B — два замкнутых непересекающихся множества, то существует открыто-замкнутое множество E, такое, что $A \subset E$ и $E \cap B = 0$* [1].

В самом деле, применим теорему редукции, положив

$$G_i = \mathscr{X} - F_i \quad \text{и} \quad E_i = \mathscr{X} - H_i.$$

По предположению и в силу формулы (0), имеем

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} G_i = \mathscr{X} - \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i = \mathscr{X} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i.$$

Следовательно, множества H_i, так же как и множества E_i, открыто-замкнуты. Более того, из последнего равенства следует, что $E_0 \cap E_1 \cap \ldots = 0$, а из включения $H_i \subset G_i$ вытекает, что $F_i \subset E_i$.

Вторую часть теоремы 2 можно обобщить следующим образом.

Теорема 2а. *Пусть задана конечная система $A_0, \ldots, A_k$ замкнутых непересекающихся подмножеств нульмерного пространства. Тогда существует система $F_0, \ldots, F_k$ открыто-замкнутых непересекающихся множеств, таких, что*

$$\mathscr{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_k \quad \textit{и} \quad A_i \subset F_i.$$

Применим индукцию. При $k = 1$ теорема верна; допустим, что она имеет место при $k - 1$, $k \geqslant 2$. Тогда существует система открыто-замкнутых непересекающихся множеств $F_0, \ldots, F_{k-2}, F^*$, таких, что

$$\mathscr{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_{k-2} \cup F^*, \quad A_0 \subset F_0, \ldots, A_{k-2} \subset F_{k-2},$$
$$A_{k-1} \cup A_k \subset F^*.$$

Применяя теорему 1 к паре множеств A_{k-1}, A_k и к множеству F^*, рассматриваемому как пространство, получаем

$$F^* = F_{k-1} \cup F_k, \quad A_{k-1} \subset F_{k-1}, \quad A_k \subset F_k, \quad F_{k-1} \cap F_k = 0,$$

[1]) Отсюда видно, что в нульмерных пространствах аксиому нормальности можно сформулировать в более удобной форме.

где множества F_{k-1} и F_k открыто-замкнуты в множестве F^*, а следовательно, и в пространстве $\mathscr{X}$.

Следствие 1. *Любое вполне ограниченное открытое подмножество G нульмерного пространства имеет вид*

$$(1)\quad G = F_0 \cup F_1 \cup \ldots,\quad F_i \cap F_j = 0 \text{ при } i \neq j,\quad \lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0,$$

где F_i — открыто-замкнутые множества.

Следствие 2. *Пусть F — непустое замкнутое подмножество нульмерного пространства. Тогда существует непрерывное отображение данного пространства в множество F, тождественное на множестве F.* Иначе говоря, *множество F является ретрактом данного пространства.* (См. Серпинский [30], стр. 118.)

Отсюда вытекает (§ 13, V, 4)

Следствие 3. *Любую непрерывную функцию f, определенную на замкнутом подмножестве F нульмерного пространства, можно продолжить на все пространство так, чтобы ее значения не выходили за пределы множества $f(F)$.*

Докажем следствие 1. Для этого, в соответствии со следствием 1a из п. I, рассмотрим последовательность ограниченных открыто-замкнутых множеств F_0^*, F_1^*, ..., удовлетворяющих двум первым равенствам (1). Будучи вполне ограниченными, множества F_n^* имеют вид

$$F_n^* = H_{n0} \cup \ldots \cup H_{nk_n},\quad \text{где}\quad \delta(H_{ni}) < \frac{1}{n}.$$

Пусть G_{ni} — открытое множество, такое, что $H_{ni} \subset G_{ni} \subset F_n^*$ и $\delta(G_{ni}) < 1/n$. Тогда $F_n^* = G_{n0} \cup \ldots \cup G_{nk_n}$. К множеству F_n^*, рассматриваемому как пространство, применим теорему 1; мы получим

$$F_n^* = F_{n0} \cup \ldots \cup F_{nk_n},\quad F_{ni} \cap F_{nj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,\quad F_{ni} \subset G_{ni},$$

где F_{n0}, ..., F_{nk_n} — открыто-замкнутые множества в F_n^*, а следовательно, и во всем пространстве.

Так как $F_{ni} \subset G_{ni}$, то $\delta(F_{ni}) < 1/n$. Отсюда следует, что F_{00}, ..., F_{0k_0}, F_{10}, ..., F_{1k_1}, ... — искомая последовательность.

Таким образом, следствие 1 установлено. Из него получается следствие 2. Можно допустить, что пространство вполне ограниченно, так как каждое метрическое сепарабельное пространство гомеоморфно вполне ограниченному пространству (§ 22, II, следствие 1a).

Положим $G = \mathscr{X} - F$. В соответствии со следствием 1 рассмотрим последовательность непустых открыто-замкнутых множеств F_1, F_2, ..., удовлетворяющих условию (1). Пусть p_n — точка множества F, такая, что

(i) $$\rho(p_n, F_n) < \rho(F, F_n) + \frac{1}{n}.$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{когда } x \in F, \\ p_n, & \text{когда } x \in F_n. \end{cases}$$

Так как множества F_n — открытые и непересекающиеся, отображение f непрерывно на множестве G. Для доказательства того, что оно непрерывно на множестве F, положим

(ii) $$x_0 \in F, \quad x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x_n \in G, \quad \text{следовательно,} \quad x_n \in F_{k_n}.$$

Так как множество F_n замкнуто и не пересекается с множеством F, оно может содержать только конечное число элементов последовательности $x_1, x_2, \ldots$. Следовательно (см. (1)), $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_{k_n}) = 0$. С другой стороны, из условий (ii) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(F, F_{k_n}) = 0$ и (согласно (i)) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_{k_n} \cup p_{k_n}) = 0$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - p_{k_n}| = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - f(x_n)| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = f(x_0),$$

а это означает, что отображение f непрерывно в точке x_0.

Следствие 4. *Пусть $F_0, F_1, \ldots$ — (конечная или бесконечная) последовательность замкнутых множеств. Тогда существует последовательность открытых множеств $B_0, B_1, \ldots$, такая, что*

(2) $$F_i - \bigcap_{m=0}^{\infty} F_m \subset B_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i = 0.$$

В самом деле, положим в теореме 1

(3) $$G_i = \mathscr{X} - F_i \quad \text{и} \quad B_i = \bigcup_{j \neq i} H_j.$$

Кроме того, положим

(4) $$S = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i, \quad \text{откуда} \quad S = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i.$$

Тогда, в силу (3), (4) и (0),

$$F_i - \bigcap_{m=0}^{\infty} F_m = \bigcup_{m=0}^{\infty} G_m - G_i = S - G_i = (B_i \cup H_i) - G_i =$$
$$= (B_i - G_i) \cup (H_i - G_i) = B_i - G_i \subset B_i.$$

С другой стороны, так как $B_i = S - H_i$, то, согласно (4),

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} (S - H_i) = S - \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i = 0.$$

В силу следствия 1б, § 22, II, каждое сепарабельное метрическое пространство является непрерывным образом некоторого подмножества пространства $\mathcal{N}$ иррациональных чисел. Это утверждение можно обобщить следующим образом.

Следствие 5[1]. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ — *семейство (множеств) мощности континуум. Тогда существует множество* $Z \subset \mathcal{N}$, *такое, что каждое множество из семейства* $\boldsymbol{F}$ *является непрерывным образом множества* Z.

Доказательство. Положим $\boldsymbol{F} = \{E_z\}$, где $z \in \mathcal{N}$. Обозначим через N_z множество элементов y множества $\mathcal{N}$, таких, что

$$y^1 = z^1, \quad y^3 = z^2, \quad y^5 = z^3, \ \ldots .$$

Так как $N_z \underset{\text{top}}{=} \mathcal{N}$, то, в силу следствия 1б, § 22, II, существует множество $A_z \subset N_z$, такое, что множество E_z является его непрерывным образом. Положим

$$Z = \bigcup_{z \in \mathcal{N}} A_z.$$

Так как множества N_z не пересекаются и замкнуты в $\mathcal{N}$, то множество A_z замкнуто в Z и, следовательно, в силу следствия 2, является непрерывным образом множества Z. Поэтому и множество E_z является непрерывным образом множества Z.

III. Теоремы об объединении нульмерных множеств.

Теорема 1. *Если пространство можно разложить в (конечный или бесконечный) ряд замкнутых множеств:* $\mathcal{X} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, *где все, за исключением, может быть, первого множества, имеют размерность* 0, *а первое множество имеет размерность* 0 *в данной точке* p, *то все пространство имеет размерность* 0 *в точке* p.

Пусть B — открытый шар с центром в точке p. Построим открыто-замкнутое множество G, такое, что $p \in G \subset B$.

Множество G определим как объединение множества открытых возрастающих множеств G_n. Множества G_n определим по индукции одновременно с открытыми возрастающими множествами H_n таким образом, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\text{(i)} \qquad \overline{G}_n \cap \overline{H}_n = 0,$$

$$\text{(ii)} \qquad A_n \subset G_n \cup H_n.$$

[1] См. Серпинский [39], стр. 234.

Так как множество A_1 имеет размерность 0 в точке p, то существует содержащее эту точку множество F_1, открыто-замкнутое относительно A_1. Так как множество A_1 замкнуто, то F_1 и $A_1 - F_1$ тоже замкнуты. Более того, можно предположить, что множество F_1 содержится в шаре B, так что множества F_1 и $(A_1 - F_1) \cup (\mathscr{X} - B)$ замкнуты и не пересекаются. В силу нормальности пространства, существуют открытые множества G_1 и H_1, такие, что

$$F_1 \subset G_1, \quad (A_1 - F_1) \cup (\mathscr{X} - B) \subset H_1 \quad \text{и} \quad \overline{G}_1 \cap \overline{H}_1 = 0.$$

Следовательно, условия (i) и (ii) выполняются при $n = 1$. Предположим, что они выполнены для n; докажем их для $n+1$.

Так как множества $A_{n+1} \cap \overline{G}_n$ и $A_{n+1} \cap \overline{H}_n$ замкнуты и не пересекаются, а множество A_{n+1} имеет размерность 0, то, в силу теоремы II, 2, существует множество F_{n+1}, открыто-замкнутое в A_{n+1}, такое, что $A_{n+1} \cap \overline{G}_n \subset F_{n+1}$, $F_{n+1} \cap \overline{H}_n = 0$. Далее, множества F_{n+1} и $A_{n+1} - F_{n+1}$ замкнуты (поскольку множество $A_{n+1} - F_{n+1}$ относительно замкнуто в множестве A_{n+1}, которое само замкнуто), поэтому множества $(\overline{G}_n \cup F_{n+1})$ и $\overline{H}_n \cup (A_{n+1} - F_{n+1})$ замкнуты и не пересекаются. В силу нормальности пространства, существуют открытые множества G_{n+1} и H_{n+1}, такие, что

$$\overline{G}_n \cup F_{n+1} \subset G_{n+1}, \quad \overline{H}_n \cup (A_{n+1} - F_{n+1}) \subset H_{n+1} \quad \text{и} \quad \overline{G}_{n+1} \cap \overline{H}_{n+1} = 0.$$

Таким образом, условия (i) и (ii) выполнены для $n+1$.

Кроме того, поскольку множества G_n и H_n возрастающие, из условия $G_n \cap H_n = 0$, которое вытекает из (i), следует, что $G_n \cap H_m = 0$, каковы бы ни были n и m (так как $G_n \cap H_{n+k} \subset G_{n+k} \cap H_{n+k} = 0$). Следовательно, если положить

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{и} \quad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n,$$

то $G \cap H = 0$. С другой стороны, в силу (ii),

$$\mathscr{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cup H_n) = G \cup H;$$

отсюда вытекает, что $H = \mathscr{X} - G$. Так как множества G и H открыты, то множество G одновременно замкнуто и открыто.

Остается доказать, что $p \in G \subset B$. Из определения множества G_1 следует, что $p \in F_1 \subset G_1 \subset G$. С другой стороны, из определения множества H_1 следует, что $\mathscr{X} - B \subset H_1$, откуда $\mathscr{X} - H_1 \subset B$; но множества G и H_1 не пересекаются, поэтому $G \subset \mathscr{X} - H_1 \subset B$.

Следствие 1. *Объединение счетной последовательности нульмерных замкнутых множеств (или, более общо, нульмерных F_σ-множеств) есть нульмерное множество.*

Следствие 2. *Объединение двух нульмерных множеств, одно из которых является одновременно F_σ-множеством и G_δ-множеством, — нульмерно.*

Следствие 3. *Если к нульмерному множеству добавить одну точку, то размерность его не изменится: если* $\dim A = 0$, *то* $A_{(0)} = \mathscr{X}$.

Следствие 4. *Если G — открытое множество, то из условия* $\dim (E \cap G) \leqslant 0$ *следует, что* $E_{(0)} = (E - G)_{(0)}$.

Для доказательства следствия 1 достаточно рассматривать объединение указанных множеств как пространство. Следствие 2 вытекает из следствия 1, ибо оба рассматриваемых множества являются множествами типа F_σ относительно их объединения. Следствие 3 является частным случаем следствия 2. Наконец, чтобы доказать следствие 4, допустим, что $p \in (E - G)_{(0)}$, т. е. $\dim_p (p \cup E - G) = 0$.

Если множество $p \cup E$ рассматривается как пространство, то множество $E \cap G$ представляет собой в этом пространстве счетное объединение замкнутых нульмерных множеств, и из теоремы 1 следует, что множество $(p \cup E - G) \cup (E \cap G) = p \cup E$ имеет размерность 0 в точке p, т. е. что $p \in E_{(0)}$, откуда вытекает следствие 4.

Замечания. Теорема 1 не верна, если сделать только одно предположение, что $\dim_p A_n = 0$. В самом деле, разложим интервал $\mathscr{J} = [0, 1]$ в последовательность сегментов, сходящихся к точке 0. Пусть A_1 — множество, составленное из точки 0 и четных сегментов, и пусть A_2 — множество, состоящее из точки 0 и нечетных сегментов. Очевидно, что $\dim_p A_1 = 0 = \dim_p A_2$, тогда как $\dim_p (A_1 \cup A_2) = 1$.

Тем более нельзя заменить предположение о том, что множество A_1 замкнуто, предположением о том, что A_1 есть F_σ-множество; это показывает следующий пример: пусть A_2 — последовательность точек, сходящаяся к точке 0 ($= p$), и $A_1 = \mathscr{J} - A_2$.

IV. Продолжение нульмерных множеств.

Теорема 1. *Любое нульмерное множество содержится в некотором нульмерном G_δ-множестве.*

В самом деле, в силу § 25, III, 3, каждому множеству E соответствует множество S типа F_σ, такое, что $E \cap S = 0$ и $\dim [E_{(0)} - S] \leqslant 0$. Однако если допустить, что $\dim E = 0$, то, согласно следствию 3 из п. III, $E_{(0)} = \mathscr{X}$. Следовательно, множество $\mathscr{X} - S$ есть нульмерное G_δ-множество, содержащее множество E[1]).

[1]) Доказательство, основанное на другой идее, см. в § 35, II, замечание 2.

Теорема 2[1]). *Всякое нульмерное пространство $\mathscr{X}$ топологически содержится в нигде не плотном совершенном канторовом множестве $\mathscr{C}$.*

По определению (§ 3, IX), канторово множество $\mathscr{C}$ есть множество последовательностей $z=[z^1, z^2, \ldots]$, где z^i принимает одно из двух значений: 0 или 2.

Для доказательства теоремы нужно построить гомеоморфизм $z\colon \mathscr{X}\to\mathscr{C}$.

Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots$ — база пространства, состоящая из открыто-замкнутых множеств (теорема 1, п. I), и пусть z — ее характеристическая функция, т. е. $z^i(x)=2$, если $x\in R_i$, и $z^i(x)=0$ в противном случае. Как характеристическая функция последовательности открыто-замкнутых множеств, функция z непрерывна (§ 16, II, следствие 6г). Для доказательства того, что она взаимно непрерывна, остается показать (§ 13, VIII (3а)), что из условия $p\in\mathscr{X}-\overline{X}$ следует включение $z(p)\in\mathscr{C}-\overline{z(X)}$.

Согласно определению базы, существует индекс i, такой, что $p\in R_i\subset\mathscr{X}-\overline{X}\subset\mathscr{X}-X$. Следовательно, $z^i(p)=2$, тогда как при $x\in X$ имеем $z^i(x)=0$; поэтому $|z(p)-z(x)|\geqslant\frac{1}{3^i}$ (здесь мы отождествляем последовательность $z=[z^1, z^2, \ldots, z^i, \ldots]$ с числом $\frac{z^1}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots+\frac{z^i}{3^i}+\ldots$).

Итак, число $z(p)$ не может принадлежать замыканию множества чисел $z(x)$, т. е. $z(p)\in\mathscr{C}-\overline{z(X)}$.

Следствие 2а. *Канторово множество $\mathscr{C}$ имеет наивысший топологический ранг среди всех нульмерных пространств.*

Действительно, множество $\mathscr{C}$ нульмерно, как граничное множество на вещественной прямой (см. § 25, I, примеры).

Замечание. Этим же свойством обладает *множество $\mathscr{N}$ иррациональных чисел интервала $\mathscr{J}$*. В самом деле, множество $\mathscr{N}$, как пространство всех бесконечных последовательностей натуральных чисел, содержит множество последовательностей, образованных из двух чисел 1 и 2, гомеоморфное множеству $\mathscr{C}$. Обратно, множество $\mathscr{N}$ нульмерно, как множество, граничное в интервале; следовательно, оно топологически содержится в множестве $\mathscr{C}$.

Это означает, что как множество $\mathscr{C}$, так и множество $\mathscr{N}$ имеют наивысший топологический ранг среди граничных множеств пространства действительных чисел.

[1]) См. Урысон [4], стр. 77.

Следствие 2б. *Пусть* $\dim \mathscr{X}_n = 0$ *при* $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\dim(\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \times \ldots) = 0.$$

Это утверждение вытекает из того, что $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \times \ldots \subset \mathscr{C}^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{C}$, в силу следствия 6а, § 16, II.

V. Счетные пространства.

Теорема 1. *Любое пространство мощности, меньшей мощности континуума, нульмерно.*

Более общим образом, *если пространство имеет порядок, меньший* $\mathfrak{c}$, *в точке* p (см. § 23, VII), *то пространство нульмерно в этой точке.*

В самом деле, среди шаров радиуса $< \varepsilon$ с центром в точке p существует шар, граница („поверхность") которого пуста (так как границы двух различных шаров не пересекаются). Следовательно, такой шар одновременно замкнут и открыт.

Теорема 2. *Любое счетное пространство топологически содержится в множестве* $\mathscr{R}$ *рациональных чисел.*

Доказательство. Пусть A — счетное пространство. Так как пространство A топологически содержится в множестве $\mathscr{C}$, его можно считать подмножеством пространства действительных чисел. В силу классической теоремы теории упорядоченных множеств, множества $A \cup \mathscr{R}$ и $\mathscr{R}$ имеют один и тот же порядковый тип, т. е. существует *возрастающая* функция f, отображающая множество $A \cup \mathscr{R}$ на $\mathscr{R}$. Эта функция непрерывна, ибо если дана последовательность $x_1 < x_2 < \ldots$, сходящаяся к точке x (предполагается, что точки x_n и x принадлежат множеству $A \cup \mathscr{R}$), то x является в множестве $A \cup \mathscr{R}$ первой точкой, следующей за всеми точками x_n, и, в силу подобия множеств $A \cup \mathscr{R}$ и $\mathscr{R}$, точка $f(x)$ в множестве $\mathscr{R}$ обладает тем же свойством по отношению к последовательности $f(x_1), f(x_2), \ldots$.

Допустим теперь, что $f(x) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$; тогда существовало бы рациональное число, одновременно большее всех чисел $f(x_n)$ и меньшее числа $f(x)$, что, очевидно, невозможно.

Таким образом, доказано, что функция f непрерывна. По тем же соображениям обратная функция f^{-1} также непрерывна; следовательно, f есть гомеоморфизм, отображающий множество A на некоторое подмножество множества $\mathscr{R}$.

Заметим, что аналогичный метод позволяет легко доказать, что *все счетные пространства, плотные в себе, имеют один и тот же топологический тип* (т. е. гомеоморфны) [1].

---

[1]) См. Серпинский [5], [1].

§ 27. Пространства размерности n

I. Теоремы об объединении.

Теорема 1. *Объединение n-мерного и нульмерного множеств имеет размерность $\leqslant n+1$.*

Иначе говоря, из формул $\dim(\mathscr{X}-Q)=n$ и $\dim Q=0$ следует формула $\dim \mathscr{X} \leqslant n+1$.

Множество $Q \cup p$ нульмерно, какова бы ни была точка p (§ 26, III, следствие 3), поэтому существует сколь угодно малая окрестность G точки p, такая, что $Q \cap \mathrm{Fr}(G)=0$ (§ 25, II, теорема 2_0), т. е. $\mathrm{Fr}(G) \subset \mathscr{X}-Q$, откуда $\dim \mathrm{Fr}(G) \leqslant n$. Следовательно, $\dim \mathscr{X} \leqslant n+1$.

Теорема 2[1]). *Если пространство можно представить в виде (конечного или бесконечного) объединения замкнутых n-мерных множеств: $\mathscr{X}=A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, то это пространство имеет размерность n.*

Доказательство. Теорема справедлива при $n=0$ (§ 26, III, теорема 1). Предположим, что она справедлива при $n-1$. Положим

$$B_1=A_1 \quad \text{и} \quad B_k=A_k-(A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}).$$

Следовательно, множества B_k представляют собой непересекающиеся F_σ-множества и

$$\mathscr{X}=B_1 \cup B_2 \cup \ldots, \qquad \dim B_k \leqslant n.$$

В § 25, III, 3 положим $B_k=E \subset E_{(n)}$ и $S_k=E \cap S$; тогда множество S_k является счетным объединением множеств размерности $\leqslant n-1$, замкнутых в множестве B_k и таких, что $\dim(B_k-S_k) \leqslant 0$.

Множества, замкнутые в B_k, являются F_σ-множествами, так как B_k есть F_σ-множество, и счетное объединение F_σ-множеств размерности $n-1$, по предположению индукции, $(n-1)$-мерно, поэтому $\dim S_k \leqslant n-1$, откуда по той же причине

$$\dim(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) \leqslant n-1.$$

Поскольку множества B_k не пересекаются, имеем

$$B_i \cap \left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_i \cap B_k-S_k)=B_i-S_i.$$

Таким образом, множество B_i-S_i как пересечение F_σ-множества B_i и множества $\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$ является F_σ-множеством в множестве $\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$.

[1]) См. Гуревич [2], Тумаркин [2]. О компактном пространстве см. Менгер [1] и Урысон [5].

Следовательно, множество $\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k - S_k)$, рассматриваемое как пространство, является объединением счетного числа F_σ-множеств размерности $\leqslant 0$. Поэтому $\dim \bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k - S_k) \leqslant 0$. Итак, равенство $\mathscr{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k - S_k)\right)$ является представлением пространства в виде объединения множества размерности $\leqslant n-1$ и множества размерности $\leqslant 0$. Следовательно, в силу теоремы 1, пространство имеет размерность $\leqslant n$.

Следствие 2а. *Объединение счетного множества n-мерных F_σ-множеств есть n-мерное множество.*

Следствие 2б. *Объединение двух n-мерных множеств, одно из которых является одновременно F_σ- и G_δ-множеством, есть n-мерное множество.*

Следствие 2в. *Если к (непустому) множеству добавить одну точку, то его размерность не изменится.*

Следствие 2г. *Пусть дано множество E и целое число n; существует множество S типа F_σ, такое, что*

$$\dim(E \cap S) \leqslant n-1, \quad E_{(n)} \subset (E - S)_{(0)} \quad \text{и} \quad \dim[E_{(n)} - S] \leqslant 0.$$

В частности, *любое n-мерное пространство является объединением $(n-1)$-мерного F_σ-множества и 0-мерного G_δ-множества.*

Следствие 2д. *Пусть G — открытое множество; из условия $\dim(E \cap G) \leqslant n$ следует, что $E_{(n)} = (E - G)_{(n)}$.*

Следствие 2е. *Из условий $\mathscr{X} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \quad A_k = \bar{A}_k$,*

$$\dim_p A_1 \leqslant n \quad \textit{и} \quad \dim A_k \leqslant n \quad \textit{при} \quad k > 1$$

следует, что $\dim_p \mathscr{X} \leqslant n$.

Следствия 2а—2в легко получить из теоремы 2 (см. доказательство следствий в § 26, III).

Из следствия 2а можно вывести, что $\dim(E \cap S) \leqslant n-1$, если взять множество S из § 25, III, 3 и множество $E \cap S$ рассматривать как пространство.

В частности, пусть множество E совпадает со всем пространством (n-мерным), тогда $E_{(n)} = \mathscr{X}$ и $\mathscr{X} = (\mathscr{X} - S)_{(0)}$, откуда $\dim(\mathscr{X} - S) = 0$.

Таким образом, следствие 2г установлено. Заменяя в этом следствии множество E соответственно множествами $E - G$ и $E \cap G$, мы докажем существование двух F_σ-множеств S и W, таких, что

$$\dim(S \cap E - G) \leqslant n-1, \quad (E-G)_{(n)} \subset (E-G-S)_{(0)},$$
$$\dim(W \cap E \cap G) \leqslant n-1 \quad \text{и} \quad \dim(E \cap G - W) \leqslant 0,$$

так как, по предположению, $E \cap G \subset (E \cap G)_{(n)}$. Итак, множество $E-G-S$ получается из множества $(E-G-S \cup (E \cap G) - W)$ с помощью вычитания открытого множества G, пересечение которого с последним множеством нульмерно; из § 26, III, следствия 4 заключаем, что

$$(E-G-S \cup (E \cap G) - W)_{(0)} = (E-G-S)_{(0)}.$$

Поскольку множества $S \cap E - G$ и $W \cap E \cap G$ имеют размерность $\leqslant n-1$ и, кроме того, являются F_σ-множествами относительно E, из следствия 2а вытекает, что размерность их объединения также $\leqslant n-1$. Следовательно (§ 25, III, 5),

$$(E-G-S \cup (E \cap G) - W)_{(0)} \subset$$
$$\subset [E-G-S \cup (E \cap G) - W \cup (S \cap E) - G \cup (W \cap E \cap G)]_{(n)} = E_{(n)}$$

и

$$(E-G)_{(n)} \subset (E-G-S)_{(0)} \subset E_{(n)},$$

откуда вытекает следствие 2д. Для доказательства следствия 2е положим $E = \mathscr{X}$ и $G = \mathscr{X} - A_1$. В силу следствия 2а, $\dim(A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \leqslant n$, откуда $\dim G \leqslant n$. Согласно следствию 2д, из предположения, что $p \in (\mathscr{X} - G)_{(n)}$, вытекает, что $\dim_p \mathscr{X} \leqslant n$.

Теорема 3[1]). *Для того чтобы (непустое) пространство имело размерность $\leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось объединением $(n+1)$ множеств размерности* 0.

При $n=0$ теорема очевидна; предположим, что она верна при $n-1$. В силу следствия 2г, n-мерное пространство является объединением 0-мерного и $(n-1)$-мерного множеств. Разлагая последнее множество на n нульмерных множеств, получаем разложение данного пространства в сумму $(n+1)$ нульмерных множеств.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что объединение $(n+1)$ нульмерных множеств имеет размерность $\leqslant n$.

Следствие 3а[2]). *Если* $\dim A = n$ *и* $\dim B = m$, *то*

$$\dim(A \cup B) \leqslant n+m+1.$$

---

[1]) См. Гуревич [2] и Тумаркин [2].

[2]) Это следствие с помощью полной индукции можно вывести и из определения размерности (более точно, из § 25, II (2)). См. Менгер [4], стр. 114.

II. Отделимость замкнутых множеств.

Теорема 1[1]) (см. § 26, II, 2). *Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся множества в n-мерном пространстве; тогда существует открытое множество G, такое, что*

$$A \subset G, \quad \overline{G} \cap B = 0 \quad \text{и} \quad \dim[\operatorname{Fr}(G)] \leqslant n-1.$$

Более общим образом: *пусть A и B — два замкнутых непересекающихся множества, E — множество размерности $n \geqslant 0$ (расположенные в пространстве $\mathscr{X}$ произвольной размерности); тогда существуют два замкнутых множества M и N, таких, что*

$$\mathscr{X} = M \cup N, \quad A \cap N = 0 = B \cap M \quad \text{и} \quad \dim(E \cap M \cap N) \leqslant n-1.$$

В самом деле (§ 22, IV, 2), существует непрерывное отображение f пространства $\mathscr{X}$ в метрическое сепарабельное пространство $\mathscr{X}^*$, содержащее две точки a и b, такое, что $f^{-1}(a) = A$, $f^{-1}(b) = B$, причем отображение f есть гомеоморфизм на множестве $\mathscr{X} - (A \cup B)$. Следовательно,

$$\dim f[E-(A \cup B)] = \dim[E-(A \cup B)] \leqslant n,$$

и так как

$$f(E) \cup a \cup b = f[E-(A \cup B)] \cup a \cup b,$$

то, согласно следствию 2в из п. I,

$$\dim[f(E) \cup a \cup b] \leqslant n.$$

В силу § 25, II, 2, существует открытое множество G, такое, что

$$a \in G, \quad b \in \mathscr{X}^* - \overline{G} \quad \text{и} \quad \dim[f(E) \cap (\overline{G} - G)] \leqslant n-1.$$

Положим $M = f^{-1}(\overline{G})$ и $N = f^{-1}(\mathscr{X}^* - G) = \mathscr{X} - f^{-1}(G)$. Тогда множества M и N замкнуты, так как функция f непрерывна. Далее, $\mathscr{X}^* = \overline{G} \cup (\mathscr{X}^* - G)$, поэтому $\mathscr{X} = M \cup N$.

Из условия $a \in G$ следует, что $(a) \cap (\mathscr{X}^* - G) = 0$, откуда

$$A \cap N = f^{-1}(a) \cap f^{-1}(\mathscr{X}^* - G) = f^{-1}[(a) \cap (\mathscr{X}^* - G)] = f^{-1}(0) = 0,$$

а из условия $b \in \mathscr{X}^* - \overline{G}$ следует, что $B \cap M = 0$.

Наконец, так как множества $E \cap M \cap N$ и $f(E) \cap (\overline{G} - G)$ гомеоморфны (поскольку $M \cap N \subset \mathscr{X} - (A \cup B)$), $\dim(E \cap M \cap N) \leqslant n-1$.

Для вывода первой части теоремы 1 положим

$$E = \mathscr{X} \quad \text{и} \quad G = \mathscr{X} - N.$$

---

[1]) См. Гуревич [2], Тумаркин [2], Урысон [5].

Замечание. Теорема 1 — в случае n-мерного пространства — дает более сильное свойство, чем свойство нормальности. Очевидно, что в нашем случае аксиому отделимости можно было бы сформулировать следующим образом: любую пару замкнутых непересекающихся множеств можно отделить замкнутым множеством. Этому утверждению соответствует

Следствие 1а. *Любую пару замкнутых непересекающихся множеств, расположенных в n-мерном пространстве, можно отделить замкнутым множеством размерности* $\leqslant n-1$.

В самом деле, граница множества G, рассмотренного в теореме 1 есть множество размерности $\leqslant n-1$, отделяющее множества A и B.

Следствие 1б. *Условие теоремы* 1 *необходимо и достаточно для того, чтобы пространство имело размерность* $\leqslant n$.

Это условие является необходимым, в силу теоремы 1. Обратно, если отождествить множество A с данной точкой p, а множество B — с дополнением к некоторой открытой окрестности этой точки, то из рассматриваемого условия будет следовать, что $\dim_p \mathscr{X} \leqslant n$.

Теорему 1 можно обобщить следующим образом:

Следствие 1в[1]). *Пусть в n-мерном пространстве заданы две системы замкнутых множеств*: $A_0, \ldots, A_n$ *и* $B_0, \ldots, B_n$, *такие, что* $A_i \cap B_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n$; *тогда существуют две системы замкнутых множеств* $M_0, \ldots, M_n$ *и* $N_0, \ldots, N_n$, *такие, что для каждого индекса* $i \leqslant n$

$$(1) \qquad \mathscr{X} = M_i \cup N_i, \qquad A_i \cap N_i = 0 = B_i \cap M_i$$

$$\text{и} \quad \dim(M_0 \cap \ldots \cap M_i \cap N_0 \cap \ldots \cap N_i) \leqslant n-i-1.$$

Множества $M_0, \ldots, M_i$ и $N_0, \ldots, N_i$, удовлетворяющие условию (1), определим по индукции (для фиксированного n). При $i=0$ их существование вытекает из теоремы 1. Допустим, что они определены для целого числа i, такого, что $0 \leqslant i < n$. В теореме 1 положим

$$A = A_{i+1}, \quad B = B_{i+1} \quad \text{и} \quad E = M_0 \cap \ldots \cap M_i \cap N_0 \cap \ldots \cap N_i.$$

Отсюда следует существование двух замкнутых множеств M_{i+1} и N_{i+1}, таких, что

$$\mathscr{X} = M_{i+1} \cup N_{i+1}, \qquad A_{i+1} \cap N_{i+1} = 0 = B_{i+1} \cap M_{i+1},$$

$$\dim(E \cap M_{i+1} \cap N_{i+1}) \leqslant n-i-2,$$

а из этих соотношений вытекает требуемое утверждение.

---

[1]) См. Отто и Эйленберг [1].

Предыдущее следствие позволяет распространить на n-мерные пространства следующее свойство n-мерного куба $\mathcal{I}^n$ (состоящего из точек $(x_1, \ldots, x_n)$, где $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$). Обозначим через A_i и B_i две грани куба, перпендикулярные оси x_i, а через M_i и N_i — две половины куба, разделенные „плоскостью“ $x_i = \frac{1}{2}$. Тогда условие следствия выполняется.

Следующее утверждение касается „продолжения замкнутых множеств“.

Следствие 1г[1]). *Пусть A и B — замкнутые множества, такие, что* $\dim[\mathscr{X} - (A \cup B)] \leqslant n$; *тогда существуют замкнутые множества P и Q, удовлетворяющие условиям*

$$(2) \qquad \mathscr{X} = P \cup Q, \qquad P \cap (A \cup B) = A, \qquad Q \cap (A \cup B) = B,$$
$$\dim[(P \cap Q) - (A \cap B)] \leqslant n - 1.$$

В самом деле, применим к пространству $\mathscr{X}^* = \mathscr{X} - (A \cap B)$ теорему 1, подставляя множество $A - B$ вместо A, множество $B - A$ вместо B и множество $\mathscr{X} - (A \cup B)$ вместо E. Тогда

$$(3) \quad \mathscr{X} - (A \cap B) = M \cup N, \quad (A \cap N) - B = 0 = (B \cap M) - A,$$
$$(4) \qquad \dim[(M \cap N) - (A \cup B)] \leqslant n - 1,$$

откуда $\dim(M \cap N) \leqslant n - 1$, ибо $M \cap N \cap (A \cup B) = 0$, в силу равенств $M \cap N \cap (A - B) = 0 = M \cap N \cap (B - A)$ и $(M \cap N) \cap (A \cap B) = 0$, которые вытекают из формулы (3).

Положим

$$P = M \cup (A \cap B) \quad \text{и} \quad Q = N \cup (A \cap B).$$

Согласно (3), $\mathscr{X} = P \cup Q$. Тогда

$$P \cap (A \cup B) = [M \cup (A \cap B)] \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B) \cup (A \cap B).$$

Итак, в силу (3),

$$M \cap B = (M \cap B - A) \cup (M \cap A \cap B) \subset A,$$

следовательно,

$$P \cap (A \cup B) \subset A.$$

Далее, так как

$$A - B = A - (A \cap B) \subset M \cup N \quad \text{и} \quad (A - B) \cap N = 0,$$

то

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \subset M \cup (A \cap B) = P.$$

Таким образом, $P \cap (A \cup B) = A$.

Из соображений симметрии $Q \cap (A \cup B) = B$. Так как

$$(P \cap Q) - (A \cap B) = [(M \cap N) \cup (A \cap B)] - (A \cap B) \subset M \cap N,$$

то $\dim[(P \cap Q) - (A \cap B)] \leqslant \dim(M \cap N) \leqslant n - 1$.

---

[1]) См. Гуревич [13].

Наконец, множества M и N замкнуты в множестве $\mathscr{X} - (A \cap B)$, поэтому множества P и Q замкнуты (в $\mathscr{X}$).

Замечание. Отметим следующую теорему, обобщающую следствие 3 § 26, II, на n-мерные пространства: *любую непрерывную функцию f, определенную на замкнутом подмножестве F сепарабельного метрического n-мерного пространства, можно продолжить на все пространство так, чтобы множество ее точек разрыва имело размерность $< n$ и чтобы ее значения не выходили за пределы множества $f(F)$* [1]).

III. Разложение n-мерного пространства. Условие D_n.

Теорема 1 [2]) (обобщение теоремы § 26, II, 1). *Пусть задано разложение n-мерного пространства $\mathscr{X}$ в (конечное или бесконечное) объединение открытых множеств:*

$$\mathscr{X} = G_0 \cup G_1 \cup \ldots;$$

тогда существует последовательность открытых множеств $H_0, H_1, \ldots$, такая, что

$$(1) \quad \mathscr{X} = H_0 \cup H_1 \cup \ldots, \quad H_i \subset G_i \quad \text{и} \quad H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}} = 0$$

для любой системы $n+2$ различных индексов $i_0, \ldots, i_{n+1}$.

В самом деле, в силу теоремы 3 из п. I, пространство разлагается в объединение $(n+1)$ нульмерных множеств:

$$\mathscr{X} = Q_0 \cup \ldots \cup Q_n.$$

На основании теоремы 1, § 26, II (множество Q_j рассматривается как пространство), Q_j можно разложить на непересекающиеся множества, открытые относительно Q_j и содержащиеся соответственно в множествах G_i:

$$Q_j = H_{j0} \cup H_{j1} \cup \ldots, \quad \text{где} \quad H_{ji} \subset G_i.$$

Множества $H_{j0}, H_{j1}, \ldots$ попарно отделимы, как непересекающиеся и открытые относительно Q_j. Следовательно, на основании § 21, XI, 2, существует система открытых непересекающихся множеств $V_{j0}, V_{j1}, \ldots$, таких, что, $H_{ji} \subset V_{ji}$. Положим

$$H_i = (V_{0i} \cup \ldots \cup V_{ni}) \cap G_i.$$

Тогда

$$\mathscr{X} = \bigcup_{j=0}^{n} Q_j = \bigcup_{j=0}^{n} \bigcup_i H_{ji} = \bigcup_{j=0}^{n} \bigcup_i (H_{ji} \cap G_i) \subset \bigcup_i \bigcup_{j=0}^{n} (V_{ji} \cap G_i) = \bigcup_i H_i.$$

---

[1]) См. Попруженко [2]. Согласно одному замечанию Отто, можно освободиться от предположения, что значения функции f действительны.

[2]) Теорему 1 для конечного случая получил Менгер [4], стр. 158. См. также Урысон [5].

Наконец, пусть $p \in H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}}$; тогда существуют индекс $j \leqslant n$ и два различных индекса i и i', такие, что $p \in V_{ji} \cap V_{ji'}$. Но это противоречит предположению о том, что множества $V_{j0}, V_{j1}, \ldots$ не пересекаются.

Следствие 1a. *Предположим, что* $\dim G = n$; *тогда последовательность* $G_0, G_1, \ldots$ *в теореме* 4, § 21, VIII, *можно подчинить следующему дополнительному условию*:

(n) $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}} = 0$, *каковы бы ни были* $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n+1}$.

В самом деле, если последовательность $\{G_i\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, § 21, VIII, то последовательность $\{H_i\}$ из теоремы 1 (если положить $\mathscr{X} = G$) также удовлетворяет этим условиям. При этом выполняется условие (n) (если заменить множество G множеством H).

Определение. Пространство *удовлетворяет условию* D_n, если условие теоремы 1 выполняется для любого его *конечного* разложения в объединение открытых множеств.

В силу теоремы 1, *любое пространство размерности* $\leqslant n$ *удовлетворяет условию* D_n. Как мы увидим ниже (во втором томе), обратная теорема также имеет место. Установим теперь некоторые важные для приложений свойства пространств, удовлетворяющих условию D_n; этими свойствами (в силу теоремы 1) обладает каждое пространство размерности $\leqslant n$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$$

—некоторое разложение в конечное объединение открытых множеств пространства, удовлетворяющего условию D_n. *Тогда существует система открытых множеств* $H_0, \ldots, H_m$, *такая, что*

$$(2) \quad \mathscr{X} = H_0 \cup \ldots \cup H_m, \quad \overline{H}_i \subset G_i \quad \text{и} \quad \overline{H}_{i_0} \cap \ldots \cap \overline{H}_{i_{n+1}} = 0,$$

каковы бы ни были индексы $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n+1} \leqslant m$.

В самом деле, в силу следствия, § 14, III, множествам $H_0, \ldots, H_m$ формулы (1) соответствуют открытые множества $H_0^*, \ldots, H_m^*$, такие, что

$$\mathscr{X} = H_0^* \cup \ldots \cup H_m^* \quad \text{и} \quad \overline{H_i^*} \subset H_i.$$

Следовательно, эти множества удовлетворяют соотношению (2) (если подставить их в (2) вместо $H_0, \ldots, H_m$).

Так как множество $\overline{H}_i$ представляет собой замкнутую область, мы выводим из теоремы 2 следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть*

$$\mathscr{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_m$$

— некоторое разложение пространства, удовлетворяющего условию D_n, *в конечное объединение замкнутых множеств. Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует система замкнутых областей* $H_0, \ldots, H_m$, *удовлетворяющих соотношению* (1), *где множество* G_i *есть обобщенный открытый шар радиуса* ε, *центром которого служит множество* F_i.

Теорема 4. *Если пространство, удовлетворяющее условию* D_n, *плотно в себе и открытые множества* G_i *разложения* $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$ *непусты, то множества* H_i *в формуле* (2) *можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли условию* $H_i \neq 0$ *при* $i = 0, \ldots, m$.

Так как пространство плотно в себе, то множества G_i бесконечны. Следовательно, в каждом из них можно выбрать точку p_i так, чтобы точки $p_0, \ldots, p_m$ были попарно различны. Положим

$$G_i^* = G_i - (p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m),$$

тогда

$$\mathscr{X} = G_0^* \cup \ldots \cup G_m^*.$$

В силу условия D_n, существует система открытых множеств $H_0, \ldots, H_m$, такая, что

$$(3) \quad \mathscr{X} = H_0 \cup \ldots \cup H_m, \quad \overline{H}_i \subset G_i^* \subset G_i, \quad \overline{H}_{i_0} \cap \ldots \cap \overline{H}_{i_{n+1}} = 0.$$

Так как $p_i \notin G_j^*$ при $j \neq i$, то $p_i \notin H_j$, откуда, в силу первого из равенств (3), $p_i \in H_i$.

Рассматривая относительное условие D_n, можно получить следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть в пространстве (произвольной размерности) заданы множество* E, *удовлетворяющее условию* D_n, *и система открытых множеств* $G_0, \ldots, G_m$, *такая, что* $E \subset G_0 \cup \ldots \cup G_m$; *тогда существует система открытых множеств* $H_0, \ldots, H_m$, *удовлетворяющая условиям*

$$(4) \quad E \subset H_0 \cup \ldots \cup H_m, \quad H_i \subset G_i \quad \text{и} \quad H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}} = 0,$$

каковы бы ни были индексы $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n+1} \leqslant m$.

Если, кроме того, множество E *замкнуто и* $G_0 \cup \ldots \cup G_m = \mathscr{X}$, *то существует система открытых множеств* $Q_0, \ldots, Q_m$, *такая, что*

$$(5) \quad \mathscr{X} = Q_0 \cup \ldots \cup Q_m, \quad \overline{Q}_i \subset G_i \quad \text{и} \quad E \cap \overline{Q}_{i_0} \cap \ldots \cap \overline{Q}_{i_{n+1}} = 0.$$

Наконец, если множество E *совершенно и* $G_i \neq 0$, $i = 0, \ldots, m$, *то можно считать, что* $Q_i \neq 0$, $i = 0, \ldots, m$.

Доказательство. Множества $E \cap G_i$ открыты в E и удовлетворяют равенству $E = (E \cap G_0) \cup \ldots \cup (E \cap G_m)$, поэтому из свойства D_n, которому удовлетворяет множество E, вытекает существование системы множеств $A_0, \ldots, A_m$, открытых в E, таких, что

$$(6) \quad E = A_0 \cup \ldots \cup A_m, \quad A_i \subset E \cap G_i \subset G_i \text{ и } A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} = 0.$$

В силу теоремы 2 из § 21, XI, существует система открытых множеств $V_0, \ldots, V_m$, такая, что

$$A_i = E \cap V_i \quad \text{и} \quad V_{i_0} \cap \ldots \cap V_{i_{n+1}} = 0.$$

Множества $H_i = V_i \cap G_i$, $i = 0, \ldots, m$, являются искомыми.

В случае, когда множество E замкнуто, положим $R_i = H_i \cup (G_i - E)$. Из соотношения (4) получаем

$$(7) \quad \bigcup_i R_i = \Big(\bigcup_i H_i\Big) \cup \Big(\bigcup_i G_i - E\Big) \supset$$
$$\supset \Big(\bigcup_i H_i\Big) \cup \Big(\bigcup_i G_i - \bigcup_i H_i\Big) = \bigcup_i G_i = \mathscr{X},$$

$$(8) \quad E \cap R_{i_0} \cap \ldots \cap R_{i_{n+1}} = E \cap H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}} = 0 \text{ и } R_i \subset G_i.$$

В силу соотношения (7) и следствия 1, § 14, III, существует система открытых множеств $Q_0, \ldots, Q_m$, такая, что

$$\mathscr{X} = Q_0 \cup \ldots \cup Q_m \quad \text{и} \quad \overline{Q}_i \subset R_i.$$

Из соотношения (8) непосредственно вытекают соотношения (5).

Наконец, в случае, когда множество E совершенно, добавим к соотношениям (6) (в соответствии с теоремой 4) неравенство $A_i \neq 0$. Так как $A_i \subset H_i \subset R_i$, то $R_i \neq 0$. Следовательно, можно допустить, что $Q_i \neq 0$, ибо можно, не нарушая условий (5), добавить к множеству Q_i произвольное (не пустое) открытое множество, граница которого содержится в R_i.

Для приложений нам понадобится следующая

Теорема 6. *Пусть $K_0, \ldots, K_s$ — система открытых множеств, такая, что $\mathscr{X} = K_0 \cup \ldots \cup K_s$, и $A_0, \ldots, A_l$ — система замкнутых множеств, пересечение которых $A_0 \cap \ldots \cap A_l$ удовлетворяет условию D_n. Тогда существует система открытых множеств $G_0, \ldots, G_m$, такая, что $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$, причем каждому индексу $i \leqslant m$ соответствует индекс $i' \leqslant s$, для которого $G_i \subset K_{i'}$, и каждой системе индексов $i_0 < i_1 < \ldots$ $\ldots < i_{n+1} \leqslant m$ соответствует индекс $j \leqslant l$, такой, что*

$$A_j \cap G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}} = 0.$$

Положим $E=A_0 \cap \ldots \cap A_l$. В силу теоремы 5, существуют две системы открытых множеств $Q_0, \ldots, Q_s$ и $H_0, \ldots, H_s$, такие, что

$$\mathscr{X}=Q_0 \cup \ldots \cup Q_s, \quad Q_i \subset K_i, \quad E \cap Q_{i_0} \cap \ldots \cap Q_{i_{n+1}}=0,$$
$$E \subset H_0 \cup \ldots \cup H_s, \quad H_i \subset Q_i, \quad H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}}=0.$$

Тогда

$$\mathscr{X}=Q_0 \cup \ldots \cup Q_s=\bigcup_{i,\,j}(Q_i-A_j) \cup \bigcap_j A_j,$$

и так как

$$\bigcap_j A_j=E \subset \bigcup_i H_i,$$

то

$$\mathscr{X}=\bigcup_{i,\,j}(Q_i-A_j) \cup \bigcup_i H_i.$$

Обозначим через $G_0, \ldots, G_m$ слагаемые этого разложения (их всего $(s+1)(l+2)$). Пусть $i_0<\ldots<i_{n+1} \leqslant m$. Предположим противное, т. е. что для любого индекса $j \leqslant l$ мы имеем $A_j \cap G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}} \neq 0$. Следовательно, ни одно из множеств $G_{i_0}, \ldots, G_{i_{n+1}}$ не принадлежит системе множеств (Q_i-A_j), где $i \leqslant s$, $j \leqslant l$. Поэтому все они принадлежат системе $H_0, \ldots, H_s$. Но это противоречит равенству $H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}}=0$.

IV. Продолжение n-мерных множеств.

Теорема 1[1]) (обобщение теоремы 1 из § 26, IV). *Любое n-мерное множество содержится в некотором n-мерном G_δ-множестве.*

В самом деле, если E — некоторое n-мерное множество, то $E=Q_0 \cup \ldots \cup Q_n$, где множества Q_i 0-мерны (теорема 3, п. I). В силу теоремы 1 из § 26, IV, каждое множество Q_i содержится в некотором 0-мерном G_δ-множестве: $Q_i \subset Q_i^*$. Следовательно, $E \subset Q_0^* \cup \ldots \cup Q_n^*$, но это объединение является n-мерным G_δ-множеством (в силу той же теоремы I, 3).

V. Размерностное ядро.

Теорема 1 (теорема Менгера [3]). *Множество всех тех точек n-мерного пространства, в которых пространство имеет размерность n, т. е. множество $\mathscr{X}-\mathscr{X}_{(n-1)}$ (называемое „размерностным ядром"), имеет размерность $\geqslant n-1$.*

В силу следствия 2г, п. I, существует множество S типа F_σ, такое, что

$$\dim S \leqslant n-2 \quad \text{и} \quad \dim(\mathscr{X}_{(n-1)}-S) \leqslant 0.$$

[1]) Теорема Тумаркина ([2], стр. 653).

Так как, согласно § 25, III, 2, множество $\mathcal{X}-\mathcal{X}_{(n-1)}$ типа F_σ, то из следствия 2а, п. I и предположения о том, что $\dim(\mathcal{X}-\mathcal{X}_{(n-1)})\leqslant\leqslant n-2$, вытекает, что

$$\dim[(\mathcal{X}-\mathcal{X}_{(n-1)})\cup S]\leqslant n-2.$$

Но тогда из тождества

$$\mathcal{X}=[(\mathcal{X}-\mathcal{X}_{(n-1)})\cup S]\cup[\mathcal{X}_{(n-1)}-S]$$

следует, что $\dim\mathcal{X}\leqslant n-1$, ибо при добавлении 0-мерного множества размерность возрастет самое большее на единицу (теорема 1, п. I).

Замечание. Доказано, что каждое (непустое) открытое в ядре множество имеет размерность $\geqslant n-1$. (См. Менгер [3].) Замыкание ядра имеет в каждой точке ядра размерность n (см. Гуревич [2], Тумаркин [2], Менгер [1] и Урысон [5]).

VI. Слабо n-мерное пространство. Пространство размерности n называется *слабо n-мерным*, если его размерностное ядро не является n-мерным (тогда, в силу теоремы 1, п. V, это ядро имеет размерность $n-1$).

В качестве примера слабо одномерного множества рассмотрим множество точек плоскости $(x, f(x))$, где x принадлежит канторову множеству $\mathcal{C}$:

$$x=\frac{2}{3^{n_1}}+\frac{2}{3^{n_2}}+\ldots,\qquad n_1<n_2<\ldots,$$

и где

$$f(x)=\frac{(-1)^{n_1}}{2}+\frac{(-1)^{n_2}}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n_k}}{2^k}+\ldots,\qquad f(0)=0.$$

Ядро этого множества состоит из точек, абсцисса которых представляет собой правый конец интервала, смежного с $\mathcal{C}$[1]). Так как это множество счетно, то оно нульмерно.

Доказано[2]), что для любого n существуют слабо n-мерные множества.

VII. Семейства, определяющие размерность. Свойство пространства иметь в точке p размерность $\leqslant n$ является частным случаем следующего свойства: пусть F — некоторое семейство множеств; мы будем говорить, что оно *определяет размерность* пространства

---

[1]) См. Куратовский [19]. Первый пример множества, имеющего размерность 0 в каждой точке, за исключением счетного числа точек, был дан Серпинским [8].

[2]) Теорема Мазуркевича [6].

в точке p, если существуют произвольно малые окрестности точки p, границы которых принадлежат семейству F[1]).

В частности, если F — семейство множеств размерности $\leqslant n-1$, то точки, в которых семейство F определяет размерность пространства, совпадают с теми точками, в которых пространство имеет размерность $\leqslant n$.

Пусть семейство F обладает двумя следующими свойствами (которые выполнены для семейства множеств размерности $\leqslant n-1$):

1° оно *наследственно*, т. е. из включений $X \subset Y \in F$ следует, что $X \in F$;

2° оно F_σ-*аддитивно*, т. е. из двух условий $X_n \in F$ и $X_n = \overline{X}_n \cap S$, где $S = X_1 \cup X_2 \cup \ldots$, следует, что $S \in F$[2]).

Как показал Гуревич (в цитированной работе), большую часть теории размерности можно свести к изучению 0-мерных множеств и F_σ-аддитивных наследственных семейств.

Его метод рассуждения (более абстрактный, чем приведенный в тексте) имеет то преимущество, что его можно применять к решению проблем, не относящихся к теории размерности.

Сформулируем без доказательств (которые, впрочем, аналогичны доказательствам соответствующих теорем из § 26) некоторые основные теоремы о наследственных F_σ-аддитивных семействах F.

1. Для того чтобы семейство F определяло размерность пространства в каждой точке, необходимо и достаточно, чтобы пространство являлось объединением множества, принадлежащего семейству F, и множества размерности $\leqslant 0$.

2. Для того чтобы в пространстве была определена размерность с помощью семейства F, необходимо и достаточно, чтобы каждую пару замкнутых непересекающихся множеств можно было отделить замкнутым множеством, принадлежащим семейству F.

3. Пусть F и F_1 — два наследственных F_σ-аддитивных семейства;

---

[1]) К. Менгер стоит на еще более общей точке зрения, а именно: точка называется „E-точкой", если она принадлежит произвольно малым окрестностям, обладающим свойством E. См. Менгер [2].

Термин „определять размерность пространства", которым я обязан Кнастеру, заменяет здесь термин „Unstetigkeitspunkt" Гуревича, применяемый последним в работе [2].

Одно свойство, аналогичное (но не эквивалентное) свойству быть точкой, в которой определена размерность пространства, изучалось Уайберном: речь идет о точках p вида $p = G_1 \cap G_2 \cap \ldots$, где множество G_n есть окрестность точки p и $\mathrm{Fr}(G_n) \in F$. См. Уайберн [2].

[2]) М. Гуревич называет наследственное и F_σ-аддитивное семейство „Normalbereich".

Семейства, которые удовлетворяют условиям 1° или 2° и, кроме того, содержат все множества, гомеоморфные своим элементам, изучались Кунугуи при исследовании связей между понятиями размерности и топологического ранга („размерности в смысле Фреше"). См. Кунугуи [1], стр. 41.

тогда семейство, состоящее из объединений $X \cup Y$, где $X \in \boldsymbol{F}$ и $Y \in \boldsymbol{F}_1$ — наследственное $\boldsymbol{F}_\sigma$-аддитивное.

4. Семейство множеств, размерность которых определена семейством $\boldsymbol{F}$, наследственно и $\boldsymbol{F}_\sigma$-аддитивно.

5. Если пространство разлагается в счетное объединение замкнутых множеств, размерность каждого из которых, за исключением, быть может, одного выделенного, определена семейством $\boldsymbol{F}$, тогда как размерность выделенного множества определена семейством $\boldsymbol{F}$ в точке p, то размерность всего пространства также определена семейством $\boldsymbol{F}$ в точке p.

6. Множество точек, в которых размерность пространства не определена семейством $\boldsymbol{F}$ („ядро“ пространства), есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество. Если это множество непусто, то оно не принадлежит семейству $\boldsymbol{F}$.

VIII. Размерность прямого произведения.

Теорема 1[1]. $\dim(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \leqslant \dim \mathscr{X} + \dim \mathscr{Y}$. *Кроме того,*

$$(\dim_a \mathscr{X} = 0 = \dim_b \mathscr{Y}) \Rightarrow \dim_{(a,b)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = 0.$$

Доказательство. Положим $\dim_a \mathscr{X} = m$ и $\dim_b \mathscr{Y} = n$. Тогда существуют два открытых множества R и S, таких, что

$$a \in R, \qquad \delta(R) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \dim[\mathrm{Fr}(R)] \leqslant m - 1,$$

$$b \in S, \qquad \delta(S) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \dim[\mathrm{Fr}(S)] \leqslant n - 1.$$

В силу § 15, III (3) и § 21, VI (4), имеем

$$(1) \quad \mathrm{Fr}(R \times S) = [\mathrm{Fr}(R) \times \overline{S}] \cup [\overline{R} \times \mathrm{Fr}(S)], \quad \delta(R \times S) < \varepsilon.$$

Пусть $m = 0 = n$; тогда $\dim[\mathrm{Fr}(R)] = -1 = \dim[\mathrm{Fr}(S)]$, т. е. $\mathrm{Fr}(R) = 0 = \mathrm{Fr}(S)$, поэтому $\mathrm{Fr}(R \times S) = 0$. Следовательно,

$$\dim_{(a,b)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = 0,$$

чем завершается доказательство второй части теоремы.

Таким образом, первая часть теоремы доказана в случае $\dim \mathscr{X} = 0 = \dim \mathscr{Y}$. Далее проведем доказательство по индукции.

Предположим, что теорема верна для всех пар $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, таких, что

$$\dim \mathscr{X} + \dim \mathscr{Y} < k.$$

Так как

$$\dim[\mathrm{Fr}(R)] + \dim \overline{S} \leqslant (m-1) + n \leqslant k - 1,$$

---

[1]) См. Менгер [4], стр. 246.

то, по предположению, мы имеем

$$\dim [\mathrm{Fr}(R) \times \bar{S}] \leqslant k-1$$

и аналогично

$$\dim [\bar{R} \times \mathrm{Fr}(S)] \leqslant k-1.$$

В силу теоремы 2, п. I, имеет место соотношение

$$\dim \{[\mathrm{Fr}(R) \times \bar{S}] \cup [\bar{R} \times \mathrm{Fr}(S)]\} \leqslant k-1;$$

согласно (1), $\dim_{(a,\, b)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \leqslant k$, следовательно, $\dim(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \leqslant k$.

Замечание 1. В предыдущей теореме знак $\leqslant$ нельзя заменить знаком $=$. Например, если $\mathscr{X}$ — множество точек гильбертова пространства (см. § 21, I, пример 3), все координаты которых рациональны, то $\dim \mathscr{X} = 1 = \dim(\mathscr{X} \times \mathscr{X})$ (см. Эрдёш [1], Гуревич и Уолмен [1], стр. 13, 34).

Л. С. Понтрягин привел еще более яркий пример, в котором каждое из двух компактных метрических пространств имеет размерность 2, а их произведение имеет размерность 3 (см. Понтрягин [1]) [1]).

Замечание 2. Если пространство $\mathscr{X}$ компактно и $\dim \mathscr{Y} = 1$, то

$$\dim(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = \dim \mathscr{X} + 1$$

(см. Гуревич [6]).

Замечание 3. Вторую часть теоремы нельзя распространить на случай $n > 0$ (см. Менгер [5]). Это можно видеть на примере произведения $\mathscr{E} \times \mathscr{X}$, где пространство $\mathscr{X}$ есть объединение точки 0 и интервалов $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ с нечетным n.

IX. Непрерывные и взаимно однозначные отображения n-мерных пространств. В силу следствия 1б, § 22, II, любое метрическое сепарабельное пространство является непрерывным взаимно однозначным образом некоторого 0-мерного пространства. Эту теорему можно усилить следующим образом:

Теорема [2]). *Любое метрическое сепарабельное пространство $\mathscr{X}$ мощности $\mathfrak{c}$ является непрерывным взаимно однозначным образом некоторого n-мерного сепарабельного пространства для каждого конечного или бесконечного $n \geqslant 0$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай $\dim \mathscr{X} = 0$. Пусть $\mathscr{Y}$ есть n-мерное пространство (например, $\mathscr{Y} = \mathscr{J}^n$, $n \leqslant \aleph_0$). Обозначим через $\boldsymbol{G}$ семейство всех $\boldsymbol{G}_\delta$-множеств пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

[1]) В. Г. Болтянский построил еще более удивительный пример компактного метрического пространства размерности 2, квадрат которого имеет размерность 3. — *Прим. перев.*

[2]) См. Хилгерс [1].

Очевидно, что $\overline{\overline{\boldsymbol{G}}} = \mathfrak{c}$. Следовательно, мы можем положить $\boldsymbol{G} = \{G_x\}$, где точка x меняется в пространстве $\mathscr{X}$ (таким образом, G_x представляет собой некоторую «универсальную» функцию для $\boldsymbol{G}_\delta$-подмножеств пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, см. § 30, XIII).

Пусть отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ таково, что

$$(1) \qquad ([x, f(x)] \in G_x) \Rightarrow (((x) \times \mathscr{Y}) \subset G_x).$$

Это отображение мы определим следующим образом. Если $((x) \times \mathscr{Y}) \subset G_x$, то обозначим через $f(x)$ произвольную точку пространства $\mathscr{Y}$; в противном случае $f(x)$ есть точка пространства $\mathscr{Y}$, такая, что $[x, f(x)] \notin G_x$.

Так как пространство $\mathscr{X}$ является взаимно однозначным непрерывным образом множества

$$I = \mathop{\mathrm{E}}_{x,\, y} [y = f(x)],$$

то остается показать, что $\dim I = n$. В силу теоремы 5, § 26, IV, существует $\boldsymbol{G}_\delta$-множество Z, такое, что

$$(2) \qquad I \subset Z \subset \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \quad \text{и} \quad \dim Z = \dim I.$$

Следовательно, существует точка x_0, такая, что $Z = G_{x_0}$. Отсюда вытекает, что

$$[x_0, f(x_0)] \in G_{x_0}, \text{ поскольку } [x_0, f(x_0)] \in I \subset Z.$$

Поэтому, в силу (1),

$$((x_0) \times \mathscr{Y}) \subset G_{x_0},$$

откуда

$$\dim \mathscr{Y} \leqslant \dim G_{x_0} \leqslant \dim (\mathscr{X} \times \mathscr{Y});$$

но (см. п. VIII) $\dim (\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \leqslant \dim \mathscr{X} + \dim \mathscr{Y} = 0 + n$ и, следовательно, $\dim G_{x_0} = n$, т. е. $\dim Z = n$. Наконец (согласно (2)), $\dim I = n$.

2. Пусть $\mathscr{X}$ имеет произвольную размерность. В силу следствия 1б, § 22, II, существуют множество T размерности 0 и непрерывное взаимно однозначное отображение $f: T \to \mathscr{X}$. Как только что было показано, существуют также множество I размерности n и непрерывное взаимно однозначное отображение $g: I \to T$. Тогда отображение $fg: I \to \mathscr{X}$ непрерывно и взаимно однозначно.

X. Замечания по поводу теории размерности в применении к произвольным метрическим пространствам. В § 25—27 предположение о сепарабельности рассматриваемого пространства было существенно. Следует заметить, что некоторые результаты, установленные для сепарабельных пространств, можно распространить на произвольные метрические пространства (и даже на нормальные пространства), если ввести подходящее определение размерности.

Существует несколько определений размерности, эквивалентных для метрических сепарабельных пространств. Совсем иначе дело обстоит в случае, когда пространство не предполагается сепарабельным. В этом случае мы имеем несколько, вообще говоря, различных определений.

Во-первых, *индуктивная размерность*, обозначаемая $\operatorname{ind}\mathscr{X}$, которую мы определили в § 25,I (условия 1—3). Затем *комбинаторная размерность*, обозначаемая $\dim\mathscr{X}$, где равенство $\dim\mathscr{X}\leqslant n$ эквивалентно условию D_n (см. § 27, III). Наконец „большая" индуктивная размерность (см. Чех [1]), обозначаемая $\operatorname{Ind}\mathscr{X}$; она определяется так: $\operatorname{Ind}0=-1$ и $\operatorname{Ind}\mathscr{X}\leqslant n$ тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F и каждого открытого множеств G, содержащего F, существует открытое множество H, такое, что

$$F\subset H,\qquad \overline{H}\subset G,\qquad \operatorname{Ind}\operatorname{Fr}(H)\leqslant n-1.$$

Согласно одной важной теореме Катетова [3], [4] [1]), равенство $\operatorname{Ind}\mathscr{X}=\dim\mathscr{X}$ имеет место для произвольных метрических пространств.

Однако для более общих пространств определения, данные выше, могут не совпадать. Например, существует компактное пространство $\mathscr{X}$, такое, что $\dim\mathscr{X}=1$, тогда как $\operatorname{ind}\mathscr{X}=2$ (см. Лунц [1], Локуциевский [1], Вопенка [1]).

С вышеупомянутым равенством связаны следующие неравенства [2]): $\dim\mathscr{X}\leqslant\operatorname{ind}\mathscr{X}$, имеющее место для компактных пространств (Александров) и пространств Линделёфа (Морита, Смирнов); $\dim\mathscr{X}\leqslant\operatorname{Ind}\mathscr{X}$, имеющее место для произвольных нормальных пространств. Существует [3]) нормальное пространство $\mathscr{X}$, для которого $\operatorname{ind}\mathscr{X}<\operatorname{Ind}\mathscr{X}$ (Смирнов), а также нормальное пространство $\mathscr{X}$, для которого $0=\operatorname{ind}\mathscr{X}<\operatorname{Ind}\mathscr{X}$ (Даукер), и полное метрическое пространство $\mathscr{X}$, для которого $\operatorname{ind}\mathscr{X}=0$ и $\operatorname{Ind}\mathscr{X}=\dim\mathscr{X}=1$.

Добавим, что имеется несколько фундаментальных теорем теории размерности, не допускающих обобщений подобного рода. Такова, например, теорема, утверждающая, что размерность подмножества не превосходит размерности всего пространства; это утверждение не верно для комбинаторной размерности компактных пространств [4]) (однако оно имеет место — в силу одной теоремы Чеха [2] — в совершенно нормальных пространствах).

---

[1]) См. также Морита [3], Даукер и Гуревич [1].

[2]) См. Александров [15], Морита [2], Смирнов [2], Веденисов [4].

[3]) Смирнов [2], Даукер [4], Рой [1].

[4]) См. Александров [16], стр. 26, замечание. См. также Даукер [4].

По поводу различных других обобщений теории размерности см. Александров [18], [19], Даукер [3], Морита [2], Пасынков [1], Проскуряков [1], Смирнов [8], Веденисов [2].

§ 28. Симплексы, комплексы, полиэдры

I. Определения. Пусть $p_0, \ldots, p_n$ — множество точек евклидова пространства (произвольного числа измерений); (геометрически открытым) *симплексом* $(p_0 \ldots p_n)$ называется множество точек p вида

$$(1) \quad p = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_n p_n, \quad \text{где} \quad \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_i > 0$$
$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n);$$

точки p и p_i рассматриваются как векторы [1]).

Точки $p_0, \ldots, p_n$ называются *вершинами симплекса.*

Коэффициенты $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ называются *барицентрическими координатами* точки p относительно точек $p_0, \ldots, p_n$ [2]).

Любой симплекс вида $\left(p_{i_0} \ldots p_{i_k}\right)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, называется *гранью* симплекса $S = (p_0 \ldots p_n)$. Очевидно, что $\overline{S}$ представляет собой объединение всех граней $\left(p_{i_0} \ldots p_{i_k}\right)$ симплекса S и состоит, следовательно, из всех точек p, удовлетворяющих условию, которое получается из условия (1), если заменить строгое неравенство $\lambda_i > 0$ неравенством $\lambda_i \geqslant 0$.

Множество $\overline{S}$ можно также определить как *наименьшее выпуклое* множество, содержащее точки $p_0, \ldots, p_n$ (*выпуклым* называется множество, которое вместе с любой парой точек содержит прямолинейный сегмент, соединяющий эти точки).

Если все грани симплекса S не пересекаются, то этот симплекс называется *простым* (или *невырожденным*). Это условие эквивалентно *линейной независимости* вершин симплекса S; напомним, что *точка p линейно зависит от точек $p_0, \ldots, p_n$, если существует система чисел $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$*, удовлетворяющая двум равенствам (1). В других терминах множество всех точек, линейно зависящих от точек $p_0, \ldots, p_n$, называется *линейным многообразием*, определенным этими точками; следовательно, симплекс является простым, если никакая из его вершин не принадлежит линейному многообразию, определенному всеми другими вершинами.

Говорят, что простой симплекс с $n+1$ вершинами имеет *геометрическую размерность n*, так же как и линейное многообразие, определенное $n+1$ линейно независимыми точками. Как мы увидим

---

[1]) Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{E}^k$ заданы два вектора

$$p = (x_1, \ldots, x_k) \quad \text{и} \quad r = (y_1, \ldots, y_k);$$

по определению,

$$p + r = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k).$$

Пусть λ — действительное число; по определению, $\lambda p = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k)$.

[2]) Точка p представляет собой центр тяжести системы точек $p_0, \ldots, p_n$, если точка p_i является носителем массы λ_i.

(в п. II), геометрическая размерность симплекса совпадает с его топологической размерностью (в смысле определения § 25).

В частности, симплекс размерности $n=0$ сводится к одной точке; (простой) симплекс (p_0p_1) есть прямолинейный сегмент без конечных точек; простой симплекс $(p_0p_1p_2)$ есть внутренность треугольника.

Теорема 1. *Любая точка p вырожденного симплекса $S=(p_0 \ldots p_n)$ принадлежит некоторой грани $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$ при $k<n$.* (См. Александров и Хопф [1], стр. 607.)

Если симплекс S является вырожденным, то существует система действительных чисел $\mu_0, \ldots, \mu_n$, не обращающихся одновременно в нуль и удовлетворяющих условиям:

$$\mu_0 p_0 + \ldots + \mu_n p_n = 0 \quad \text{и} \quad \mu_0 + \ldots + \mu_n = 0.$$

Можно считать, что $\mu_n > 0$ и что, кроме того, среди чисел λ_i/μ_i, у которых $\mu_i > 0$, число λ_n/μ_n является наименьшим (числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ удовлетворяют условию (1)).

Положим

$$\lambda_i^* = \lambda_i - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\mu_i \quad \text{при} \quad i=0, 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$p = \lambda_0^* p_0 + \ldots + \lambda_n^* p_n, \quad \lambda_0^* + \ldots + \lambda_n^* = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_i^* \geqslant 0.$$

Так как $\lambda_n^* = 0$, то $p \in \overline{(p_0 \ \ldots \ p_{n-1})}$, что и требовалось доказать.

Допустив в этой теореме, что целое число k является наименьшим из возможных, получаем, что *любая точка симплекса S принадлежит некоторой простой грани симплекса S*. Отсюда вытекает также, что

$$\overline{S} = F_0 \cup \ldots \cup F_m, \tag{2}$$

где $F_0, \ldots, F_m$ — система *простых* граней симплекса S.

Говорят, что множество (конечное или бесконечное) точек $p_0, p_1, \ldots$ пространства $\mathscr{E}^r$ находится *в общем положении* (в этом пространстве), если любая система $p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}$, $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$, где $k \leqslant r$, линейно независима.

Теорема 2. *Пусть в пространстве $\mathscr{E}^r$ (или в кубе $\mathscr{I}^r$) заданы последовательность точек $a_0, a_1, \ldots$ и последовательность положительных чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$. Тогда существует последовательность точек $p_0, p_1, \ldots$, находящихся в общем положении, такая, что*

$$|p_i - a_i| < \varepsilon_i, \quad \text{где } i=0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть $p_0 = a_0$. Для того чтобы определить точку p_i, рассмотрим все линейные многообразия, определяемые системами точек $p_{j_0}, \ldots, p_{j_k}$, $j_0 < \ldots < j_k < i$ и $k < r$. Так как каждое из них нигде не плотно, то и их объединение является нигде не плотным множеством. Обозначим теперь через p_i любую точку, не принадлежащую этому объединению и удовлетворяющую неравенству $|p_i - a_i| < \varepsilon_i$.

Замечания. 1° *Если $r = \aleph_0$, то все симплексы $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$ можно считать простыми* (следовательно, непересекающимися), *каково бы ни было k.*

2° *Если $r \geqslant 2n+1$ и L есть n-мерное линейное многообразие, то точки $p_0, p_1, \ldots$ можно подчинить следующему дополнительному условию: все симплексы $(p_{i_0} \ldots p_{i_l})$ (где $l \leqslant n$) не пересекаются с многообразием L.* В самом деле, обозначим через $p_{-n-1}, \ldots, p_{-1}$ линейно независимое множество точек, определяющее многообразие L, и построим точки p_i при $i \geqslant 0$ с помощью процесса, аналогичного предыдущему.

3° *Точки $p_0, p_1, \ldots$ можно выбрать так, чтобы выполнялось следующее условие: пусть $V_0, \ldots, V_l$ — линейные многообразия, определенные непересекающимися множествами, состоящими соответственно из $k_0+1, \ldots, k_l+1$ элементов множества $p_0, p_1, \ldots$, где $k_0 \leqslant r, \ldots, k_l \leqslant r$; тогда геометрическая размерность линейного многообразия $V_0 \cap \ldots \cap V_l$* (предполагаемого непустым) *удовлетворяет соотношению*

$$\dim(V_0 \cap \ldots \cap V_l) = k_0 + \ldots + k_l - lr. \tag{3}$$

Следовательно, в частности, *если $r \geqslant 2n+1$, то симплексы $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, $k \leqslant n$, попарно не пересекаются.*

Для определения точки p_i рассмотрим — наряду с построенными выше многообразиями — всевозможные их пересечения, а также все многообразия $\neq \mathscr{E}^r$, определяемые произвольными парами этих пересечений. Тогда p_i — любая точка, не принадлежащая объединению этих многообразий и находящаяся на расстоянии $< \varepsilon_i$ от точки a_i [1]).

Конечное семейство симплексов называется *комплексом*. Назовем *замыканием* $\bar{C}$ комплекса C комплекс, состоящий из всех граней симплексов, принадлежащих комплексу C. Комплекс C называется *замкнутым*, если $C = \bar{C}$, т. е. если вместе с каждым симплексом $(p_0 \ldots p_n)$ он содержит в качестве элементов все симплексы $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, где $i_0 < \ldots < i_k \leqslant n$.

---

[1]) См. Александров и Хопф [1], стр. 596. При доказательстве используется то, что размерность многообразия, натянутого на два многообразия U и V, такие, что $U \cap V \neq 0$, равна $\dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

Комплекс $\overline{C}$ называется *простым* (или *невырожденным*), если все симплексы комплекса $\boldsymbol{C}$ попарно не пересекаются. В частности, комплекс, состоящий из всех граней простого симплекса, является простым.

Комплекс $\boldsymbol{C}$ называется *n-мерным*, если n — наибольшая размерность симплексов, принадлежащих комплексу $\boldsymbol{C}$.

Множество C называется (замкнутым) *полиэдром*, если существует простой замкнутый комплекс $\boldsymbol{C}=(R_1, \ldots, R_m)$, такой, что

$$C=R_1 \cup \ldots \cup R_m.$$

Очевидно, что полиэдр является компактом.

Всякий полиэдр гомеоморфен полиэдру, являющемуся объединением некоторых граней некоторого простого симплекса.

В самом деле, пусть $\boldsymbol{C}$ — простой замкнутый комплекс с вершинами $q_0, \ldots, q_m$ и S есть m-мерный симплекс $(p_0 \ldots p_m)$. Тогда полиэдр, являющийся объединением всех симплексов $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, таких, что $(q_{i_0} \ldots q_{i_k}) \in \boldsymbol{C}$, гомеоморфен полиэдру $C=\mathsf{S}(\boldsymbol{C})$.

II. Топологическая размерность симплекса. Пусть $S=(p_0 \ldots p_n)$ — простой симплекс и $\boldsymbol{C}=(R_1, \ldots, R_m)$ — простой замкнутый комплекс, такой, что

$$(1) \qquad \overline{S}=R_1 \cup \ldots \cup R_m.$$

Так, например, если $n=2$, т. е. если S — треугольник, и если соединить каждую вершину треугольника с центром противоположной стороны, мы получим разложение треугольника S на 6 треугольников (называемое барицентрическим разложением). Более точно, комплекс $\boldsymbol{C}$ состоит в этом случае из 6 двумерных симплексов, 12 одномерных симплексов и 7 отдельных точек (следовательно, $m=25$).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть F — грань симплекса S, тогда для каждого индекса $j \leqslant m$ либо $R_j \subset F$, либо $R_j \cap F=0$.*

Теорема 2. *Замыкание $\overline{F}$ является объединением симплексов, принадлежащих комплексу, состоящему из всех множеств R_j, таких, что $R_j \subset \overline{F}$.*

Теорема 3. *Каждому $\varepsilon>0$ соответствует простой замкнутый комплекс $\boldsymbol{C}=(R_1, \ldots, R_m)$, удовлетворяющий условию* (1) *и такой, что $\delta(R_j)<\varepsilon$ при $j=1, 2, \ldots, m$.*

Теорема 4 (теорема Шпернера)[1]. *Пусть* $\nu(s)$ — *функция, ставящая в соответствие каждой вершине* s *комплекса* $\boldsymbol{C}$ *положительное целое число, такое, что*

(i) *если* $s \in (p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, *то* $\nu(s)$ — *один из индексов* $i_0, \ldots, i_k$.

Обозначим через $\nu(R)$, *где* $R = (q_0 \ldots q_l)$, *множество* $[\nu(q_0), \ldots, \nu(q_l)]$. *Тогда число* ρ *множеств* R_j, *таких, что* $\nu(R_j) = (0, 1, \ldots, n)$, *всегда нечетно.*

Для доказательства этой теоремы применим индукцию. Наше утверждение очевидно при $n = 0$, ибо в этом случае $S = p_0 = R$ и $\nu(R) = 0$, следовательно, $\rho = 1$. Допустим теперь, что это утверждение верно для $n - 1$ и покажем, что тогда оно верно для n.

Пусть $\boldsymbol{F}$ — семейство $(n-1)$-мерных симплексов $F \in \boldsymbol{C}$, таких, что

$$\nu(F) = (0, 1, \ldots, n-1),$$

и пусть σ — число симплексов F, таких, что $F \in \boldsymbol{F}$ и $F \subset (p_0 \ldots p_{n-1})$. По предположению и на основании теоремы 2, число σ нечетно.

Занумеруем симплексы R_j таким образом, чтобы симплексы R_1, $R_2, \ldots, R_t$ были n-мерными (в геометрическом смысле), а симплексы $R_{t+1}, \ldots, R_m$ имели размерность $< n$.

Обозначим через α_j, $j \leqslant t$, число граней F симплекса R_j, таких, что $F \in \boldsymbol{F}$. Заметим, что

1° если $\nu(R_j) = (0, \ldots, n)$, то $\alpha_j = 1$;

2° если $(0, \ldots, n-1) \subset \nu(R_j) \neq (0, \ldots, n)$, то $\alpha_j = 2$;

3° если $(0, \ldots, n-1) \not\subset \nu(R_j)$, то $\alpha_j = 0$.

Отсюда вытекает, что

$$\rho \equiv (\alpha_1 + \ldots + \alpha_t) \pmod 2. \tag{2}$$

Каждому симплексу R_j, $j \leqslant t$, поставим в соответствие его грани, принадлежащие семейству $\boldsymbol{F}$ (если они существуют). Тогда каждому симплексу $F \in \boldsymbol{F}$ будет соответствовать один или два симплекса R_j, в зависимости от того, содержится ли симплекс F в симплексе $(p_0 \ldots p_{n-1})$ или нет. Поэтому, в силу (2), имеет место соотношение

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_t \equiv \sigma \pmod 2, \quad \text{откуда} \quad \rho \equiv \sigma \pmod 2.$$

Следовательно, число ρ нечетно.

Замечание. В приложениях теоремы 4 используется только неравенство $\rho \neq 0$. Нечетность числа ρ выступает только в доказательстве этой теоремы.

---

[1]) См. Шпернер [1], Кнастер, Мазуркевич, Куратовский [1].

Теорема 5. *Пусть заданы $n+1$ замкнутых множеств $A_0, \ldots, A_n$, таких, что каждая грань $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ симплекса S удовлетворяет включению*

(3) $$(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \subset A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_k};$$

тогда $A_0 \cap \ldots \cap A_n \neq 0$.

Пусть r — некоторое целое положительное число. В силу теоремы 3, можно допустить, что комплекс $\boldsymbol{C} = (R_1, \ldots, R_m)$ удовлетворяет условию (1), а также неравенству

(4) $$\delta(R_j) < \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Каждой вершине s комплекса $\boldsymbol{C}$ поставим в соответствие целое число $\nu(s)$ следующим образом. Согласно условию (1), существует один (и только один) симплекс $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, содержащий вершину s. Следовательно, в силу условия (3), среди множеств $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$ существует по крайней мере одно множество, содержащее вершину s; обозначим его индекс через $\nu(s)$.

Итак, $s \in A_{\nu(s)}$. Так как условие (i) выполняется, то, согласно теореме 4, среди всех симплексов R_i существует симплекс (который мы обозначим через $(s_0^r \ldots s_n^r)$), такой, что $\nu(s_i^r) = i$. Следовательно, $s_i^r \in A_i$.

В силу компактности множества $\overline{S}$, можно считать, что последовательность $s_0^1, s_0^2, \ldots, s_0^r, \ldots$ сходится к некоторой точке a. Тогда из условия (4) следует, что $a = \lim\limits_{r \to \infty} s_i^r$ для $i = 1, \ldots, n$, а из включения $s_i^r \in A_i$ вытекает, что $a \in \overline{A}_i = A_i$ и, наконец, $a \in A_0 \cap \ldots \cap A_n$.

Обозначим через Q_i грань симплекса S, противоположную вершине p_i, т. е.

(5) $$Q_i = (p_0 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n).$$

Теорема 6. *Пусть $A_0, \ldots, A_n$ — замкнутые множества, такие, что*

(6) $$\overline{S} = A_0 \cup \ldots \cup A_n,$$

(7) $$A_i \cap \overline{Q}_i = 0;$$

тогда $A_0 \cap \ldots \cap A_n \neq 0$.

Кроме того, предположение о замкнутости множеств A_i можно заменить условием их открытости в $\overline{S}$.

В соответствии с теоремой 5 нужно установить включение (3). Предположим, что оно не имеет места; тогда в симплексе $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$ существует точка a, лежащая в дополнении к множествам $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$.

Следовательно, на основании равенства (6) существует индекс i, такой, что

$$(8) \qquad i \neq i_0, \ \ldots, \ i \neq i_k,$$

$$(9) \qquad a \in A_i.$$

Из неравенства (8) вытекает, что $(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \subset \bar{Q}_i$, откуда $a \in \bar{Q}_i$, но это несовместимо с соотношениями (7) и (9).

Для доказательства второй части теоремы 6 предположим, что множества $A_0, \ldots, A_n$ открыты в $\bar{S}$, и обозначим, в соответствии с § 14, III, через $\overset{*}{A}_0, \ldots, \overset{*}{A}_n$ систему замкнутых множеств, такую, что

$$\bar{S} = \overset{*}{A}_0 \cup \ldots \cup \overset{*}{A}_n \quad \text{и} \quad \overset{*}{A}_i \subset A_i,$$
$$\text{откуда} \quad \overset{*}{A}_i \cap \bar{Q}_i = 0 \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Так как $\overset{*}{A}_0 \cap \ldots \cap \overset{*}{A}_n \neq 0$, то $A_0 \cap \ldots \cap A_n \neq 0$.

Теорема 7 (основная теорема[1]). $\dim \bar{S} = n$.
Иначе говоря, $\dim \mathscr{E}^n = n$.

Доказательство. Неравенство $\dim \bar{S} \leqslant n$ (или $\dim \mathscr{E}^n \leqslant n$) очевидно (см. § 25, I, примеры). Докажем, что $\dim \bar{S} > n - 1$.

Предположим, что $\dim \bar{S} \leqslant n - 1$. Положим

$$(10) \qquad P_i = \bar{S} - \bar{Q}_i,$$

где Q_i определяется равенством (5). Очевидно, что

$$(11) \qquad \bar{S} = P_0 \cup \ldots \cup P_n.$$

Отсюда, в силу неравенства $\dim \bar{S} \leqslant n - 1$ и теоремы 1, § 27, III (теорема разложения), получаем, что существует система открытых множеств $A_0, \ldots, A_n$, такая, что

$$\bar{S} = A_0 \cup \ldots \cup A_n, \ A_0 \cap \ldots \cap A_n = 0 \text{ и } A_i \subset P_i, \text{ откуда } A_i \cap \bar{Q}_i = 0,$$

но это противоречит теореме 6.

Следствие 7а. *Пусть* $\mathbf{C}$ — *простой замкнутый n-мерный комплекс и* C — *соответствующий ему полиэдр, тогда* $\dim C = n$.

Следствие 7б. *Пусть* $(p_0 \ldots p_n)$ — *простой или вырожденный симплекс, тогда* $\dim (p_0 \ldots p_n) \leqslant n$.

Второе следствие вытекает из сопоставления теоремы 7 с формулой I (2). Следующая теорема, относящаяся к тому же кругу идей, что и теоремы 5 и 6, будет применяться несколько позже.

---

[1]) См. Брауэр [1].

Теорема 8. *Пусть* $G_1, \ldots, G_n$ — *множества, открытые в* $\bar{S}$ *и такие, что* $G_i \cap Q_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *и объединение* $G_1 \cup \ldots \cup G_n$ *отделяет вершину* p_0 *от противоположной грани* Q_0 *в* $\bar{S}$; *тогда* $G_1 \cap \ldots \cap G_n \neq 0$. (См. Куратовский [37].)

Доказательство. По предположению (см. § 6, V), существуют два замкнутых множества U и V, таких, что

$$(12) \quad \bar{S} - (G_1 \cup \ldots \cup G_n) = U \cup V, \quad U \cap V = 0, \quad p_0 \in U, \quad \bar{Q}_0 \subset V.$$

Пусть далее (в соответствии с нормальностью пространства $\bar{S}$) A_0 — множество, открытое в пространстве $\bar{S}$ и такое, что

$$(13) \qquad U \subset A_0 \quad \text{и} \quad V \subset \bar{S} - \bar{A}_0.$$

Положим (при $i > 0$)

$$(14) \qquad A_i = G_i \cup (\bar{S} - \bar{A}_0 - \bar{Q}_i).$$

Тогда (при $i > 0$) $A_i \cap \bar{Q}_i = G_i \cap \bar{Q}_i = 0$, так как множество G_i открыто и $G_i \cap Q_i = 0$ по предположению. Кроме того, в силу последних включений (12) и (13), имеем $A_0 \cap \bar{Q}_0 = 0$. Следовательно, равенство (7) имеет место при любых $i = 0, 1, \ldots, n$.

С другой стороны,

$$A_0 \cup \ldots \cup A_n = A_0 \cup (G_1 \cup \ldots \cup G_n) \cup [\bar{S} - \bar{A}_0 - (\bar{Q}_1 \cap \ldots \cap \bar{Q}_n)],$$

и так как соотношение $\bar{Q}_1 \cap \ldots \cap \bar{Q}_n = p_0$ очевидно, а в силу (12) и (13)

$$p_0 \in A_0 \quad \text{и} \quad \bar{S} - (G_1 \cup \ldots \cup G_n) \subset A_0 \cup (\bar{S} - \bar{A}_0),$$

то равенство (6) также имеет место. Поэтому на основании теоремы 6 имеем

$$A_0 \cap \ldots \cap A_n \neq 0, \quad \text{откуда} \quad G_1 \cap \ldots \cap G_n \neq 0,$$

так как $A_0 \cap [\bar{S} - A_0 - \bar{Q}_i] = 0$.

III. Приложения к задаче о неподвижных точках. С помощью теоремы 5, п. II можно легко получить следующую важную теорему.

Теорема 1 (Брауэр)[1]. *Пусть* $S = (p_0 \ldots p_n)$ — *простой симплекс и* $f : \bar{S} \to \bar{S}$ — *непрерывное отображение множества* $\bar{S}$ *в себя. Тогда существует неподвижная точка этого отображения, т. е. точка* x_0, *такая, что* $f(x_0) = x_0$.

Мы должны показать, что если точке

$$x = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_n p_n, \quad \text{где} \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1,$$

[1]) Доказательство см. в работе Кнастера, Мазуркевича и Куратовского [1].

поставлена в соответствие точка

$f(x)=\lambda_0^* p_0+\ldots+\lambda_n^* p_n$, где $\lambda_i^* \geqslant 0$ и $\lambda_0^*+\ldots+\lambda_n^*=1$,

то существует такая точка x, что $\lambda_i^*=\lambda_i$ $(i=0, \ldots, n)$.

Итак, множества $A_i=\underset{x}{\mathrm{E}}(\lambda_i^* \leqslant \lambda_i)$ удовлетворяют предположениям теоремы 5, п. II:

1° они замкнуты, ибо барицентрические координаты λ_i точки x являются непрерывными функциями точки x;

2° из условия $x \in (p_{i_0} \ldots p_{i_k})$ следует, что $\lambda_{i_0}+\ldots+\lambda_{i_k}=1$, и так как $\lambda_{i_0}^*+\ldots+\lambda_{i_k}^* \leqslant 1$, то существует индекс i_j $(0 \leqslant j \leqslant k)$, такой, что $\lambda_{i_j}^* \leqslant \lambda_{i_j}$, откуда $x \in A_{i_j}$. Следовательно, $(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \subset \subset A_{i_0} \cup \ldots \cup A_{i_k}$.

Пусть, в соответствии с теоремой II, 5, $x_0 \in A_0 \cap \ldots \cap A_n$. Тогда $\lambda_i^* \leqslant \lambda_i$ для $i=0, \ldots, n$, откуда

$$1=\lambda_0^*+\ldots+\lambda_n^* \leqslant \lambda_0+\ldots+\lambda_n=1,$$

и поэтому $\lambda_i^*=\lambda_i$, $i=0, \ldots, n$.

Следствие 1а. *Пусть $\mathcal{S}_n$ — поверхность шара*

$$\mathcal{Q}_{n+1}=\underset{p}{\mathrm{E}}\left[(|p| \leqslant 1)(p \in \mathcal{E}^{n+1})\right].$$

Тогда не существует никакого непрерывного отображения $f: \mathcal{Q}_{n+1} \rightarrow \mathcal{S}_n$, тождественного на множестве $\mathcal{S}_n$.

Иначе говоря, *множество $\mathcal{S}_n$ не является ретрактом шара $\mathcal{Q}_{n+1}$.*

Предположим, напротив, что

$$(1) \qquad f \in \mathcal{S}_n^{\mathcal{Q}_{n+1}} \quad \text{и} \quad f(x)=x \quad \text{при} \quad x \in \mathcal{S}_n.$$

Так как шар $\mathcal{Q}_{n+1}$ гомеоморфен замыканию некоторого $(n+1)$-мерного симплекса, функция $-f$, в силу теоремы 1, имеет неподвижную точку x_0, т. е.

$x_0=-f(x_0)$, откуда $|x_0|=|-f(x_0)|=1$, следовательно, $x_0 \in \mathcal{S}_n$, что противоречит нашему предположению.

IV. Приложения к кубам $\mathcal{J}^n$ и $\mathcal{J}^{\aleph_0}$. Обозначим через V_i и W_i, $i=1, \ldots, n$, противоположные грани куба $\mathcal{J}^n(\mathcal{J}^{\aleph_0})$, определенные соответственно уравнениями $x_i=0$ и $x_i=1$.

Следующая теорема соответствует теореме 6, п. II (и из нее выводится).

Теорема 1[1]). *Пусть заданы* $n+1$ *замкнутых множеств* $A_0, \ldots, A_n$, *таких, что*

$$\mathcal{J}^n = A_0 \cup \ldots \cup A_n, \quad A_{l-1} \cap W_l = 0, \quad A_k \cap V_l = 0 \quad (l \leqslant k);$$

тогда $A_0 \cap \ldots \cap A_n \neq 0$.

В самом деле, пусть $S = (p_0 \ldots p_n)$ — некоторый n-мерный симплекс. Положим

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_n p_n,$$
$$\lambda_0 = 1 - x_1, \quad \lambda_1 = (1 - x_2) x_1, \quad \lambda_2 = (1 - x_3) x_1 x_2, \ldots,$$
$$\lambda_{n-1} = (1 - x_n) x_1 \ldots x_{n-1}, \quad \lambda_n = x_1 \ldots x_n.$$

Легко видеть, что $f(\mathcal{J}^n) = \overline{S}$. При этом граница B симплекса S и граница $V_1 \cup W_1 \cup \ldots \cup V_n \cup W_n$ куба $\mathcal{J}^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии. В самом деле, если $x_l = 0$, то $\lambda_l = 0$; если $x_l = 1$, то $\lambda_{l-1} = 0$, и обратно, если $\lambda_l = 0$, то имеет место одно из $l+1$ равенств

$$x_1 = 0, \ldots, x_l = 0, \ x_{l+1} = 1,$$

т. е. (множества Q_l определены формулой II (5))

$$f(V_l) \subset \overline{Q}_l, \quad f(W_l) \subset \overline{Q}_{l-1},$$
$$f^{-1}(\overline{Q}_l) \subset V_1 \cup \ldots \cup V_l \cup W_{l+1}.$$

Наконец, отображение f взаимно однозначно внутри куба $\mathcal{J}^n$, так как из равенства

$$x_1 \ldots x_{l+1} = 1 - (\lambda_0 + \ldots + \lambda_l)$$

вытекает, что

$$x_{l+1} = \frac{1 - (\lambda_0 + \ldots + \lambda_l)}{1 - (\lambda_0 + \ldots + \lambda_{l-1})}.$$

Положим $A_l^* = f(A_l)$. Тогда $\overline{S} = A_0^* \cup \ldots \cup A_n^*$ и

$$A_l^* \cap \overline{Q}_l = f[A_l \cap f^{-1}(\overline{Q}_l)] \subset f[A_l \cap (V_1 \cup \ldots \cup V_l \cup W_{l+1})] = 0.$$

Множества A_l^* замкнуты (см. § 20, V, 5), поэтому, в силу II, 6,

$$A_0^* \cap \ldots \cap A_n^* \neq 0.$$

Так как $A_l^* \cap \overline{Q}_l = 0$, то $A_0^* \cap \ldots \cap A_n^* \cap B = 0$, и так как функция $f^{-1} | S$ взаимно однозначна, отсюда следует, что $A_0 \cap \ldots \cap A_n \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n$ *и* $H_1, \ldots, H_n$ — *две системы замкнутых множеств в кубе* $\mathcal{J}^n$, *такие, что*

$$\mathcal{J}^n = F_l \cup H_l \quad \text{и} \quad F_l \cap V_l = 0 = H_l \cap W_l.$$

[1]) См. Лебег [3], Гуревич [5], [4].

Тогда

$$(F_1 \cap H_1) \cap \ldots \cap (F_n \cap H_n) \neq 0.$$

Доказательство. Положим

$$A_0 = H_1,\ A_1 = F_1 \cap H_2,\ \ldots,\ A_{n-1} = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap H_n,$$
$$A_n = F_1 \cap \ldots \cap F_n.$$

Пусть $G_i = \mathcal{J}^n - H_i$. Поскольку $G_i \subset F_i$, имеем

$$A_0 \cup \ldots \cup A_n \supset H_1 \cup (G_1 \cap H_2) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (G_1 \cap \ldots \cap G_{n-1} \cap H_n) \cup (G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \mathcal{J}^n.$$

Легко проверить, что предположения теоремы 1 выполнены. Следовательно,

$$(F_1 \cap H_1) \cap \ldots \cap (F_n \cap H_n) = A_0 \cap \ldots \cap A_n \neq 0.$$

Теорема 2 допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Пусть $F_1, F_2, \ldots$ и $H_1, H_2, \ldots$ — две бесконечные последовательности замкнутых множеств в кубе $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, такие, что*

$$\mathcal{J}^{\aleph_0} = F_n \cup H_n \quad \text{и} \quad F_n \cap V_n = 0 = H_n \cap W_n;$$

тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n \cap H_n) \neq 0.$$

Обозначим через J_n множество точек $x = [x_1, x_2, \ldots]$ куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, таких, что $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$. Множества J_n и $\mathcal{J}^n$, очевидно, гомеоморфны, и при этом гомеоморфизме множество $V_i \cap J_n$ и грань $x_i = 0$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Аналогично во взаимно однозначном соответствии находятся множество $W_i \cap J_n$ и грань $x_i = 1$. Следовательно, к множеству J_n можно применить теорему 2. Тогда

$$J_n \subset F_i \cup H_i,\ i \leqslant n, \text{ откуда } (F_1 \cap H_1) \cap \ldots \cap (F_n \cap H_n) \neq 0,$$

и, в силу теоремы Кантора (§ 20, V, 2), получаем $\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n \cap H_n) \neq 0$.

Теорема 4 (Гуревич [4]). *Пространство $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ нельзя разложить в (счетное) объединение 0-мерных множеств (более общо, нельзя разложить в счетное объединение конечномерных пространств).*

В самом деле, пусть $Q_1, Q_2, \ldots$ — бесконечная последовательность 0-мерных множеств, принадлежащих кубу $\mathcal{J}^{\aleph_0}$. Докажем, что

$$\mathcal{J}^{\aleph_0} - \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \neq 0.$$

Так как V_n и W_n — замкнутые непересекающиеся множества, а Q_n — нульмерное множество, то, в силу теоремы § 26, II, 1, существуют два замкнутых множества F_n и H_n, таких, что

$$\mathcal{J}^{\aleph_0} = F_n \cup H_n, \quad F_n \cap V_n = 0 = H_n \cap W_n \text{ и } F_n \cap H_n \cap Q_n = 0,$$

откуда

$$F_n \cap H_n \subset \mathcal{J}^{\aleph_0} - Q_n.$$

Тогда, в силу теоремы 3,

$$0 \neq \bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n \cap H_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathcal{J}^{\aleph_0} - Q_n) = \mathcal{J}^{\aleph_0} - \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Замечания. 1. *Пусть A_n — множество точек*

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots]$$

куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, таких, что $x_i \leqslant \frac{1}{n}$ при $i \leqslant n$. Множество $A_0 \cup A_1 \cup \ldots$ компактно, его размерность бесконечна, однако каждое из множеств A_n конечномерно [1]).

2. Из гипотезы континуума вытекает следующая теорема [2]).

Пусть (несчетное) пространство $\mathcal{X}$ не является объединением счетного множества 0-мерных множеств; тогда существует несчетное множество, любое несчетное подмножество которого бесконечномерно.

Семейство всех множеств типа G_δ имеет мощность $\mathfrak{c}$ (см. § 24, I, 1, и § 26, V, 1), а следовательно, в силу гипотезы континуума, мощность $\aleph_1$; расположим все конечномерные множества типа G_δ в трансфинитную последовательность $Q_0, Q_1, \ldots, Q_\alpha, \ldots$ типа Ω. Так как каждое одноточечное множество является элементом этой последовательности, то $\mathcal{X} = Q_0 \cup \ldots \cup Q_\alpha \cup \ldots$. С другой стороны, так как каждое конечномерное множество является объединением конечного числа 0-мерных множеств (§ 27, I, 3), то из условия теоремы следует, что никакое счетное объединение элементов последовательности $\{Q_\alpha\}$ не исчерпывает пространства $\mathcal{X}$.

Следовательно, существует несчетное множество чисел α, таких, что $D_\alpha = Q_\alpha - \bigcup_{\xi < \alpha} Q_\xi \neq 0$. Если в каждом из D_α выбрать по точке p_α, то множество $P = \{p_\alpha\}$ будет искомым множеством.

В самом деле, множество $P \cap Q_\xi$ счетно, каково бы ни было $\xi < \Omega$, ибо $p_\alpha \notin Q_\xi$ при $\xi < \alpha$. К тому же выводу можно прийти, заменяя множество P множеством $X \subset P$. Следовательно, если предположить, что множество X конечномерно, то, в силу теоремы 1, § 27, IV,

---

[1]) Дальнейшие теоремы о бесконечномерных пространствах см. в работах: Смирнов [9], [10], Левшенко [1], Скляренко [1], [2], Тулмин [1], Зарелуа [1].

[2]) Теорема Гуревича [10]. Как заметил Гуревич, гипотеза континуума *эквивалентна* предположению, что куб $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ удовлетворяет условию этой теоремы.

существует такой индекс ξ, что $X \subset Q_\xi$, т. е. $X = X \cap Q_\xi$. Следовательно, множество X счетно.

V. Нерв системы множеств. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное пространство, $G_0, \ldots, G_n$ — подмножества в $\mathscr{X}$, $p_0, \ldots, p_n$ — множество точек некоторого евклидова пространства (произвольной размерности). Простой комплекс N, образованный симплексами $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, такими, что $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$, называется *нервом*[1]) системы $\{G_0, \ldots, G_n\}$.

Очевидно, что нерв N является *замкнутым комплексом*. Размерность его равна наибольшему целому числу k, при котором существует система индексов $i_0 < \ldots < i_k$, удовлетворяющая соотношению $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$.

Для того чтобы две системы множеств имели один и тот же нерв, необходимо и достаточно, чтобы они были *подобны в комбинаторном смысле* (см. § 14, III).

Пусть $S = (p_0 \ldots p_n)$ — простой симплекс. Обозначим (см. II (10)) через P_i объединение всех граней симплекса S, имеющих точку p_i своей вершиной.

Теорема 1. *Комплекс* $\overline{\mathbf{S}}$, *образованный всеми гранями симплекса* S, *представляет собой нерв системы* $\{P_0, \ldots, P_n\}$.

В самом деле, пересечение $P_{i_0} \cap \ldots \cap P_{i_k}$, как объединение всех симплексов, имеющих своей гранью симплекс $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, не пусто ни для какой системы индексов $i_0 < \ldots < i_k$.

Справедлива более общая

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{C}$ — *замкнутый подкомплекс комплекса* $\overline{\mathbf{S}}$, *и пусть* $C = \mathbf{S}(\mathbf{C})$; *тогда* $\mathbf{C}$ *является нервом системы* $\{C \cap P_0, \ldots, C \cap P_n\}$.

Это вытекает из того, что соотношения

$$C \cap P_{i_0} \cap \ldots \cap P_{i_k} \neq 0 \quad \text{и} \quad (p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \subset C$$

эквивалентны.

Что касается геометрической реализации нерва данной системы множеств, то имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{G_0, \ldots, G_m\}$ — *заданная система множеств и* n — *целое число* $\leqslant m$, *такое, что никакая точка не принадлежит* $n+2$ *множествам этой системы, т. е.*

(n) $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}} = 0$, *каковы бы ни были* $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n+1}$;

тогда в пространстве $\mathscr{E}^{2n+1}$ *существует простой комплекс (размерности* $\leqslant n$), *являющийся нервом данной системы.*

[1]) См. Александров [9]. Ср. с понятием „polyèdre réciproque“, введенным Пуанкаре [2].

Более точно: *вершины $p_0, \ldots, p_m$ этого комплекса можно выбрать так, чтобы выполнялось условие*

$$|p_i - a_i| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

где точки $a_0, \ldots, a_m$ и число $\varepsilon > 0$ заданы заранее.

В самом деле, в I, 2 положим $r = 2n + 1$ и обозначим через N комплекс, образованный симплексами $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, такими, что $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$. В силу (n), эти симплексы имеют размерность $\leqslant n$ и комплекс N простой. Следовательно, он является нервом системы $\{G_0, \ldots, G_m\}$.

VI. Отображения метрических пространств в полиэдры[1]**.** Пусть $\{G_0, \ldots, G_m\}$ — система открытых подмножеств метрического пространства $\mathscr{X}$, а $\{p_0, \ldots, p_m\}$ — система точек некоторого евклидова пространства. Положим

$$G = G_0 \cup \ldots \cup G_m \quad \text{и} \quad F_i = G - G_i. \tag{1}$$

Отображение $\varkappa$ множества G называется *соответствующим системам* $\{G_0, \ldots, G_m\}$ *и* $\{p_0, \ldots, p_m\}$, если

$$\varkappa(x) = \lambda_0(x) \cdot p_0 + \ldots + \lambda_m(x) \cdot p_m, \tag{2}$$

где

$$\lambda_i(x) = \frac{\rho(x, F_i)}{\rho(x, F_0) + \ldots + \rho(x, F_m)} \tag{3}$$

(условимся считать, что $\rho(x, 0) = 1$).

Теорема 1. *Точка $\varkappa(x)$ принадлежит замыканию симплекса (простого или сингулярного) $S = (p_0 \ldots p_m)$ и имеет барицентрические координаты $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_m(x)$, т. е.*

$$\lambda_0(x) + \ldots + \lambda_m(x) = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_i(x) \geqslant 0.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что знаменатель в формуле (3) не обращается в 0 ни в какой точке x. Напомним, что так как множества F_i замкнуты в G, имеет место тождество

$$[\rho(x, F_i) = 0] \equiv (x \in F_i) \quad \text{при} \quad x \in G. \tag{4}$$

Допустим, что $\rho(x, F_0) + \ldots + \rho(x, F_m) = 0$; тогда $\rho(x, F_i) = 0$, следовательно, $x \in F_i$ для каждого индекса i. Но тогда точка x не принадлежала бы ни одному из множеств G_i, вопреки (1).

Теорема 2. *Отображение $\varkappa$ непрерывно на множестве G.*

[1]) См. Александров [6], Гуревич [9], Куратовский [22].

Это вытекает из того, что функция $\lambda_l(x)$ непрерывна на множестве G.

Теорема 3. *Обозначим через* Q_l *грань* $(p_0 \ldots p_{l-1} p_{l+1} \ldots p_m)$, *а через* P_l — *объединение граней вида* $(p_l p_{l_1} \ldots p_{l_k})$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$; *тогда имеют место следующие соотношения*:

$$\varkappa [G_{l_0} \cap \ldots \cap G_{l_k} - \bigcup_{l \neq l_j} G_l] \subset (p_{l_0} \ldots p_{l_k}); \tag{5}$$

$$\varkappa (F_l) \subset \bar{Q}_l; \tag{6}$$

$$\varkappa (G_l) \subset P_l. \tag{7}$$

В самом деле, допустим, что $x \in G_{l_j}$ для $0 \leqslant j \leqslant k$ и $x \notin G_l$ при $l \neq l_j$. Тогда $x \notin F_{l_j}$ и $x \in F_l$, откуда $\lambda_{l_j}(x) \neq 0$ и $\lambda_l(x) = 0$, в силу (4) и (3). Следовательно, $\varkappa(x) \in (p_{l_0} \ldots p_{l_k})$, откуда вытекает включение (5).

Согласно (4), если $x \in F_l$, то $\lambda_l(x) = 0$, следовательно, $\varkappa(x) \in \bar{Q}_l$. Наконец, если $x \in G_l$, то $\lambda_l(x) \neq 0$, следовательно, $\varkappa(x) \in P_l$.

Замечание. Если система $\{G_0, \ldots, G_m\}$ удовлетворяет условию (n), то $\dim \overline{\varkappa(G)} \leqslant n$.

Это вытекает непосредственно из включения (5) и следствия 7б, п. II.

Теорема 4. *Пусть симплекс* $S = (p_0 \ldots p_m)$ — *простой; тогда включения* (5) — (7) *можно заменить равенствами*

$$\varkappa^{-1}(p_{l_0} \ldots p_{l_k}) = G_{l_0} \cap \ldots \cap G_{l_k} - \bigcup_{l \neq l_j} G_l, \tag{8}$$

$$\varkappa^{-1}(\bar{Q}_l) = F_l, \tag{9}$$

$$\varkappa^{-1}(P_l) = G_l. \tag{10}$$

В этом случае функция $\varkappa$ *отображает множество* G *в подмножество полиэдра* $N = \mathbf{S}(N)$, *где комплекс* N (*нерв системы* $\{G_0, \ldots, G_m\}$) *состоит из симплексов* $(p_{l_0} \ldots p_{l_k})$, *таких, что* $G_{l_0} \cap \ldots \cap G_{l_k} \neq 0$.

Наконец, *если выполняется условие* (n) *теоремы* 3 *п.* V, *то*

$$\dim N = \dim N \leqslant n. \tag{11}$$

Так как грани простого симплекса попарно не пересекаются, то равенство (8) вытекает из соотношения (5). Если $\bar{Q}_l$ — объединение всех граней, не имеющих точку p_l своей вершиной, то l-я барицентрическая координата любой точки множества $\bar{Q}_l$ обращается в 0; отсюда вытекает формула (9). Формула (10) доказывается аналогичным образом.

Для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что из условия $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} = 0$ следует, в силу (8), равенство $\varkappa^{-1}(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) = 0$, которое означает, что ни одно значение функции $\varkappa$ не принадлежит симплексу $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$; поэтому все ее значения принадлежат полиэдру N.

Замечания. 1. Легко доказать (см. Куратовский [22]), что каждое подмножество простого симплекса можно непрерывно отобразить на полиэдр, являющийся объединением некоторых граней этого симплекса, так, чтобы ни одна точка не покидала замыкания грани, которой она принадлежит.

В частности, если таким подмножеством является $\varkappa(G)$, а f — рассматриваемое отображение, то суперпозиция отображений $g = f\varkappa$ преобразует множество G в полиэдр и удовлетворяет включению $g^{-1}(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \subset G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k}$.

2. Правая часть равенства (8) называется (в алгебре логики по Булю) „составляющей высказывания G относительно системы $G_0, \ldots, G_m$". Высказывание разлагается на попарно не пересекающиеся составляющие.

Теорема 4 устанавливает соответствие между этими составляющими и гранями симплекса S.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ — вполне ограниченное n-мерное пространство. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение f пространства $\mathscr{X}$ в n-мерный полиэдр, такое, что*

$$\delta[f^{-1}(y)] < \varepsilon, \quad \textit{каково бы ни было } y \in f(\mathscr{X}). \tag{12}$$

Более точно: *пусть $\mathscr{X}$ — пространство, обладающее свойством D_n, и $G_0, \ldots, G_m$ — система открытых множеств, таких, что $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$, а S — простой симплекс $(p_0 \ldots p_m)$. Обозначим через A_n комплекс, образованный гранями симплекса S размерности $\leqslant n$, и положим $A_n = \mathbf{S}(\mathrm{A}_n)$. Тогда существует функция $f \in A_n^{\mathscr{X}}$, такая, что*

$$f^{-1}(P_i) \subset G_i \quad \textit{при} \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{13}$$

В самом деле, пусть пространство $\mathscr{X}$ обладает свойством D_n; тогда существует система открытых множеств $G_0^*, \ldots, G_m^*$, такая, что

(14) $\mathscr{X} = G_0^* \cup \ldots \cup G_m^*, \quad G_i^* \subset G_i \quad$ и $\quad G_{i_0}^* \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}}^* = 0$

при $i_0 < \ldots < i_{n+1} \leqslant m$.

Отображение $\varkappa$, соответствующее системам $\{G_0^*, \ldots, G_m^*\}$ и $\{p_0, \ldots, p_m\}$, представляет собой искомую функцию. В самом деле, если N — нерв системы $\{G_0^*, \ldots, G_m^*\}$, то имеет место формула (11), откуда $N \subset A_n$ и, следовательно, $\varkappa(\mathscr{X}) \subset A_n$. С другой стороны, из равенства (10), в силу включения (14), вытекает соотношение (13).

Таким образом, вторая часть теоремы 5 доказана. Чтобы вывести из нее первую часть, достаточно рассмотреть покрытие $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$ открытыми множествами диаметра $< \varepsilon$.

Справедлива обратная теорема.

Теорема 6. *Если всякому покрытию* $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$ *открытыми множествами соответствует функция* $f \in A_n^{\mathscr{X}}$, *удовлетворяющая условию* (13), *то пространство* $\mathscr{X}$ *обладает свойством* D_n.

В самом деле, положим $G_i^* = f^{-1}(P_i)$. Покажем, что соотношения (14) выполнены. Первое из этих соотношений вытекает из II (11), второе следует из включения (13), а последнее — из того, что нерв системы $\{A_n \cap P_0, \ldots, A_n \cap P_m\}$, а следовательно, и системы $\{G_0^*, \ldots, G_m^*\}$ имеет размерность $\leqslant n$ (согласно теореме V, 2).

К тому же кругу идей относится следующее утверждение.

Теорема 7. *Если любому* $l > n$ *и любой системе открытых множеств* $\{G_0, \ldots, G_m\}$, *такой, что* $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$, *нерв которой имеет размерность* l, *соответствует функция* $f \in A_{l-1}^{\mathscr{X}}$, *удовлетворяющая условию* (13), *то пространство* $\mathscr{X}$ *обладает свойством* D_n.

Системе $\{G_0, \ldots, G_m\}$ поставим в соответствие систему открытых множеств, удовлетворяющих соотношениям (14). Допустим, что при некотором $k \geqslant n$ и для любого $l \leqslant k$ существует требуемая система $\{G_0^*, \ldots, G_m^*\}$; докажем, что тогда это верно для $k+1$.

Так как $k+1 > n$, то, в силу предположения теоремы 7, существует функция $f \in A_k^{\mathscr{X}}$, удовлетворяющая соотношению (13). Положим $H_i = f^{-1}(P_i)$. Так как нерв системы $\{A_k \cap P_0, \ldots, A_k \cap P_m\}$, а следовательно, и системы $\{H_0, \ldots, H_m\}$ имеет размерность $\leqslant k$, то, по предположению, существует система открытых множеств $\{G_0^*, \ldots, G_m^*\}$, удовлетворяющая двум соотношениям (14), а также включению $G_i^* \subset H_i$. При сопоставлении с условием (13) из этого включения следует включение (14).

Теорема 8. *Предположим, что точки* $p_0, \ldots, p_m$ *пространства* $\mathscr{E}^n$ *находятся в общем положении и выполнено условие* (n); *тогда для любой точки* y *имеют место соотношения*

$$\varkappa^{-1}(y) = K_0 \cup \ldots \cup K_m, \quad K_i \subset G_i, \quad K_i \cap K_{i'} = 0 \quad \textit{для} \quad i \neq i',$$

где множества K_i (*пустые или непустые*) *замкнуты в объединении* $G = G_0 \cup \ldots \cup G_m$.

Пусть $S^* = (p_0^* \ldots p_m^*)$ есть m-мерный симплекс (в пространстве $\mathscr{E}^m$). Положим (см. (3))

$$\varkappa^*(x) = \lambda_0(x) \cdot p_0^* + \ldots + \lambda_m(x) \cdot p_m^*.$$

Обозначим через $\overset{*}{A}_n$ объединение симплексов $(p_{i_0}^* \ldots p_{i_k}^*)$, где $k \leqslant n$, и положим для любой точки $t \in \overset{*}{A}_n$

$$f(t) = \beta_0(t) \cdot p_0 + \ldots + \beta_m(t) \cdot p_m,$$

где $\beta_0(t), \ldots, \beta_m(t)$ — барицентрические координаты точки t (относительно вершин $p_0^*, \ldots, p_m^*$); тогда $\varkappa^*(\mathscr{X}) \subset \overset{*}{A}_n$ и $\varkappa(x) = f[\varkappa^*(x)]$. Следовательно, $\varkappa^{-1}(y) = \varkappa^{*-1}[f^{-1}(y)]$.

Так как симплексы $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$ — простые при $k \leqslant n$, то функция f взаимно однозначна на каждом симплексе $(p_{i_0}^* \ldots p_{i_k}^*)$. Следовательно, множество $f^{-1}(y)$ конечно. Обозначим через P_i^* объединение граней симплекса S^*, вершиной которых является точка p_i^*. Положим $H_i = f^{-1}(y) \cap P_i^*$; тогда

$$\varkappa^{-1}(y) = \varkappa^{*-1}(H_0) \cup \ldots \cup \varkappa^{*-1}(H_m),$$

так как $P_0^* \cup \ldots \cup P_m^* = \overline{S^*}$. Множества

$$K_0 = \varkappa^{*-1}(H_0), \quad K_1 = \varkappa^{*-1}(H_1 - H_0), \ldots,$$
$$K_m = \varkappa^{*-1}[H_m - (H_0 \cup \ldots \cup H_{m-1})]$$

являются искомыми. Действительно,

$$K_0 \cup \ldots \cup K_m =$$
$$= \varkappa^{*-1}\{H_0 \cup (H_1 - H_0) \cup \ldots \cup [H_m - (H_0 \cup \ldots \cup H_{m-1})]\} = \varkappa^{-1}(y),$$
$$K_i \subset \varkappa^{*-1}(H_i) \subset \varkappa^{*-1}(P_i^*) = G_i \quad \text{(согласно (10))},$$
$$K_i \cap K_{i'} \subset \varkappa^{*-1}[H_i \cap (H_{i'} - H_i)] = 0 \quad \text{при } i < i'.$$

Наконец, так как множества H_i конечны, то множества K_i замкнуты в G.

VII. Аппроксимация непрерывных отображений отображениями $\varkappa$[1]).

Теорема 1. *Пусть заданы покрытие (произвольного) метрического пространства* $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$ *открытыми множествами, функция* $f \in (\mathscr{J}^r)^{\mathscr{X}}$, *число* $\varepsilon > 0$ *и система точек* $p_0, \ldots, p_m$ *куба* $\mathscr{J}^r$, *такие, что*

$$(15) \qquad \delta[(p_i) \cup f(G_i)] < \varepsilon \quad \text{для} \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Тогда отображение $\varkappa$, *соответствующее системам* $\{G_0, \ldots, G_m\}$ *и* $\{p_0, \ldots, p_m\}$, *удовлетворяет неравенству*

$$(16) \qquad |\varkappa(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для любой точки} \quad x \in \mathscr{X}.$$

Предварительно заметим, что имеет место

Теорема 2. *Если среди ребер* $(p_0 p_i)$ *(простого или вырожденного) симплекса* $(p_0 \ldots p_n)$ *ребро* $(p_0 p_j)$ — *наибольшее, то*

$$|p_0 - x| \leqslant |p_0 - p_j| \quad \text{для любой точки} \quad x \in \overline{(p_0 \ldots p_n)}.$$

В самом деле, центр тяжести масс $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, расположенных в точках $p_0, \ldots, p_n$, не может лежать вне шара с центром в точке p_0 радиуса $|p_0 - p_j|$ (этот шар содержит все точки $p_0, \ldots, p_n$).

Пусть теперь x — некоторая фиксированная точка пространства $\mathscr{X}$, и пусть $i_0, \ldots, i_k$ — система всех индексов, таких, что $x \in G_{i_0}, \ldots, x \in G_{i_k}$. Следовательно,

$$(17) \quad x \in \Big[G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} - \bigcup_{i \neq i_j} G_i\Big], \text{ откуда } \varkappa(x) \in \big(p_{i_0} \ldots p_{i_k}\big),$$

согласно (5).

Выделим среди $p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}$ точку, наболее удаленную от точки $f(x)$. Можно допустить, что это точка p_{i_0}. Из соотношения (17) и теоремы 2, если заменить в ней симплекс $(p_0 \ldots p_n)$ симплексом $\big(f(x)\, p_{i_0} \ldots p_{i_k}\big)$, вытекает неравенство

$$(18) \qquad |f(x) - \varkappa(x)| \leqslant |f(x) - p_{i_0}|.$$

Так как $x \in G_{i_0}$, то $f(x) \in f(G_{i_0})$, откуда

$$(19) \qquad |p_{i_0} - f(x)| \leqslant \delta\big[(p_{i_0}) \cup f\big(G_{i_0}\big)\big].$$

Из неравенств (18), (19) и (15) вытекает неравенство (16).

Теорема 3. *Любое отображение* $f \in (\mathscr{J}^r)^{\mathscr{X}}$ *может быть равномерно аппроксимировано функциями* $\varkappa$.

---

[1]) Теоремы п. VII позволяют установить (во втором томе) теоремы „вложения" в теории размерности; в частности, они позволяют доказать, что любое метрическое сепарабельное n-мерное пространство гомеоморфно некоторому подмножеству $(2n+1)$-мерного евклидова пространства.

Более точно: *пусть дана система открытых множеств* $\{G_0, \ldots, G_m\}$, *такая, что*

(20) $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$ *и* $\delta[f(G_i)] < \varepsilon$ *при* $i = 0, \ldots, m$,

тогда в кубе $\mathscr{J}^r$ *существует система точек* $\{p_0, \ldots, p_m\}$, *находящихся в общем положении, такая, что функция* $\varkappa$, *соответствующая системам* $\{G_0, \ldots, G_m\}$ *и* $\{p_0, \ldots, p_m\}$, *удовлетворяет неравенству* (16).

Наконец, *если пространство* $\mathscr{X}$ *обладает свойством* D_n, *то можно допустить, что*

(20′) $$\dim \overline{\varkappa(\mathscr{X})} \leqslant n.$$

В самом деле, пусть $a_i \in f(G_i)$ (если $G_i = 0$, то a_i — произвольная точка куба $\mathscr{J}^r$). В силу I, 2, в кубе $\mathscr{J}^r$ существует система точек $p_0, \ldots, p_m$, находящихся в общем положении, удовлетворяющая неравенству (15). Отсюда, в силу теоремы 1, следует вторая часть теоремы 3.

Чтобы вывести первую часть теоремы, разложим куб $\mathscr{J}^r$ в конечное объединение открытых множеств (например, шаров диаметром $< \varepsilon$):

(21) $$\mathscr{J}^r = H_0 \cup \ldots \cup H_m, \quad \text{где} \quad \delta(H_i) < \varepsilon,$$

и положим $G_i = f^{-1}(H_i)$. Тогда условия (20) выполнены. Отсюда вытекает неравенство (16).

Наконец, если пространство $\mathscr{X}$ обладает свойством D_n, то можно заменить систему $\{G_0, \ldots, G_m\}$ системой $\{G_0^*, \ldots, G_m^*\}$, такой, что

$$\mathscr{X} = G_0^* \cup \ldots \cup G_m^*, \quad G_i^* \subset G_i, \quad G_{i_0}^* \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}}^* = 0.$$

Тогда неравенство (20′) вытекает из замечания к теореме 3, п. VI.

Замечание. В том случае, когда $r \geqslant 2n+1$, точки $p_0, \ldots, p_m$ можно подчинить следующему дополнительному условию: все симплексы $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, $k \leqslant n$, не пересекаются с заранее заданным линейным многообразием L размерности $\leqslant n$. (См. п. I, замечание 2°.)

Теорему 3 можно уточнить следующим образом.

Теорема 4. *Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся множества, таких, что множество $E = A \cup B$ обладает свойством D_n. Тогда любую функцию $f \in (\mathscr{J}^r)^{\mathscr{X}}$, где $r \geqslant 2n+1$, можно равномерно аппроксимировать функциями $\varkappa$, удовлетворяющими условию*

$$\overline{\varkappa(A)} \cap \overline{\varkappa(B)} = 0.$$

Пусть так же, как в (21), $H_0, \ldots, H_s$ — открытые множества, такие, что

(21′) $$\mathscr{J}^r = H_0 \cup \ldots \cup H_s \quad \text{и} \quad \delta(H_j) < \varepsilon \quad \text{при} \quad j \leqslant s.$$

Положим $m = 2s+1$, $K_j = f^{-1}(H_j)$ и

$$= K_0 - A, \ldots, G_s = K_s - A, \quad G_{s+1} = K_0 - B, \ldots, G_m = K_s - B.$$

Тогда множества $G_0, \ldots, G_m$ открыты и удовлетворяют условиям (20), так как $\delta[f(K_j)] \leqslant \delta(H_j) < \varepsilon$. Кроме того, для любого $i \leqslant m$

(22) $$\text{либо } G_i \cap A = 0, \quad \text{либо } G_i \cap B = 0.$$

Так как множество E обладает свойством D_n, то, согласно § 27, III, 5, существует система открытых множеств $Q_0, \ldots, Q_m$, такая, что

(23) $$\mathcal{X} = Q_0 \cup \ldots \cup Q_m,$$

(24) $$Q_i \subset G_i,$$

(25) $$E \cap Q_{i_0} \cap \ldots \cap Q_{i_{n+1}} = 0 \quad \text{для} \quad i_0 < \ldots < i_{n+1} \leqslant m.$$

Следовательно, в силу (20), $\delta[f(Q_i)] < \varepsilon$. Рассматривая, как при доказательстве теоремы 3, систему точек $p_0, \ldots, p_m$, находящихся в общем положении, такую, что $\delta[p_i \cup f(Q_i)] < \varepsilon$, заметим, что функция $\varkappa$, соответствующая системам $\{Q_0, \ldots, Q_m\}$ и $\{p_0, \ldots, p_m\}$, удовлетворяет условию (16).

Обозначим через N_A (соответственно N_B) полиэдр, являющийся объединением попарно непересекающихся (в силу (25)) симплексов $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, таких, что

$$A \cap Q_{i_0} \cap \ldots \cap Q_{i_k} \neq 0, \text{ соответственно } B \cap Q_{i_0} \cap \ldots \cap Q_{i_k} \neq 0.$$

Следовательно, в силу (23) и (5),

$$\varkappa(A) \subset N_A \quad \text{и} \quad \varkappa(B) \subset N_B,$$

откуда

$$\overline{\varkappa(A)} \subset N_A \quad \text{и} \quad \overline{\varkappa(B)} \subset N_B.$$

Более того, на основании (23) и (22), любое множество Q_i не пересекается либо с A, либо с B. Следовательно,

$$N_A \cap N_B = 0, \quad \text{откуда} \quad \overline{\varkappa(A)} \cap \overline{\varkappa(B)} = 0.$$

В дальнейшем будут применяться следующие обобщения теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть $A_0, \ldots, A_l$ — замкнутые множества размерности $\leqslant n$; тогда любую функцию $f \in (\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$, где $r \geqslant 2n+1$, можно равномерно аппроксимировать функциями $\varkappa$, удовлетворяющими условию*

(26) $$\dim[\overline{\varkappa(A_0)} \cap \ldots \cap \overline{\varkappa(A_l)}] \leqslant \dim(A_0 \cap \ldots \cap A_l).$$

Пусть множества $H_0, \ldots, H_s$ и $K_0, \ldots, K_s$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 4; тогда

(27) $$\mathcal{X} = K_0 \cup \ldots \cup K_s \quad \text{и} \quad \delta[f(K_j)] < \varepsilon.$$

Положим $E = A_0 \cup \ldots \cup A_l$ и $v = \dim(A_0 \cap \ldots \cap A_l)$. В силу § 27, III, 6, существует система открытых множеств $G_0, \ldots, G_m$, удовлетворяющая соотношениям (20), и такая, что любому набору индексов $i_0 < \ldots < i_{v+1} \leqslant m$ соответствует индекс $\nu \leqslant l$, такой, что

$$(28) \qquad A_\nu \cap G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{v+1}} = 0.$$

Более того, так как множество E обладает свойством D_n, систему $\{G_0, \ldots, G_m\}$ можно подчинить, в силу § 27, III, 5, условию

$$(29) \qquad E \cap G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}} = 0$$

(заменяя в случае необходимости множества G_i множествами Q_i, удовлетворяющими соотношениям (5), § 27, III).

Пусть (в соответствии с I, 2) $p_0, \ldots, p_m$ — система точек, находящихся в общем положении и удовлетворяющих условию (15), тогда выполняется неравенство (16).

Обозначим через N_ν, $\nu = 0, \ldots, l$, объединение симплексов $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, таких, что $A_\nu \cap G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$; тогда, в силу (29), $k \leqslant n$. Так как точки $p_0, \ldots, p_m$ находятся в общем положении в кубе $\mathcal{J}^r$, то все эти симплексы не пересекаются и N_ν — полиэдр размерности $\leqslant n$. Следовательно, пересечение $N_0 \cap \ldots \cap N_l$ представляет собой объединение симплексов $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, таких, что для любого $\nu \leqslant l$ имеет место соотношение $A_\nu \cap G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$. Отсюда, на основании (28), следует, что $k \leqslant v$, и поэтому

$$\dim(N_0 \cap \ldots \cap N_l) \leqslant v.$$

Из этого неравенства вытекает неравенство (26), так как (в силу (5))

$$\varkappa(A_\nu) \subset N_\nu \quad \text{и} \quad N_\nu = \overline{N}_\nu, \quad \text{следовательно,} \quad \overline{\varkappa(A_\nu)} \subset N_\nu.$$

Теорема 6. *Пусть $A_0, \ldots, A_l$ — замкнутые множества, размерности которых равны соответственно $k_0, \ldots, k_l$, причем $A_\nu \cap A_\mu = 0$, если $\nu \neq \mu$; тогда любую функцию $f \in (\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$, где $r \geqslant k_\nu$ при $\nu = 0, \ldots, l$, можно равномерно аппроксимировать функциями $\varkappa$, удовлетворяющими условию*

$$(30) \quad \dim[\overline{\varkappa(A_0)} \cap \ldots \cap \overline{\varkappa(A_l)}] \leqslant k_0 + \ldots + k_l - lr \ (\textit{или} = -1).$$

Пусть H_j и K_j имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 4 (если заменить $2n+1$ на r); тогда выполняются соотношения (27). Пусть $\{G_0, \ldots, G_m\}$ — система всех множеств $K_j - \bigcup A_\mu$, где $j \leqslant s$ и $\mu \neq \nu \leqslant l$ (значит, $m = (s+1)(l+1) - 1$). Следовательно, ни одно множество G_i, $i = 0, \ldots, m$, не пересекается ни с какими двумя различными элементами системы $\{A_0, \ldots, A_l\}$. Отсюда, если

$$A_\nu \cap G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0 \neq A_{\nu'} \cap G_{i_0'} \cap \ldots \cap G_{i_k'} \quad \text{и} \quad \nu \neq \nu',$$

то все индексы $i_0, \ldots, i_k$ отличаются от всех индексов $i_0', \ldots, i_{k'}'$.

Пусть точки $p_0, \ldots, p_m$ удовлетворяют замечанию 3, п. I, множества $N_0, \ldots, N_l$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 5, а Z_ν — множество вершин симплексов, образующих множество N_ν; тогда $Z_\nu \cap Z_{\nu'} = 0$. Более того, если система $\{G_0, \ldots, G_m\}$ удовлетворяет условию (29), где n заменено на r (см. замечание к формуле (29)), то рассматриваемые симплексы имеют размерность $\leqslant r$. Следовательно, в силу замечания 3, п. I,

$$\dim(N_0 \cap \ldots \cap N_l) \leqslant k_0 + \ldots + k_l - lr \quad (\text{или} = -1),$$

откуда, в силу включения $\overline{\varkappa(A_\nu)} \subset N_\nu$, следует (30).

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{X}$ — вполне ограниченное пространство размерности $\leqslant r$ и $\eta > 0$; тогда любую функцию $f \in (\mathscr{J}^r)^{\mathscr{X}}$ можно равномерно аппроксимировать функциями $\varkappa$, такими, что, каково бы ни было y, множество $\varkappa^{-1}(y)$ разлагается в конечное объединение непересекающихся замкнутых множеств диаметра $< \eta$.*

Пусть множества H_j и K_j имеют тот же смысл, что и выше, а $V_0, \ldots, V_q$ — система открытых множеств, таких, что

$$\mathscr{X} = V_0 \cup \ldots \cup V_q \quad \text{и} \quad \delta(V_\nu) < \eta \quad \text{при} \quad \nu = 0, \ldots, q.$$

Обозначим через $\{G_0, \ldots, G_m\}$ множество всех пересечений $K_j \cap V_\nu$. Тогда выполняются соотношения (20) и $\delta(G_i) < \eta$. Так как $\dim \mathscr{X} \leqslant r$, то можно, кроме того, допустить, что

$$G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{r+1}} = 0 \quad \text{при} \quad i_0 < \ldots < i_{r+1} \leqslant m.$$

Пусть точки $p_0, \ldots, p_m$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 5; тогда справедливо неравенство (16). Кроме того, в силу VI, 8,

$$\varkappa^{-1}(y) = F_0 \cup \ldots \cup F_m, \quad F_i = \overline{F}_i \subset G_i \quad \text{и} \quad F_i \cap F_{i'} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq i'.$$

Наконец, $\delta(F_i) < \eta$, так как $\delta(G_i) < \eta$.

VIII. Бесконечные комплексы и полиэдры. Счетное множество симплексов $R_1, R_2, \ldots$ называется *бесконечным комплексом*, если никакая точка симплекса $\overline{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ не является пределом последовательности точек, принадлежащих различным элементам последовательности $\{R_i\}$ [1]).

---

[1]) Обозначение (см. § 29, III): $\overline{R}_i \cap \operatorname{Ls} R_j = 0$.

Понятия *замыкания*, *замкнутого комплекса* и *простого комплекса* в случае бесконечных комплексов имеют тот же смысл, что и в случае конечных комплексов.

Аналогичным образом, множество C называется *бесконечным полиэдром*, если существует простой замкнутый бесконечный комплекс $\boldsymbol{C}$, такой, что $C = \mathbf{S}(\boldsymbol{C})$.

Можно доказать, что *любое открытое подмножество пространства $\mathscr{E}^n$ является беконечным полиэдром.* (Теорема Рунге [1]. Доказательство см. в книге Александрова и Хопфа [1], стр. 143.)

Понятие *нерва* бесконечной последовательности множеств G_0, G_1, ..., удовлетворяющих условию

(1) *любое множество G_i пересекается только с конечным числом множеств G_j,*

вводится точно так же, как в случае конечной последовательности (п. V).

Теорема V,1 допускает следующее обобщение.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{C}$ — простой замкнутый бесконечный комплекс с вершинами в точках p_0, p_1, ..., и P_i — объединение всех симплексов комплекса $\boldsymbol{C}$, имеющих точку p_i своей вершиной; тогда комплекс $\boldsymbol{C}$ представляет собой нерв последовательности P_0, P_1, ...*

Иначе говоря, *условия* $(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \in \boldsymbol{C}$ *и* $P_{i_0} \cap \ldots \cap P_{i_k} \neq 0$ *эквивалентны.*

В самом деле, так как пересечение $P_{i_0} \cap \ldots \cap P_{i_k}$ является объединением всех симплексов комплекса $\boldsymbol{C}$, имеющих своей гранью симплекс $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, то мы имеем $(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \subset P_{i_0} \cap \ldots \cap P_{i_k}$, и поскольку $(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \in \boldsymbol{C}$, то $P_{i_0} \cap \ldots \cap P_{i_k} \neq 0$. С другой стороны, если $x \in P_{i_0} \cap \ldots \cap P_{i_k}$, то точка x принадлежит симплексу $R_j \in \boldsymbol{C}$, гранью которого является симплекс $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$. Поскольку комплекс $\boldsymbol{C}$ замкнут, имеем $(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) \in \boldsymbol{C}$.

Утверждение V, 3 допускает следующее обобщение. Обозначим через $\mathscr{E}^l_{-1}$, соответственно через $\mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$, множество точек пространства $\mathscr{E}^l$ (соответственно пространства $\mathscr{E}^{\aleph_0}$), первая координата („абсцисса") которых равна нулю. В случае конечного l очевидно, что пространство $\mathscr{E}^l_{-1}$ изометрично пространству $\mathscr{E}^{l-1}$.

Теорема 2. *Пусть G_0, G_1, ... — последовательность множеств, удовлетворяющих условию* (1), *a_0, a_1, ... — последовательность точек пространства $\mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$ и ε_0, ε_1, ... — последовательность положительных чисел. Тогда существует простой бесконечный комплекс, расположенный в пространстве $\mathscr{E}^{\aleph_0} - \mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$,* *с вершинами в точках* $p_0, p_1, \ldots,$ *являющийся нервом системы* $G_0, G_1, \ldots,$ *причем выполнено неравенство*

(2) $$|p_i - a_i| < \varepsilon_i, \qquad i = 0, 1, \ldots.$$

Более того, если условие (п) *теоремы* V, 3 *выполняется, то* $\aleph_0$ *можно заменить на* $2n+1$.

В самом деле, пусть a_i^* — точка с положительной абсциссой $< 1/i$, такая, что $|a_i^* - a_i| < \varepsilon_i$. Согласно I, 2 (см. замечание 1), существует точка p_i с положительной абсциссой $< 1/i$, находящаяся на столь малом расстоянии от точки a_i^*, что выполняется неравенство (2), и, кроме того, все симплексы с вершинами, принадлежащими последовательности $p_0, p_1, \ldots,$ не пересекаются (в случае, когда выполняется условие (п), требуется только, чтобы симплексы размерности $\leqslant n$ не пересекались).

Пусть $S_0, S_1, \ldots$ — комплекс $\boldsymbol{N}$, образованный всеми симплексами $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, такими, что $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$. Докажем, что комплекс $\boldsymbol{N}$ есть нерв системы $G_0, G_1, \ldots,$ т. е. что $\boldsymbol{N}$ — простой комплекс. Для этого нужно показать, что любому симплексу S_0 соответствует индекс i_0, такой, что выполняется равенство

(3) $$\overline{S}_0 \cap \overline{\bigcup_{j > i_0} S_j} = 0.$$

Пусть η — наименьшая абсцисса вершин симплекса S_0 (следовательно, наименьшая абсцисса точек симплекса $\overline{S_0}$), и пусть $1/k \leqslant \eta$. В силу условия (1), никакая точка p_i не может быть вершиной бесконечного множества симплексов S_j. Следовательно, существует индекс i_0, такой, что при $j > i_0$ никакая из точек $p_0, \ldots, p_k$ не является вершиной симплекса S_j. Так как абсцисса точки p_j меньше $1/j$, то отсюда следует, что все вершины симплекса S_j, а стало быть, и все точки симплекса S_j имеют абсциссу $\leqslant 1/(k+1)$. Этому же неравенству удовлетворяют абсциссы точек множества $\overline{\bigcup_{j > i_0} S_j}$. Так как $1/(k+1) < \eta$, отсюда следует неравенство (3).

Отображение $\varkappa$ можно построить также для бесконечных последовательностей открытых множеств $G_0, G_1, \ldots,$ удовлетворяющих условию (1). Положим

(4) $$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \quad \text{и} \quad F_i = G - G_i.$$

Пусть $p_0, p_1, \ldots$ — последовательность точек евклидова пространства $\mathscr{E}^n$ или пространства $\mathscr{E}^{\aleph_0}$; положим

(5) $$\varkappa(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(x) \cdot p_i,$$

где

$$\lambda_i(x) = \frac{\rho(x, F_i)}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \rho(x, F_j)}. \tag{6}$$

Для любой точки $x \in G$, в силу (1), $\rho(x, F_j) = 0$ при достаточно большом j. Так как, с другой стороны, в силу (4),

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho(x, F_j) \neq 0,$$

то суммирование (5) фактически конечное.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Функция $\varkappa$ непрерывна на множестве G.*

Следующая теорема доказывается аналогично теоремам 3 и 4, п. VI.

Теорема 4. *Пусть N — комплекс, составленный из симплексов $(p_{i_0} \ldots p_{i_k})$, таких, что $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$; тогда*

$$\varkappa(G) \subset N = \mathbf{S}(N)$$

и при этом выполняются включения VI (5) *и* VI (7).

Более того, *если комплекс N простой, то он является нервом системы $G_0, G_1, \ldots$ и при этом выполняются равенства* VI (8) *и* VI (10).

Наконец, *если выполнено условие* (n) *теоремы* V, 3, *то имеет место формула* VI (11).

IX. Продолжение непрерывных функций[1]. Используя отображение $\varkappa$, построенное для бесконечных систем, можно получить более удобную форму теоремы Титце (§ 14, IV) (пространство $\mathscr{X}$ предполагается метрическим сепарабельным).

Теорема 1. *Пусть $F = \overline{F} \subset \mathscr{X}$ и $f \in (\mathscr{E}^r)^F$, $r \leqslant \aleph_0$. Тогда существуют множество N — объединение последовательности симплексов, содержащихся в пространстве $\mathscr{E}^r$, и продолжение $f^* \in [f(F) \cup N]^{\mathscr{X}}$ функции f.*

Более точно: *пусть множество $G = \mathscr{X} - F$ представлено в виде объединения открытых множеств $G_0, G_1, \ldots$, удовлетворяющих теореме* 4, § 21, VIII, *т. е. выполнены условие* VIII (1) *и соотношения*

(ii) $\overline{G_i} \subset G$,

(iii) $\lim\limits_{i \to \infty} \delta(G_i) = 0$;

[1]) См. Лефшец [1], Куратовский [27].

тогда существует последовательность точек p_0, p_1, ... в пространстве $\mathscr{E}^r$, такая, что отображение $\varkappa$, соответствующее системам $(G_0, G_1, \ldots)$ и $(p_0, p_1, \ldots)$, представляет собой непрерывное продолжение отображения f на множество G.

Очевидно, можно допустить, что $G \neq 0 \neq F$ и что элементы (конечной или бесконечной) последовательности $G_0, G_1, \ldots$ являются непустыми множествами.

Пусть q_i, a_i — пара точек, такая, что

$$(1) \qquad q_i \in G_i, \qquad a_i \in F,$$

$$(2) \qquad |a_i - q_i| < \rho(G_i, F) + \frac{1}{i}.$$

Положим

$$(3) \qquad f_0(q_i) = f(a_i) \quad \text{и} \quad f_0(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in F.$$

Функция f_0 непрерывна на множестве $Q = F \cup q_0 \cup q_1 \cup \ldots$. В самом деле, поскольку последовательность $q_0, q_1, \ldots$ является дискретным множеством, в силу VIII (1), то для доказательства непрерывности функции f_0 достаточно показать, что из условия

$$(4) \qquad \lim_{i \to \infty} q_{j_i} = a \in F, \quad \text{где} \quad j_0 < j_1 < \ldots,$$

следует равенство

$$(5) \qquad \lim_{i \to \infty} f_0(q_{j_i}) = f_0(a).$$

Но из неравенств

$$|a_{j_i} - a| \leqslant |a_{j_i} - q_{j_i}| + |q_{j_i} - a|$$

и

$$|a_{j_i} - q_{j_i}| < \rho(G_{j_i}, F) + \frac{1}{j_i} \leqslant |q_{j_i} - a| + \frac{1}{j_i},$$

справедливых при $a \in F$ (согласно (2) и (1)), вытекает неравенство

$$|a_{j_i} - a| < 2|q_{j_i} - a| + \frac{1}{j_i}.$$

Отсюда, в силу (4), $\lim\limits_{i \to \infty} a_{j_i} = a$, следовательно,

$$(6) \qquad \lim_{i \to \infty} f(a_{j_i}) = f(a),$$

так как функция f непрерывна (на множестве F).

В силу (3), формулу (5) можно непосредственно вывести из (6). Положим

$$p_i = f_0(q_i)$$

и обозначим через N объединение симплексов $\left(p_{i_0} \ldots p_{i_k}\right)$, таких, что $G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} \neq 0$. Пусть f^* — функция, определенная условиями

(7) $$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in F, \\ \varkappa(x) & \text{при} \quad x \in G, \end{cases}$$

где функция $\varkappa$ соответствует системам $(G_0, G_1, \ldots)$ и $(p_0, p_1, \ldots)$. Так как множество G открыто, то достаточно доказать непрерывность функции f^* на множестве F.

Пусть $a \in F$ и $\varepsilon > 0$. Так как функция f_0 непрерывна на множестве Q, то существует окрестность H точки a, такая, что для $q_i \in H$ имеем

(8) $$|f_0(q_i) - f(a)| < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad |p_i - f(a)| < \varepsilon.$$

Обозначим через K множество $H \cap F$, пополненное точками x, обладающими следующим свойством:

(9) $$(x \in G_i) \Rightarrow (G_i \subset H).$$

Множество K является окрестностью точки a. В самом деле, в противном случае существовали бы последовательность точек $\{x_i\}$ и последовательность индексов $\{m_i\}$, такие, что

(10) $$\lim_{i \to \infty} x_i = a, \qquad x_i \in G_{m_i} \quad \text{и} \quad G_{m_i} - H \neq 0.$$

В силу (ii), $a \notin \overline{G}_i$. Следовательно, существует бесконечное множество различных индексов m_i. Но тогда соотношения (10) несовместимы с (iii).

Поскольку K — окрестность точки a, остается показать, что если $x \in G \cap K$, то

(11) $$|f^*(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $i_0, \ldots, i_k$ — система всех индексов, таких, что $x \in G_{i_0}, \ldots$ $\ldots, x \in G_{i_k}$. Тогда имеем

(12) $$x \in \Big[G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} - \bigcup_{i \neq i_j} G_i\Big],$$

откуда, в силу (7) и VI (5) (ср. VIII, 4), получаем

(13) $$f^*(x) \in \left(p_{i_0} \ldots p_{i_k}\right).$$

Так как $x \in K \cap G_{i_m}$ (при $m \leqslant k$), то, в силу (9), $G_{i_m} \subset H$, откуда, в силу (1), $q_{i_m} \in H$, и, следовательно (см. (8)),

(14) $$\left|p_{i_m} - f(a)\right| < \varepsilon, \qquad m = 0, 1, \ldots, k.$$

Неравенство (11) следует из сопоставления неравенства (14) с соотношением (13) (в силу теоремы VII, 2, если вместо симплекса $(p_0 \dots p_n)$ подставить симплекс $\left(f(a)\, p_{i_0} \dots p_{i_k}\right)$).

Замечание. Теорема 1 остается верной, если пространство $\mathscr{E}^r$ заменить произвольным *выпуклым* подмножеством.

Теорема 2. *Если в предположениях теоремы* 1 *имеет место включение* $f(F) \subset \mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$ *и* $r = \aleph_0$, *то* N *можно считать бесконечным полиэдром, принадлежащим* $\mathscr{E}^{\aleph_0} - \mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$.

Аналогичным образом, *если* $r \geqslant 2n+1$, $f(F) \subset \mathscr{E}^r_{-1}$ *и нерв* $\mathbf{N}$ *последовательности* $\{G_i\}$ *имеет размерность* $\leqslant n$ (*т. е. если выполнено условие* (n) *теоремы* V, 3), *то* N *можно считать бесконечным полиэдром размерности* $\leqslant n$, *содержащимся в пространстве* $\mathscr{E}^r - \mathscr{E}^r_{-1}$. *А именно* $N = \mathbf{S}(\mathbf{N})$, *где* $\mathbf{N}$ — *нерв последовательности* $\{G_i\}$.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно только видоизменить определение функции f_0 (т. е. первое равенство (3)) в доказательстве теоремы 1 следующим образом.

Пусть, в соответствии с VIII, 2, $\mathbf{N}$ — простой бесконечный комплекс, расположенный в пространстве $\mathscr{E}^r - \mathscr{E}^r_{-1}$ (где $r = \aleph_0$, соответственно $r \geqslant 2n+1$), с вершинами $p_0, p_1, \dots$, являющийся нервом последовательности $G_0, G_1, \dots$ и удовлетворяющий равенству

$$(15) \qquad \lim_{i \to \infty} |p_i - f(a_i)| = 0.$$

Положим $f_0(q_i) = p_i$. Функция f_0 непрерывна, так как из условия (4) следует (6), а из последнего, в силу (15), вытекает, что $\lim\limits_{i \to \infty} p_{j_i} = f(a)$, что эквивалентно (5).

Доказательство непрерывности функции f^* сохраняется без изменений.

Следствие 2а[1]). *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — *метрические сепарабельные пространства, а* F — *замкнутое подмножество пространства* $\mathscr{X}$, *такое, что* $\dim(\mathscr{X} - F) = n$, *и пусть* $f \in \mathscr{Y}^F$.

Тогда пространство $\mathscr{Y}$ *можно рассматривать как подмножество некоторого пространства* $\mathscr{Z}$, *такого, что* $\mathscr{Y}$ *замкнуто в* $\mathscr{Z}$, *множество* $\mathscr{Z} - \mathscr{Y}$ *есть бесконечный* n-*мерный полиэдр и функция* f *допускает продолжение* $f^* \in \mathscr{Z}^{\mathscr{X}}$.

В самом деле, можно считать, что пространство $\mathscr{Y}$ расположено в пространстве $\mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$, поэтому применима предыдущая теорема.

---

[1]) Ср. с аналогичной теоремой Хаусдорфа [8] для несепарабельных пространств.

Г. СЧЕТНЫЕ ОПЕРАЦИИ. БОРЕЛЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА. *B*-ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Пространство, рассматриваемое в § 29—32, предполагается метрическим.

§ 29. Нижний и верхний пределы

I. Нижний предел[1]).

Определение. Точка p принадлежит *нижнему пределу* последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots$: $p \in \operatorname{Li}\limits_{n\to\infty} A_n$, если любая окрестность точки p пересекается со всеми множествами A_n, начиная с некоторого n.

Разумеется, термин „окрестность" можно заменить термином „открытая окрестность", а также термином „открытый шар с центром в точке p".

Теорема. *Формула $p \in \operatorname{Li}\limits_{n\to\infty} A_n$ эквивалентна существованию последовательности точек $\{p_n\}$, такой, что*

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n \quad \text{и} \quad p_n \in A_n,$$

или равенству

$$\lim_{n\to\infty} \rho(p, A_n) = 0.$$

Заметим, что последовательность $\{p_n\}$ определена, начиная с индекса, не обязательно равного 1 (в случае, когда существуют пустые множества A_n).

Доказательство. Пусть $p \in \operatorname{Li} A_n$, и пусть S_m — шар с центром в точке p радиуса $1/m$; тогда существует индекс k_m, такой, что $S_m \cap A_n \neq 0$ при $n \geqslant k_m$.

Более того, можно допустить, что $k_m > k_{m-1}$. Последовательность $\{p_n\}$, где $p_n \in S_m \cap A_n$ при $k_m \leqslant n < k_{m+1}$, сходится к точке p, так как $|p_n - p| < 1/m$. Обратная импликация очевидна.

Примеры. Пусть множество A_n состоит из единственной точки p_n, тогда

$$\operatorname{Li}_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} p_n,$$

---

[1]) Понятия нижнего и верхнего пределов принадлежат Пенлеве [1]; некоторые соображения по этому поводу имеются еще у Зоретти [1]. Хаусдорф называет их «unterer (oberer) abgeschlossener Limes». Эти понятия не следует смешивать с понятиями нижнего и верхнего пределов в смысле общей теории множеств (определенными в § 1, V):

$$\operatorname{Lim\,inf}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_n (A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \ldots)$$

$$\text{и} \quad \operatorname{Lim\,sup}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_n (A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots).$$

если этот предел существует, и $\mathrm{Li}\,A_n = 0$ в противном случае, так как $\rho(p, A_n) = |p - p_n|$.

Последовательность прямоугольников, имеющих общее основание и неограниченно уменьшающиеся высоты, имеет своим нижним пределом это основание.

II. Правила действий. Имеют место следующие правила:

1. $\overline{\mathrm{Li}\,A_n} = \mathrm{Li}\,A_n = \mathrm{Li}\,\overline{A}_n$.

2. $(A_n \subset B_n) \Rightarrow (\mathrm{Li}\,A_n \subset \mathrm{Li}\,B_n)$.

3. $\mathrm{Li}\,A_n \cup \mathrm{Li}\,B_n \subset \mathrm{Li}\,(A_n \cup B_n)$.

3a. $\bigcup\limits_t \mathrm{Li}\,A_n(t) \subset \mathrm{Li}\Big(\bigcup\limits_t A_n(t)\Big)$.

4. $\mathrm{Li}\,(A_n \cap B_n) \subset (\mathrm{Li}\,A_n) \cap (\mathrm{Li}\,B_n)$.

4a. $\mathrm{Li}\Big(\bigcap\limits_t A_n(t)\Big) \subset \bigcap\limits_t \mathrm{Li}\,A_n(t)$.

5. *Если* $k_1 < k_2 < \ldots$, *то* $\mathrm{Li}\,A_n \subset \mathrm{Li}\,A_{k_n}$.

6. *Если* $A_n = A$, *то* $\mathrm{Li}\,A_n = \overline{A}$.

7. $\mathrm{Li}\,A_n$ *не меняется при изменении конечного числа множеств* A_n.

8. $\bigcap\limits_n A_n \subset \mathrm{Lim\ inf}\ A_n \subset \mathrm{Li}\,A_n$.

9. $\mathrm{Li}\,(A_n \times B_n) = \mathrm{Li}\,A_n \times \mathrm{Li}\,B_n$.

В самом деле, если $q \in \overline{\mathrm{Li}\,A_n}$ и G — открытая окрестность точки q, то существует точка $p \in G \cap \mathrm{Li}\,A_n$. Следовательно, начиная с некоторого n, $G \cap A_n \neq 0$, откуда $q \in \mathrm{Li}\,A_n$. Кроме того, если множество H открыто, то неравенство $H \cap A_n \neq 0$ эквивалентно неравенству $H \cap \overline{A}_n \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{Li}\,A_n = \mathrm{Li}\,\overline{A}_n$, откуда вытекает формула 1.

Формулы 2, 5—7, 9 вытекают непосредственно из определения, в то время как формулы 3—4a являются следствиями формулы 2 (см. § 4, III).

Наконец, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathop{\mathrm{Li}}\limits_{n\to\infty} A_n$, следовательно, в силу формулы 7, $\bigcap\limits_{n=m}^{\infty} A_n \subset \mathop{\mathrm{Li}}\limits_{n\to\infty} A_n$, откуда вытекает формула 8.

III. Верхний предел.

Определение. Точка p принадлежит *верхнему пределу* последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots$: $p \in \mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{n\to\infty} A_n$, если любая окрестность точки p пересекается с бесконечным числом множеств A_n.

Рассуждая, как в п. I, можно показать, что это условие эквивалентно *существованию последовательности точек* $\{p_{k_n}\}$, *такой, что*

$$k_1 < k_2 < \ldots, \quad p = \lim_{n\to\infty} p_{k_n} \quad \text{и} \quad p_{k_n} \in A_{k_n},$$

или, что то же самое, *равенству*

$$\liminf \rho(p, A_n) = 0.$$

Примеры. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность всех рациональных точек, A_n — множество, состоящее из одной точки r_n; тогда $\operatorname{Ls} A_n$ есть множество всех действительных чисел. В примере с прямоугольниками, рассмотренном в п. I, $\operatorname{Ls} A_n = \operatorname{Li} A_n$.

IV. Правила действий. Имеют место следующие правила:

1. $\overline{\operatorname{Ls} A_n} = \operatorname{Ls} A_n = \operatorname{Ls} \overline{A}_n$.
2. $(A_n \subset B_n) \Rightarrow (\operatorname{Ls} A_n \subset \operatorname{Ls} B_n)$.
3. $\operatorname{Ls}(A_n \cup B_n) = \operatorname{Ls} A_n \cup \operatorname{Ls} B_n$.

3a. $\bigcup_t \operatorname{Ls} A_n(t) \subset \operatorname{Ls}\left(\bigcup_t A_n(t)\right)$.

4. $\operatorname{Ls}(A_n \cap B_n) \subset (\operatorname{Ls} A_n) \cap (\operatorname{Ls} B_n)$.

4a. $\operatorname{Ls}\left(\bigcap_t A_n(t)\right) \subset \bigcap_t (\operatorname{Ls} A_n(t))$.

5. *Если* $k_1 < k_2 < \ldots$, *то* $\operatorname{Ls} A_{k_n} \subset \operatorname{Ls} A_n$.
6. *Если* $A_n = A$, *то* $\operatorname{Ls} A_n = \overline{A}$.
7. $\operatorname{Ls} A_n$ *не меняется при изменении конечного числа множеств* A_n.

8 [1]. $\operatorname{Ls} A_n = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_{n+i}} \subset \overline{\bigcup_n A_n} = \bigcup_n \overline{A}_n \cup \operatorname{Ls} A_n$.

9. $\operatorname{Ls}(A_n \times B_n) \subset \operatorname{Ls} A_n \times \operatorname{Ls} B_n$.

Соотношение 1 доказывается так же, как II, 1. Для доказательства равенства 3 положим $p = \lim p_{k_n}$, где $p_{k_n} \in (A_{k_n} \cup B_{k_n})$. Тогда существует бесконечная последовательность индексов k_n, такая, что либо $p_{k_n} \in A_{k_n}$, либо $p_{k_n} \in B_{k_n}$. В первом случае $p \in \operatorname{Ls} A_n$, во втором $p \in \operatorname{Ls} B_n$.

Соотношения 2, 3а—4а непосредственно вытекают из равенства 3. Формулы 5—7 и 9 легко следуют из определения.

Перейдем к формуле 8. Пусть $p \in \operatorname{Ls} A_n$. Тогда $p = \lim p_{k_n}$, где $p_{k_n} \in A_{k_n}$. Так как $k_n \geqslant n$, то $p_{k_n} \in (A_i \cup A_{i+1} \cup \ldots)$ при $n > i$, следовательно, $p \in \overline{A_i \cup A_{i+1} \cup \ldots}$, каково бы ни было i.

[1]) См. Хаусдорф [1], стр. 237 (4). Для $\operatorname{Li} A_n$ аналогичной формулы не существует, см. Энгелькинг [2].

Обратно, если точка p не принадлежит множеству $\mathrm{Ls}\, A_n$, то существуют окрестность G точки p и индекс m, такие, что $G \cap A_n = 0$ при $n \geqslant m$. Следовательно, точка p не принадлежит множеству $A_m \cup A_{m+1} \cup \ldots$.

Последняя часть формулы 8 вытекает непосредственно из § 4, III, 9.

V. Связь между пределами Li и Ls. Имеет место формула

$$\mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Ls}\, A_n, \tag{0}$$

точнее

$$\mathrm{Li}\, A_n = \bigcap \mathrm{Ls}\, A_{k_n} \subset \bigcup \mathrm{Li}\, A_{k_n} = \mathrm{Ls}\, A_n, \tag{1}$$

где $\bigcap$ и $\bigcup$ распространяются на всевозможные возрастающие последовательности индексов $\{k_n\}$.

В самом деле, с одной стороны, в силу II, 5 и IV, 5,

$$\mathrm{Li}\, A_n \subset \bigcap \mathrm{Li}\, A_{k_n} \subset \bigcap \mathrm{Ls}\, A_{k_n} \text{ и } \bigcup \mathrm{Li}\, A_{k_n} \subset \bigcup \mathrm{Ls}\, A_{k_n} \subset \mathrm{Ls}\, A_n,$$

а с другой стороны,

1° если $p \notin \mathrm{Li}\, A_n$, то существуют окрестность G точки p и последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что $G \cap A_{k_n} = 0$ при любом n; следовательно, $p \notin \mathrm{Ls}\, A_{k_n}$;

2° если $p \in \mathrm{Ls}\, A_n$, то существует последовательность $\{p_{k_n}\}$, такая, что $p_{k_n} \in A_{k_n}$ и $p = \lim p_{k_n}$; следовательно, $p \in \mathrm{Li}\, A_{k_n}$.

Далее, имеем

$$\mathrm{Li}\, A_n - \mathrm{Ls}\, B_n \subset \mathrm{Li}\,(A_n - B_n). \tag{2}$$

В самом деле, пусть $p \in (\mathrm{Li}\, A_n - \mathrm{Ls}\, B_n)$. Следовательно, $p = \lim p_n$, $p_n \in A_n$, а так как $p \notin \mathrm{Ls}\, B_n$, то $p_n \notin B_n$, начиная с некоторого достаточно большого n. Следовательно, $p_n \in (A_n - B_n)$, и поэтому $p \in \mathrm{Li}\,(A_n - B_n)$.

С формулами II, 3 и IV, 3 сопоставим следующую формулу:

$$\mathrm{Li}\,(A_n \cup B_n) \subset \mathrm{Li}\, A_n \bigcup \mathrm{Li}\, B_n \cup (\mathrm{Ls}\, A_n \cap \mathrm{Ls}\, B_n), \tag{3}$$

откуда, в частности (на основании II, 3), имеем

(4) *если* $\mathrm{Ls}\, A_n \cap \mathrm{Ls}\, B_n = 0$, *то* $\mathrm{Li}\,(A_n \cup B_n) = \mathrm{Li}\, A_n \cup \mathrm{Li}\, B_n$.

В самом деле, пусть $p \in [\mathrm{Li}\,(A_n \cup B_n) - (\mathrm{Ls}\, A_n \cap \mathrm{Ls}\, B_n)]$. Покажем, что $p \in (\mathrm{Li}\, A_n \cup \mathrm{Li}\, B_n)$. Пусть, например, $p \notin \mathrm{Ls}\, B_n$. Полагая $p = \lim p_n$ и $p_n \in (A_n \cup B_n)$, получим, что $p_n \notin B_n$ при достаточно больших n; следовательно, $p_n \in A_n$, и поэтому $p \in \mathrm{Li}\, A_n$.

VI. Предел. *Последовательность множеств* $\{A_n\}$ *называется сходящейся к множеству* A: $A = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} A_n$ [1]), *если* $\operatorname*{Li}_{n\to\infty} A_n = A = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} A_n$.

В частности, если множество A_n состоит из одной точки p_n, то последовательность $\{A_n\}$ будет сходящейся в двух случаях: 1) если $\lim p_n$ существует (тогда множество $\operatorname{Lim} A_n$ состоит из единственной точки $\lim p_n$), 2) если последовательность $\{p_n\}$ не содержит никакой сходящейся подпоследовательности (и тогда $\operatorname{Lim} A_n = 0$).

Имеют место следующие соотношения (в формулах 1—5 и 9 последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ предполагаются сходящимися):

1. $\overline{\operatorname{Lim} A_n} = \operatorname{Lim} A_n = \operatorname{Lim} \overline{A}_n$.
2. $(A_n \subset B_n) \Rightarrow (\operatorname{Lim} A_n \subset \operatorname{Lim} B_n)$.

2a. $(p_n \in A_n$ и $p = \lim p_n) \Rightarrow (p \in \operatorname{Lim} A_n)$.

3. $\operatorname{Lim}(A_n \cup B_n) = \operatorname{Lim} A_n \cup \operatorname{Lim} B_n$.
4. *Если* $k_1 < k_2 < \ldots$, *то* $\operatorname{Lim} A_{k_n} = \operatorname{Lim} A_n$.
5. *Если* $A_n = A$, *то* $\operatorname{Lim} A_n = \overline{A}$.
6. *Предел последовательности не изменяется и сходимость не нарушается, если заменить в ней конечное число членов.*
7. *Если* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *то* $\operatorname{Lim} A_n = \overline{\bigcup_n A_n}$.
8. *Если* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, *то* $\operatorname{Lim} A_n = \bigcap_n \overline{A}_n$.
9. $\operatorname{Lim}(A_n \times B_n) = \operatorname{Lim} A_n \times \operatorname{Lim} B_n$.

Правила 1, 2, 5, 6, 9 непосредственно вытекают из соответствующих правил п. II, IV. Правило 2а выводится из 2. Правила 3 и 4 следуют из формул

$$\operatorname{Ls}(A_n \cup B_n) = \operatorname{Ls} A_n \cup \operatorname{Ls} B_n = \operatorname{Li} A_n \cup \operatorname{Li} B_n \subset \\ \subset \operatorname{Li}(A_n \cup B_n) \subset \operatorname{Ls}(A_n \cup B_n),$$

$$\operatorname{Lim} A_n = \operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Li} A_{k_n} \subset \operatorname{Ls} A_{k_n} \subset \operatorname{Ls} A_n = \operatorname{Lim} A_n.$$

Из предположения утверждения 7 следует, что

$$A_n = A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots, \quad \text{откуда} \quad \bigcup_n A_n = \bigcup_n (A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots),$$

и, в силу II, 8 и IV, 8,

$$\overline{\bigcup_n A_n} \subset \operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Ls} A_n \subset \overline{\bigcup_n A_n}.$$

---

[1]) Это понятие не следует смешивать с $\operatorname*{Limes}_{n\to\infty} A_n$ в смысле общей теории множеств, см. § 1, V, и п. I, примечание.

Аналогичным образом предположение предложения 8 дает равенство $\overline{A}_n = \overline{A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots}$, откуда

$$\bigcap_n \overline{A}_n \subset \mathrm{Li}\, \overline{A}_n = \mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Ls}\, A_n = \bigcap_n \overline{A}_n.$$

VII. Относительные свойства. Пусть E — данное множество. Нижним пределом последовательности подмножеств A_n множества E относительно множества E является множество всех точек $p \in E$, таких, что если G — произвольное открытое множество, содержащее точку p, то для всех достаточно больших n имеем $E \cap G \cap A_n \neq 0$. Отсюда непосредственно вытекает, что нижний предел относительно множества E совпадает с множеством $E \cap \mathrm{Li}\, A_n$.

Аналогичным образом верхний предел относительно множества E совпадает с множеством $E \cap \mathrm{Ls}\, A_n$, а предел относительно E есть множество $E \cap \mathrm{Lim}\, A_n$.

VIII. Обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса.

Любая последовательность подмножеств сепарабельного пространства содержит сходящуюся подпоследовательность (предел которой может быть пустым множеством) [1]).

Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства и $A_1, A_2, \ldots$ — данная последовательность множеств. Определим множества A_i^n следующим образом:

1) $A_i^1 = A_i$, каково бы ни было i;

2) если для некоторого $n > 1$ существует последовательность $k_1 < k_2 < \ldots$, такая, что $R_n \cap \mathrm{Ls}_{i \to \infty}\, A_{k_i}^{n-1} = 0$, то положим $A_i^n = A_{k_i}^{n-1}$ (выбор последовательности $\{k_i\}$ является произвольным);

3) если не существует никакой последовательности указанного выше вида, то полагаем $A_i^n = A_i^{n-1}$.

Покажем, что последовательность $D_n = A_n^n$ сходящаяся.

Предположим, напротив, что $\mathrm{Ls}\, D_n \neq \mathrm{Li}\, D_n$. Тогда, согласно V, 1, существует подпоследовательность $\{D_{j_n}\}$, такая, что $\mathrm{Ls}\, D_{j_n} \neq \mathrm{Ls}\, D_n$.

Так как оба последние множества замкнуты, то существует такое множество R_m, что

(i) $$R_m \cap \mathrm{Ls}\, D_{j_n} = 0,$$

(ii) $$R_m \cap \mathrm{Ls}\, D_n \neq 0.$$

Последовательность $\{D_{j_n}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{D_n\}$, а последняя в свою очередь начиная

[1]) См. Хаусдорф [5], Заранкевич [1], Урысон [10]. См. также Важевский [1], [2] и Любен [1].

с $(m-1)$-го члена является подпоследовательностью последовательности $\{A_i^{m-1}\}$, $i=1, 2, \ldots$ В силу (i), отсюда вытекает, что если заменить n на m, то мы придем к определению 2). Следовательно, $R_m \cap \operatorname*{Ls}_{i\to\infty} A_i^m = 0$. Так как последовательность $\{D_n\}$ (за исключением первых m членов) является подпоследовательностью последовательности $\{A_i^m\}$, $i=1, 2 \ldots$, то отсюда следует, что $R_m \cap \operatorname{Ls} D_n = 0$. что противоречит (ii).

Следствие. *В любом сепарабельном пространстве*

$$\operatorname{Li} A_n = \bigcap{}' \operatorname{Lim} A_{k_n} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ls} A_n = \bigcup{}' \operatorname{Lim} A_{k_n},$$

где $\bigcap'$ *и* $\bigcup'$ *распространяются на любые сходящиеся подпоследовательности* $\{A_{k_n}\}$.

Для доказательства первого равенства достаточно, в силу V, 1, показать, что если $p \notin \operatorname{Li} A_n$, то существует сходящаяся последовательность $\{A_{k_n}\}$, такая, что $p \notin \operatorname{Lim} A_{k_n}$. По предположению, существуют открытая окрестность G точки p и последовательность $\{A_{j_n}\}$, такие, что $A_{j_n} \cap G = 0$. Пусть тогда $\{A_{k_n}\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{A_{j_n}\}$.

Перейдем к доказательству второго равенства. В силу V, 1, имеет место включение $\bigcup' \operatorname{Lim} A_{k_n} \subset \operatorname{Ls} A_n$. С другой стороны, если $p \in \operatorname{Ls} A_n$, то существует подпоследовательность $\{A_{k_n}\}$, такая, что $p \in \operatorname{Li} A_{k_n}$, следовательно, как мы только что видели, существует сходящаяся последовательность $\{A_{k_{j_n}}\}$, такая, что $p \in \operatorname{Lim} A_{k_{j_n}} \subset \subset \bigcup' \operatorname{Lim} A_{k_n}$.

IX. Пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$. Этим символом мы обозначим для любого метрического пространства $\mathscr{X}$ *пространство, элементами которого являются все замкнутые подмножества пространства* $\mathscr{X}$, *а переход к пределу понимается в смысле определения п.* VI.

Теорема 1. $(2^{\mathscr{X}})_L$ *есть* $\mathscr{L}^*$*-пространство.*

В самом деле, в силу VI, 4 и 5, выполняются условия 1° и 2°, § 20, I. Чтобы проверить условие 3°, допустим, что любой последовательности $k_1 < k_2 < \ldots$ соответствует последовательность $m_1 < m_2 < \ldots$, такая, что

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} A_{k_{m_n}} = A. \tag{1}$$

Докажем, что $A = \operatorname{Lim} A_n$, т. е. $\operatorname{Ls} A_n \subset A \subset \operatorname{Li} A_n$.

Пусть $p \in \operatorname{Ls} A_n$. Тогда, в силу V, 1, существует последовательность $k_1 < k_2 < \ldots$, такая, что $p \in \operatorname{Li} A_{k_n}$. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots$ — последовательность, удовлетворяющая (1); тогда, принимая во внимание II, 5, получаем

$$p \in \operatorname{Li} A_{k_n} \subset \operatorname{Li} A_{k_{m_n}} = A, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{Ls} A_n \subset A.$$

С другой стороны, пусть $p \in A$ и $k_1 < k_2 < \ldots$ — произвольная последовательность, а $m_1 < m_2 < \ldots$ — соответствующая ей последовательность, удовлетворяющая условию (1). Тогда (см. IV, 5)

$$p \in A = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} A_{k_{m_n}} = \operatorname{Ls} A_{k_{m_n}} \subset \operatorname{Ls} A_{k_n}$$

и, следовательно (в силу V, 1), $p \in \operatorname{Li} A_n$. Поэтому $A \subset \operatorname{Li} A_n$.

Замечания. 1. Пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$ может не быть топологическим. В самом деле, рассмотрим следующий пример: пространство $\mathscr{X}$ состоит из: 1) числа 0, 2) чисел $\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$, где $n = 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{n-1}$, 3) числа 1, 4) чисел $1 + \frac{1}{n}$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — семейство всех пар $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k},\ 1 + \frac{1}{n}\right)$. Каждое число вида $1 + \frac{1}{n}$ является элементом семейства $\overline{\boldsymbol{A}}$. Следовательно, множество, состоящее из числа 1, принадлежит множеству $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$, тогда как оно не принадлежит множеству $\overline{\boldsymbol{A}}$. Таким образом, $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \neq \overline{\boldsymbol{A}}$.

2. Необходимо отметить, что пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$ существенно отличается от пространств $2^{\mathscr{X}}$ (см. § 17, I) и $(2^{\mathscr{X}})_m$ (см. § 21, VII). Последнее пространство всегда является метрическим, тогда как первое может быть неметризуемым (как показывает предыдущий пример). Первое пространство, как мы увидим, является сепарабельным, если пространство $\mathscr{X}$ сепарабельно, тогда как $(2^{\mathscr{X}})_m$ может быть несепарабельным (см. § 21, VIII, замечание 2).

Теорема 2. *Если $A_n \in (2^{\mathscr{X}})_m$ и $A \in (2^{\mathscr{X}})_m$, то из условия $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0$ следует, что $\operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} A_n = A$. Следовательно, пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$ является взаимно однозначным и непрерывным образом пространства $(2^{\mathscr{X}})_m$ (пространство $\mathscr{X}$ предполагается ограниченным).* (См. Хаусдорф [5].)

В самом деле, пусть $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{dist}(A_n, A) = 0$. Тогда любому $\varepsilon > 0$ соответствует индекс $n(\varepsilon)$, такой, что $\operatorname{dist}(A_n, A) < \varepsilon$ для любого $n > n(\varepsilon)$. Иначе говоря,

(1) для любой точки $x \in A$ имеем $\rho(A_n, x) < \varepsilon$, каково бы ни было $n > n(\varepsilon)$;

(2) существует последовательность ε_n, стремящаяся к нулю, такая, что $\rho(y, A) < \varepsilon_n$, какова бы ни была точка $y \in A_n$.

Докажем, что $\operatorname{Lim} A_n = A$, т. е. что

$$1^\circ\ A \subset \operatorname{Li} A_n \quad \text{и} \quad 2^\circ\ \operatorname{Ls} A_n \subset A.$$

1°. Пусть $x \in A$ и G — окрестность точки x. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$, в силу (1), имеет место соотношение $G \cap A_n \neq 0$, каково бы ни было $n > n(\varepsilon)$. Следовательно, $x \in \operatorname{Li} A_n$.

2°. Пусть, с другой стороны, $x \in \operatorname{Ls} A_n$. Следовательно, $x = \lim\limits_{n \to \infty} y_{k_n}$, где $y_{k_n} \in A_{k_n}$. В силу (2), существует точка $a_{k_n} \in A$, такая, что $|y_{k_n} - a_{k_n}| < \varepsilon_n$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, то $x = \lim\limits_{n \to \infty} a_{k_n}$, откуда $x \in A$.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X}$ — сепарабельное метрическое пространство; тогда пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$, а также любое подмножество этого пространства сепарабельны.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{X}_1$ — вполне ограниченное пространство, гомеоморфное пространству $\mathscr{X}$ (см. § 22, II, следствие 1a). Определенное топологически пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$ гомеоморфно пространству $(2^{\mathscr{X}_1})_L$. Итак, поскольку пространство $\mathscr{X}_1$ вполне ограничено, пространство $(2^{\mathscr{X}_1})_m$ сепарабельно (§ 21, VIII, 2 и 3).

Так как пространство $(2^{\mathscr{X}_1})_L$, а следовательно, и пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$, является непрерывным образом пространства $(2^{\mathscr{X}_1})_m$, то любое подмножество пространства $(2^{\mathscr{X}})_L$, как непрерывный образ сепарабельного множества, сепарабельно (см. § 13, IV, 3).

Замечание 3. Точки накопления, а также точки конденсации являются инвариантами взаимно однозначных непрерывных отображений ($\mathscr{L}^*$-пространств), поэтому из теоремы 2 вытекает, что *если $\boldsymbol{A}$ — несчетное подмножество пространства $(2^{\mathscr{X}})_L$, то любой элемент множества $\boldsymbol{A}$, за исключением, быть может, счетного числа, является точкой конденсации* (см. Заранкевич [2]), *и, кроме того, множество $\boldsymbol{A}$ содержит подмножество, плотное в себе*. Следовательно, *любое разреженное множество $\boldsymbol{A}$ счетно* (см. § 23, III и V).

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{X}$ — сепарабельное метрическое пространство; тогда пространство $(2^{\mathscr{X}})_L$ счетно-компактно.*

Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы VIII (с учетом VI, 1).

Теорема 5. *Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся подмножества метрического пространства $\mathscr{X}$; тогда*

$$(2^{A \cup B})_L \underset{\text{top}}{=} (2^A)_L \times (2^B)_L.$$

В самом деле, любой паре замкнутых множеств X, Y, где $X \subset A$ и $Y \subset B$, поставим в соответствие их объединение $F(X, Y) = X \cup Y$. Очевидно, что функция F определяет взаимно однозначное отображение пространства $(2^A)_L \times (2^B)_L$ на пространство $(2^{A \cup B})_L$.

Непрерывность функции F является прямым следствием формулы VI, 3. Остается доказать, что функция F взаимно непрерывна, т. е. что из равенства $\mathrm{Lim}(X_n \cup Y_n) = X \cup Y$ вытекают равенства $\mathrm{Lim}\, X_n = X$ и $\mathrm{Lim}\, Y_n = Y$.

В силу IV, 3, имеем

$$\mathrm{Ls}\, X_n \cup \mathrm{Ls}\, Y_n = \mathrm{Ls}(X_n \cup Y_n) = \mathrm{Lim}(X_n \cup Y_n) = X \cup Y,$$

откуда $\mathrm{Ls}\, X_n = X$ и $\mathrm{Ls}\, Y_n = Y$, поскольку

$$X \subset A, \quad X_n \subset A, \quad \text{значит,} \quad \mathrm{Ls}\, X_n \subset A;$$

$$Y \subset B, \quad Y_n \subset B, \quad \text{значит,} \quad \mathrm{Ls}\, Y_n \subset B$$

и $A \cap B = 0$.

Так как $\mathrm{Ls}\, X_n \cap \mathrm{Ls}\, Y_n = 0$, то на основании V, 4

$$\mathrm{Li}\, X_n \cup \mathrm{Li}\, Y_n = \mathrm{Li}(X_n \cup Y_n) = \mathrm{Lim}(X_n \cup Y_n) = X \cup Y,$$

откуда, как и выше, $\mathrm{Li}\, X_n = X$ и $\mathrm{Li}\, Y_n = Y$. Следовательно, $\mathrm{Lim}\, X_n = X$ и $\mathrm{Lim}\, Y_n = Y$.

*§ 30. Борелевские множества

1. Эквивалентность. Мы определили в § 5, VI, семейство борелевских множеств данного пространства как наименьшее семейство $\boldsymbol{F}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) *любое замкнутое множество принадлежит семейству* $\boldsymbol{F}$,
2) *если* $X \in \boldsymbol{F}$, *то* $(-X) \in \boldsymbol{F}$,
3) *если* $X_n \in \boldsymbol{F}$, *то* $(X_1 \cap X_2 \cap \ldots) \in \boldsymbol{F}$,

причем условие 3 можно заменить условием

3′) *если* $X_n \in \boldsymbol{F}$, *то* $(X_1 \cup X_2 \cup \ldots) \in \boldsymbol{F}$.

С другой стороны, мы доказали, что в каждом метрическом пространстве любое замкнутое множество есть множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$ и что, следовательно, любое открытое множество есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество (§ 21, IV). Опираясь на эти факты, докажем теперь следующую теорему [1]:

[1] См. Серпинский [2]. Об одном обобщении из общей теории множеств см. Серпинский [27].

Теорема. *Семейство борелевских множеств есть наименьшее семейство, удовлетворяющее условиям* 1, 3 *и* 3′.

Обозначим это последнее семейство через F^*. Докажем, что $F = F^*$. Как мы только что заметили, семейство F удовлетворяет условиям 1, 3 и 3′, так что $F^* \subset F$.

Для установления обратного включения обозначим через F^0 семейство множеств, являющихся дополнениями к элементам семейства F^*. Семейство F^0 удовлетворяет условию 1. В самом деле, дополнение замкнутого множества открыто, поэтому оно является счетным объединением замкнутых множеств и, следовательно, принадлежит семейству F^*. Кроме того, применяя формулы Моргана, находим, что семейство F^0 удовлетворяет условиям 3 и 3′. Следовательно, $F^* \subset F^0$, а это означает, что любое множество, принадлежащее семейству F^*, является дополнением к некоторому множеству, также принадлежащему семейству F^*. Отсюда следует, что семейство F^* удовлетворяет условию 2, поэтому $F \subset F^*$.

II. Классификация борелевских множеств. С помощью простого теоретико-множественного рассуждения доказывается (см. Хаусдорф [5], Юнг [6]), что семейство борелевских множеств (т. е. наименьшее семейство F, удовлетворяющее условиям 1, 3 и 3′) представляет собой объединение трансфинитной последовательности (типа Ω) семейств:

$$F = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_\alpha \cup \ldots,$$

таких, что:

1° F_0 есть семейство замкнутых множеств,

2° элементы семейства F_α являются или пересечениями, или объединениями счетных последовательностей множеств, принадлежащих F_ξ, где $\xi < \alpha$, в зависимости от того, четно число α или нечетно (предельные числа рассматриваются как четные).

Заменяя в условии I, 1 термин „замкнутый" термином „открытый" (см. § 5, VI), получаем следующую классификацию:

$$F = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_\alpha \cup \ldots,$$

где

1° G_0 есть семейство открытых множеств,

2° элементы семейства G_α представляют собой или объединения, или пересечения счетных последовательностей множеств, принадлежащих G_ξ, $\xi < \alpha$, в зависимости от того, четно число α или нечетно.

III. Свойства классов F_α и G_α. Семейства F_α с четным индексом и семейства G_α с нечетным индексом являются *счетно-мультипликативными*, т. е. если счетная последовательность множеств принадлежит такому семейству, то их пересечение также принадлежит этому семейству. Все множества, принадлежащие некоторому семейству такого типа, называются множествами *мультипликативного класса* α. Аналогично, семейства F_α с нечетным индексом и семейства G_α с четным индексом являются *счетно-аддитивными* и образуют *аддитивный класс* α. Следовательно, мультипликативный (аддитивный) класс α состоит из пересечений (объединений) множеств, принадлежащих классам $< \alpha$ [1]).

Классы с конечными индексами обозначаются следующим образом:

$$F_\sigma,\ F_{\sigma\delta},\ F_{\sigma\delta\sigma},\ \ldots; \qquad G_\delta,\ G_{\delta\sigma},\ G_{\delta\sigma\delta},\ \ldots.$$

Следующие свойства множеств типа F_σ и G_δ (см. § 5, V) распространяются при помощи индукции на классы с произвольными индексами.

Дополнение множества класса F_α есть множество класса G_α.

Объединение и пересечение конечного числа множеств, принадлежащих одному и тому же классу, принадлежат тому же классу.

Любое множество аддитивного класса α представляет собой объединение *возрастающей* последовательности множеств с индексами $\xi < \alpha$; любое множество мультипликативного класса α есть пересечение *убывающей* последовательности множеств с индексами $\xi < \alpha$.

Для того чтобы некоторое множество было множеством класса F_α (класса G_α) *относительно* E, необходимо и достаточно, чтобы оно представляло собой пересечение множества E с множеством класса F_α (класса G_α).

Пусть f — непрерывная функция, определенная на пространстве $\mathscr{X}$; если Y — множество класса F_α (класса G_α), то и *множество* $f^{-1}(Y)$ принадлежит тому же классу (см. § 13, IV (3) — (5)).

Добавим, что любое борелевское множество класса α является одновременно множеством любого класса (F и G) с более высоким индексом. Это вытекает по индукции из того, что каждое открытое множество есть F_σ-множество, а каждое замкнутое множество есть G_δ-множество.

Прямое произведение двух множеств класса F_α (класса G_α) принадлежит тому же классу. В самом деле, это так в случае открытых и замкнутых множеств и, кроме того (§ 2, II (8) и (9)), имеем

$$\Big(\bigcup_n A_n\Big)\times\Big(\bigcup_m B_m\Big)=\bigcup_{n,\,m}(A_n\times B_m)$$

и

$$\Big(\bigcap_n A_n\Big)\times\Big(\bigcap_m B_m\Big)=\bigcap_{n,\,m}(A_n\times B_m).$$

---

[1]) При конечном α множества мультипликативного (аддитивного) класса α совпадают с множествами F (множествами O) класса α в смысле Лебега. См. Серпинский [46].

В частности, класс множества не меняется при умножении его (в смысле прямого произведения) *на ось.* Отсюда, в силу формулы (§ 3, VIII (1))

$$\prod_i A_i = \bigcap_i (\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_{i-1} \times A_i \times \mathcal{X}_{i+1} \times \ldots),$$

следует, что *прямое произведение счетного множества* элементов мультипликативного класса α принадлежит тому же классу α (между тем аналогичное утверждение, касающееся аддитивных классов, неверно даже для класса открытых множеств; см. § 16, V).

Вообще, прямое произведение счетного множества борелевских множеств есть борелевское множество.

Теорема. *Если множество Z, принадлежащее произведению $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, есть множество класса F_α (класса G_α), то*

$$(1) \qquad A_y = \mathop{\mathrm{E}}_x [(x, y) \in Z] \quad \text{и} \quad \mathop{\mathrm{E}}_x [(x, x) \in Z]$$

являются множествами того же класса (второе заключение относится к случаю, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$).

В самом деле, если множества $Z \cap \mathop{\mathrm{E}}_{x,\, y} (y = y_0)$ и $Z \cap \mathop{\mathrm{E}}_{x,\, y} (x = y)$ являются множествами класса F_α (G_α) относительно $\mathop{\mathrm{E}}_{x,\, y} (y = y_0)$ $\left(\mathop{\mathrm{E}}_{x,\, y} (x = y)\right)$, то и множества (1) принадлежат тому же классу, согласно § 15, VI и IV, где следует положить $\varphi(x, y) \equiv ((x, y) \in Z)$.

Как известно, в сепарабельном пространстве семейство открытых множеств (а также семейство замкнутых множеств) имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$ (§ 24, I). Это же утверждение справедливо для любого борелевского класса. Так как семейство борелевских множеств является объединением $\aleph_1$ классов, то отсюда следует, что это семейство имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c} \cdot \aleph_1 = \mathfrak{c}$. Следовательно, *в любом сепарабельном пространстве мощности континуума существуют неборелевские множества.*

Проблема эффективного определения неборелевских множеств в пространстве действительных чисел будет рассмотрена в § 38, VI. Проблема же доказательства (без использования гипотезы континуума) существования неборелевского множества в произвольном сепарабельном несчетном пространстве остается открытой.

IV. Двусторонние борелевские множества. Множество называется *двусторонним множеством класса* α, если оно принадлежит одновременно классам F_α и G_α. Так, например, множество является двусторонним множеством класса 0, если оно одновременно замкнутое и открытое; оно является двусторонним множеством класса 1, если оно представляет собой одновременно множество типа F_σ и типа G_δ.

Любое борелевское множество класса α есть двустороннее множество класса $\alpha+1$. Очевидно, что дополнение двустороннего множества является двусторонним множеством того же класса. Отсюда следует, что двусторонние множества класса α образуют *поле*, т. е. объединение, пересечение и разность двух двусторонних множеств класса α есть двустороннее множество класса α.

V. Разложение борелевских множеств на непересекающиеся множества.

Теорема 1. *Любое множество аддитивного класса $\alpha>0$ является счетным объединением непересекающихся двусторонних множеств класса α.*

Доказательство. Пусть $A=A_1\cup A_2\cup\ \dots\ \cup A_n\cup\ \dots$, тогда

(0) $A=A_1\cup[A_2-A_1]\cup\ \dots\ \cup[A_n-(A_1\cup\ \dots\ \cup A_{n-1})]\cup\ \dots$.

Если A_n—множество мультипликативного класса $<\alpha$ $(n=1, 2, \dots)$, то оно является двусторонним класса α. Следовательно, элементы объединения (0)—непересекающиеся двусторонние множества класса α.

Теорема 2. *Любое множество аддитивного класса $\alpha>1$ является счетным объединением непересекающихся множеств мультипликативных классов $<\alpha$* [1]).

Рассмотрим разложение (0). Предположим, что любое множество A_n принадлежит мультипликативному классу $<\alpha$, тогда объединение $A_1\cup\ \dots\ \cup A_{n-1}$ является множеством того же класса. Это означает, что множество $1-(A_1\cup\ \dots\ \cup A_{n-1})$ принадлежит аддитивному классу $<\alpha$. Следовательно, в силу теоремы 1, это множество имеет вид $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i^n$, где B_i^n — непересекающиеся двусторонние множества классов $<\alpha$ (ибо $\alpha>1$). Формула

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A_n\cap B_i^n\right)$$

дает искомое разложение, ибо $A_n\cap B_i^n$ — множество мультипликативного класса $<\alpha$.

Теорема 3. *Семейство борелевских множеств есть наименьшее семейство, содержащее*

(i) *все открытые множества,*

(ii) *пересечения своих элементов,*

(iii) *объединения непересекающихся элементов.*

Пусть $\boldsymbol{H}$ — семейство, удовлетворяющее условиям (i) — (iii). Покажем по индукции, что каждое борелевское множество принадлежит

---

[1]) Теорема Н. Лузина; см. Серпинский [28].

семейству H. В силу (i) и (ii), семейству H принадлежит любое множество типа G_δ, а согласно теореме 2, и любое множество типа $G_{\delta\sigma}$. Следовательно, и любое множество типа F_σ принадлежит H.

Пусть теперь $\alpha > 1$; допустим, что любое множество класса $< \alpha$ принадлежит семейству H. Тогда, согласно (ii), множества мультипликативного класса α принадлежат семейству H и, в силу теоремы 2 и (iii), любое множество аддитивного класса α также принадлежит семейству H. Следовательно, все борелевские множества класса α принадлежат семейству H, что и требовалось доказать.

Замечания. В нульмерных сепарабельных пространствах теорема 1 верна также при $\alpha = 0$, т. е. открытое множество является объединением последовательности непересекающихся открыто-замкнутых множеств (§ 26, I, следствие 1а).

Отсюда следует, что теорема 2 справедлива при $\alpha = 1$, т. е. в нульмерном пространстве любое F_σ-множество представляет собой счетное объединение замкнутых непересекающихся множеств.

Последнее утверждение не имеет места в пространствах размерности > 0: например, открытый интервал нельзя разложить в объединение счетного множества замкнутых непересекающихся множеств.

VI. Знакочередующиеся ряды борелевских множеств.

Теорема 1. *Пусть*

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_\xi \supset A_{\xi+1} \supset \ldots \supset A_\gamma$$

— трансфинитная счетная последовательность двусторонних множеств класса α, такая, что $A_\lambda = \bigcap_{\xi<\lambda} A_\xi$, если λ — предельное число или если $\lambda = \gamma$.

При этих условиях множество

$$S = A_1 - A_2 \cup A_3 - A_4 \cup \ldots \cup A_{\omega+1} - A_{\omega+2} \cup \ldots$$

есть двустороннее множество класса α.

В самом деле (§ 12, I (4a)),

$$-S = -A_1 \cup A_2 - A_3 \cup \ldots \cup A_\omega - A_{\omega+1} \cup \ldots \cup A_\gamma.$$

Так как любая разность $A_\xi - A_{\xi+1}$ является двусторонним множеством класса α и, следовательно, множеством аддитивного класса α, то множества S и $-S$, как счетные объединения множеств такого рода, также принадлежат аддитивному классу α. Следовательно, S — двустороннее множество класса α.

Теорема 2. *Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ — последовательность двусторонних множеств класса α, такая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = 0$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1} - A_{2n})$ есть двустороннее множество класса α.*

Эта теорема является частным случаем теоремы 1.

Теорема 3. *Сумма знакочередующегося (счетного) ряда убывающих борелевских множеств мультипликативного класса* α

$$B = B_1 - B_2 \cup B_3 - B_4 \cup \ldots \cup B_{\omega+1} - B_{\omega+2} \cup \ldots$$

есть двустороннее множество класса $\alpha+1$ [1]).

В самом деле, полагая $B_\lambda = \bigcap\limits_{\xi<\lambda} B_\xi$, если λ — предельное число, и учитывая, что счетное пересечение множеств B_ξ есть множество мультипликативного класса α и, следовательно, двустороннее множество класса $\alpha+1$, выводим из теоремы 1, что B есть двустороннее множество класса $\alpha+1$.

VII. Теоремы редукции и отделимости.

Теорема 1 (теорема редукции). *Пусть* $G_1, G_2, \ldots$ — *последовательность (конечная или бесконечная) множеств аддитивного класса* $\alpha > 0$; *тогда существует последовательность* $H_1, H_2, \ldots$ *непересекающихся множеств того же класса, такая, что*

$$H_i \subset G_i \quad \text{и} \quad H_1 \cup H_2 \cup \ldots = G_1 \cup G_2 \cup \ldots.$$

Следовательно, *если* $\mathcal{X} = G_1 \cup G_2 \cup \ldots$, *то множества* H_i *являются двусторонними класса* α.

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить, согласно V, 1,

$$G_i = F_{i1} \cup F_{i2} \cup \ldots,$$

где F_{ij} — двусторонние множества класса α, и повторить доказательство теоремы редукции, установленной в § 26, II.

Аналогичным образом из теоремы 1 выводятся следующие утверждения:

Теорема 2 (теорема отделимости) [2]). *Пусть* $F_1, F_2, \ldots$ — *последовательность множеств мультипликативного класса* $\alpha > 0$, *такая, что* $F_1 \cap F_2 \cap \ldots = 0$; *тогда существует последовательность двусторонних множеств* $E_1, E_2, \ldots$ *класса* α, *такая, что*

$$F_i \subset E_i \quad \text{и} \quad E_1 \cap E_2 \cap \ldots = 0.$$

В частности, *пусть* A *и* B — *непересекающиеся множества мультипликативного класса* $\alpha > 0$; *тогда существует двустороннее множество* E *класса* α, *такое, что*

$$A \subset E \quad \text{и} \quad E \cap B = 0. \tag{1}$$

---

[1]) Обратная теорема верна в полных пространствах (см. § 37).

[2]) Серпинский [55]. Частный случай см. в работе Серпинского [19]. Там же можно найти много приложений к общей теории функций.

Другими словами, *пусть даны два множества* $A \subset C$ *класса* $\alpha > 0$, *причем первое из них — множество мультипликативного класса, а второе — аддитивного класса. Тогда существует двустороннее множество* E *класса* α, *такое, что*

$$A \subset E \subset C. \tag{2}$$

Теорема 3. *Пусть* $F_1, F_2, \ldots$ — *последовательность множеств мультипликативного класса* $\alpha > 0$; *тогда существует последовательность множеств* $B_1, B_2, \ldots$ *аддитивного класса* α, *такая, что*

$$F_i - \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m \subset B_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = 0.$$

Теорема 4. *Пусть* $A_1, \ldots, A_k$ — *конечная система непересекающихся множеств мультипликативного класса* $\alpha > 0$. *Тогда существует система* $F_1, \ldots, F_k$ *непересекающихся двусторонних множеств класса* α, *такая, что*

$$A_i \subset F_i \quad \text{и} \quad \mathscr{X} = F_1 \cup \ldots \cup F_k.$$

VIII. Относительно двусторонние множества.

Теорема 1. *Пусть* A — *множество мультипликативного класса* $\alpha > 0$ *и* B — *двустороннее множество класса* α *относительно* A; *тогда множество* B *имеет вид* $B = A \cap C$, *где* C — *двустороннее множество класса* α (*относительно всего пространства*).

В самом деле, так как B — двустороннее множество класса α относительно A, то B и $A - B$ — множества мультипликативного класса α относительно A. Но множество A само является множеством мультипликативного класса α, следовательно, оба множества B и $A - B$ принадлежат мультипликативному классу α (во всем пространстве).

В силу теоремы отделимости (VII, 2(1)), существует двустороннее множество C класса α, такое, что

$$B \subset C \quad \text{и} \quad C \cap (A - B) = 0,$$

откуда

$$B = A \cap B \subset A \cap C \quad \text{и} \quad C \cap A \subset B, \text{ следовательно, } B = A \cap C.$$

Имея в виду дальнейшие применения, докажем следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть заданы множество* A *и система* $\{B_{i_1 \ldots i_n}\}$ *двусторонних множеств класса* α *относительно* A, *такая, что*

$$B_{i_1 \ldots i_n} \cap B_{j_1 \ldots j_k} = 0, \quad \textit{если} \quad (i_1 \ldots i_k) \neq (j_1 \ldots j_k) \quad \text{и} \quad k \leqslant n.$$

Тогда существует система $\{C_{i_1 \dots i_n}\}$ *двусторонних множеств класса* α *относительно объединения*

$$(0) \qquad A_n = \bigcup C_{i_1 \dots i_n}$$

(*где суммирование распространяется на все системы n индексов*), *такая, что*

(1) A_n — *двустороннее множество класса* $\alpha + 1$;

(2) $A \cap C_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$;

(3) $C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{j_1 \dots j_k} = 0$;

(4) $C_{i_1 \dots i_n} = 0$, *если* $B_{i_1 \dots i_n} = 0$.

Более того, если A—множество мультипликативного класса $\alpha > 0$ *и если* $A = \bigcup B_{i_1 \dots i_n}$ *для любого n, то множество* A_n *совпадает со всем пространством.*

По предположению, существует система множеств $\{D_{i_1 \dots i_n}\}$ аддитивного класса α (даже двусторонних множеств класса α, если A — множество мультипликативного класса $\alpha > 0$), такая, что

$$A \cap D_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n} \quad \text{и} \quad D_{i_1 \dots i_n} = 0, \quad \text{если} \quad B_{i_1 \dots i_n} = 0.$$

Обозначим через V_n объединение всех пересечений вида $D_{i_1 \dots i_n} \cap$ $\cap D_{j_1 \dots j_k}$ и положим

$$C_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 \dots i_n} - V_n.$$

Множество $A_n = \bigcup D_{i_1 \dots i_n} - V_n$ как разность двух множеств аддитивного класса α есть двустороннее множество класса $\alpha + 1$. Из равенства

$$A_n \cap D_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 \dots i_n} - V_n = C_{i_1 \dots i_n}$$

следует, что $C_{i_1 \dots i_n}$ — множество аддитивного класса α относительно A_n, откуда, в силу равенства

$$C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{j_1 \dots j_n} = D_{i_1 \dots i_n} \cap D_{j_1 \dots j_n} - V_n = 0,$$

вытекает, что $C_{i_1 \dots i_n}$ — двустороннее множество класса α относительно A_n. Наконец,

$$A \cap C_{i_1 \dots i_n} = (A \cap D_{i_1 \dots i_n}) - (A \cap V_n) = B_{i_1 \dots i_n},$$

ибо из равенства

$$A \cap D_{i_1 \dots i_n} \cap D_{j_1 \dots j_k} = B_{i_1 \dots i_n} \cap B_{j_1 \dots j_k} = 0$$

следует, что $A \cap V_n = 0$.

Если предположить, что A есть множество мультипликативного класса $\alpha > 0$ и $A = \bigcup B_{i_1 \ldots i_n}$, то

$$B_{i_1 \ldots i_n} = \bigcup_k B_{i_1 \ldots i_n k} \subset \bigcup_k D_{i_1 \ldots i_n k}$$

и существует (см. VII, 2 (2)) двустороннее множество $E_{i_1 \ldots i_n}$ класса α, такое, что

$$B_{i_1 \ldots i_n} \subset E_{i_1 \ldots i_n} \subset \bigcup_k D_{i_1 \ldots i_n k}.$$

Определим множества $C_{i_1 \ldots i_n}$ (где $n \geqslant 0$) по индукции, условившись, что

1) C — все пространство и $B = A$;

2) если $i_1 \ldots i_n$ — данная система и l — наименьший индекс, такой, что $B_{i_1 \ldots i_n l} \neq 0$, то

$$C_{i_1 \ldots i_n l} = (C_{i_1 \ldots i_n} \cap D_{i_1 \ldots i_n l}) \cup (C_{i_1 \ldots i_n} - E_{i_1 \ldots i_n});$$

3) для $k > l$

$$C_{i_1 \ldots i_n k} = (C_{i_1 \ldots i_n} \cap D_{i_1 \ldots i_n k}) - (C_{i_1 \ldots i_n l} \cup \ldots \cup C_{i_1 \ldots i_n (k-1)}).$$

Замечание. В 0-мерном сепарабельном пространстве утверждения 1 и 2 справедливы и при $\alpha = 0$.

Теорему 1 можно уточнить следующим образом [1]):

Теорема 3. *Пусть $B^1, B^2, \ldots$ — последовательность двусторонних множеств класса α относительно множества A; тогда существуют множество Y мультипликативного класса $\alpha + 1$ и последовательность $C^1, C^2, \ldots$ двусторонних множеств класса α относительно Y, такие, что $B^n = A \cap C^n$ и последовательности*

$$(5) \qquad B^1,\ A - B^1,\ B^2,\ A - B^2,\ \ldots$$

и

$$(6) \qquad C^1,\ Y - C^1,\ C^2,\ Y - C^2,\ \ldots$$

подобны (в смысле § 14, III).

Более того, *если A — множество мультипликативного класса $\alpha > 0$, то Y совпадает со всем пространством.*

Любой системе индексов $i_1, \ldots, i_n$, составленной из чисел 0 и 1, поставим в соответствие множество $B_{i_1 \ldots i_n}$, условившись, что

$$(7) \quad B_{i_1 \ldots i_n} = B^1_{i_1} \cap \ldots \cap B^n_{i_n} \quad \text{и} \quad B^n_0 = B^n, \quad B^n_1 = A - B^n.$$

---

[1]) См. Позамент и Куратовский [1].

Тогда выполнены условия теоремы 2 [1]. Рассмотрим множества $C_{i_1 \ldots i_n}$ и A_n из условия этой теоремы и положим

$$(8) \qquad Y = A_1 \cap A_2 \cap \ldots;$$

$$(9) \qquad C^1 = Y \cap C_0, \quad C^2 = Y \cap (C_{00} \cup C_{10}), \ \ldots, \quad C^n = Y \cap \left(\bigcup C_{i_1 \ldots i_{n-1} 0}\right), \ \ldots .$$

Тогда $A = B_0 \cup B_1$, и вообще, так как множества $B_{i_1 \ldots i_n}$ являются составляющими множества A относительно множеств $B^1, \ldots, B^n$ (см. § 28, VI, замечание 2), то их объединение равно множеству A (при фиксированном n). Таким образом [см. (0) и (2)],

$$(10) \qquad A = \bigcup B_{i_1 \ldots i_n} \subset \bigcup C_{i_1 \ldots i_n} = A_n,$$

откуда, согласно (8),

$$(11) \qquad A \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots = Y.$$

Следовательно, в силу (9), (2) и (7),

$$A \cap C^n = A \cap Y \cap \left(\bigcup C_{i_1 \ldots i_{n-1} 0}\right) = \bigcup \left(A \cap C_{i_1 \ldots i_{n-1} 0}\right) =$$
$$= \bigcup B_{i_1 \ldots i_{n-1} 0} = \bigcup \left(B^1_{i_1} \cap \ldots \cap B^{n-1}_{i_{n-1}}\right) \cap B^n = B^n.$$

Так как A_n — множества мультипликативного класса $\alpha + 1$, их пересечение Y также является множеством этого класса.

Поскольку $C_{i_1 \ldots i_n}$ — двустороннее множество класса α относительно A_n, множество $Y \cap C_{i_1 \ldots i_n}$ является двусторонним множеством класса α относительно Y (так как $Y \subset A_n$). Следовательно, C^n является двусторонним множеством класса α.

Чтобы доказать подобие последовательностей (5) и (6), заметим, что если множества $B_{i_1 \ldots i_n}$ (при фиксированном n) являются составляющими множества A, то любое пересечение конечного числа элементов последовательности (5) представляет собой объединение некоторого числа этих элементов, а именно для $l_1 < \ldots < l_n$ имеем

$$(12) \qquad B^{l_1}_{i_{l_1}} \cap \ldots \cap B^{l_n}_{i_{l_n}} = \bigcup B_{j_1 j_2 \ldots j_{l_n}}, \text{ где } j_{l_1} = i_{l_1}, \ \ldots, \ j_{l_n} = i_{l_n}.$$

Аналогичным свойством обладает последовательность (6). Из формул (9), (10), (8) и (3) вытекает, что

$$C^k = Y \cap \left(\bigcup C_{j_1 \ldots j_{k-1} 0}\right) \cap \left(\bigcup C_{i_1 \ldots i_n}\right) = Y \cap \left(\bigcup C_{j_1 \ldots j_n}\right),$$

[1] Очевидно, в теореме 2 можно допустить, что индексы $i_1, \ldots, i_n$ принимают только два значения 0 и 1.

где последнее объединение берется по всем системам $j_1 \ldots j_n$, таким, что $j_k = 0$. В самом деле,

$$Y \cap C_{j_1 \ldots j_n} = Y \cap A_k \cap C_{j_1 \ldots j_n} =$$
$$= Y \cap \left(\bigcup C_{i_1 \ldots i_k}\right) \cap C_{j_1 \ldots j_k \ldots j_n} = Y \cap C_{j_1 \ldots j_k} \cap C_{j_1 \ldots j_k \ldots j_n}.$$

Таким же образом, согласно (9), (11) и (0), получаем

$$Y - C^k = (Y \cap A_k) - \left(\bigcup C_{j_1 \ldots j_{k-1} 0}\right) = Y \cap \left(\bigcup C_{j_1 \ldots j_{k-1} 1}\right),$$

откуда, как и выше, $Y - C^k = Y \cap \left(\bigcup C_{j_1 \ldots j_n}\right)$, где $j_k = 1$.

Положим $C_0^k = C^k$ и $C_1^k = Y - C^k$. Отсюда вытекает, что

$$C_i^k = Y \cap \left(\bigcup C_{j_1 \ldots j_n}\right), \quad \text{где} \quad j_k = i,$$

и что (см. (4)) для $l_1 < \ldots < l_n$

$$(13) \qquad C_{i_{l_1}}^{l_1} \cap \ldots \cap C_{i_{l_n}}^{l_n} = Y \cap \left(\bigcup C_{j_1 j_2 \ldots j_{l_n}}\right),$$

$$\text{где} \quad j_{l_1} = i_{l_1}, \ \ldots, \ j_{l_n} = i_{l_n}.$$

Равенства $B_{i_1 \ldots i_n} = 0$ и $Y \cap C_{i_1 \ldots i_n} = 0$ эквивалентны, ибо из первого, согласно (4), следует второе, и, в силу (2) и (11),

$$B_{i_1 \ldots i_n} = A \cap C_{i_1 \ldots i_n} \subset Y \cap C_{i_1 \ldots i_n}.$$

Отсюда, в силу (12) и (13), немедленно вытекает подобие последовательностей (5) и (6).

Допустим теперь, что A — множество мультипликативного класса $\alpha > 0$. В силу первого равенства (10) и второй части теоремы 2, множество A_n, а следовательно (см. (11)), множество Y совпадает со всем пространством. Теорема доказана.

Замечание. Соответствие между элементами последовательностей (5) и (6), которое получается, если n-му элементу последовательности (5) сопоставить n-й элемент последовательности (6), можно продолжить на наименьшие поля, содержащие соответственно множества последовательностей (5) и (6); а именно можно поставить в соответствие объединению (пересечению, разности) двух множеств объединение (пересечение, разность) соответствующих множеств. Таким образом определяется некоторый[1]) *изоморфизм* между этими двумя полями, так что любое соотношение, выраженное в терминах алгебры Буля и имеющее место между множествами первого поля, выполняется также и во втором поле.

---

[1]) По поводу этого понятия см. Позамент и Куратовский [1].

IX. Предельное множество двусторонних множеств.

Теорема 1. *Пусть A — двустороннее множество класса $\alpha > 1$. Тогда существует последовательность двусторонних множеств A_n классов $< \alpha$, таких, что*

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots) = \bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots),$$

т. е. $A = \operatorname{Limes}_{n\to\infty} A_n$ в теоретико-множественном смысле (см. § 1, V).

В 0-мерных сепарабельных пространствах теорема верна также при $\alpha = 1$.

Доказательство. По предположению, мы имеем

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n, \quad -A = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n,$$

$$K_n \subset K_{n+1} \quad \left(\text{откуда } K_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} K_{n+i}\right),$$

$$L_n \subset L_{n+1} \quad \left(\text{откуда } -L_i = \bigcup_{n=0}^{\infty}(-L_{n+i})\right),$$

где K_n и L_n — множества мультипликативных классов $< \alpha$.

В силу теоремы отделимости (VII, 2(2)), существует последовательность двусторонних множеств A_n классов $< \alpha$, таких, что

$$K_n \subset A_n \subset -L_n.$$

Двойное равенство, которое необходимо доказать, вытекает из формулы (см. § 2, IV)

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=0}^{\infty} K_{n+i} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=0}^{\infty} A_{n+i} \subset \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n+i} \subset$$

$$\subset \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} (-L_{n+i}) = \bigcap_{i=0}^{\infty}(-L_i) = -\bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = A.$$

Теорема 1 вытекает также из следующей леммы, относящейся к теории множеств и позволяющей уточнить теорему в случае, когда α является предельным числом.

Лемма (Серпинский [46]). *Из условий*

(1) $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{n,m},$$

(2) $$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,m},$$

(3) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,m+1} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,m}$$

вытекает, что

$$A = \operatorname*{Limes}_{n\to\infty} A_n, \quad \textit{где} \quad A_n = \bigcup_{k=1}^{n} (B_{k,1} \cap \ldots \cap B_{k,n}) \cap (C_{1,k} \cup \ldots \cup C_{n,k}).$$

Докажем, что

$$1^\circ \quad A \subset \bigcup_n (A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots) \quad \text{и} \quad 2^\circ \quad A^c \subset \bigcup_m (A^c_m \cap A^c_{m+1} \cap \ldots).$$

Условие 1° означает, что если $p \in A$, то существует индекс n_0, такой, что для $n \geqslant n_0$ имеем $p \in A_n$. Но, в силу (1), существует индекс k, такой, что

$$p \in B_{k,1} \cap B_{k,2} \cap \ldots .$$

Согласно (2), существует последовательность индексов $i_1, i_2, \ldots$, такая, что

$$p \in C_{i_1,1} \cap C_{i_2,2} \cap \ldots .$$

Обозначим через n_0 наибольшее из чисел k и i_k. Для $n \geqslant n_0$ имеем

$$C_{i_k,k} \subset C_{1,k} \cup \ldots \cup C_{n,k}.$$

Следовательно,

$$p \in (B_{k,1} \cap \ldots \cap B_{k,n}) \cap C_{i_k,k} \subset$$
$$\subset (B_{k,1} \cap \ldots \cap B_{k,n}) \cap (C_{1,k} \cup \ldots \cup C_{n,k}) \subset A_n.$$

Пусть, с другой стороны, $p \in A^c$. Докажем, что существует индекс m_0, такой, что для $m \geqslant m_0$ имеем $p \in A^c_m$, где

$$A^c_m = \bigcap_{l=1}^{m} \left[B^c_{l,1} \cup \ldots \cup B^c_{l,m} \cup \left(C^c_{1,l} \cap \ldots \cap C^c_{m,l}\right)\right].$$

По предположению,

$$(4) \quad A^c = \bigcap_n \bigcup_m B^c_{n,m}, \quad A^c = \bigcup_m \bigcap_n C^c_{n,m}, \quad \bigcap_n C^c_{n,m} \subset \bigcap_n C^c_{n,m+1}.$$

В силу второй из этих формул, существует индекс k, такой, что

$$p \in \bigcap_n C^c_{n,k}, \quad \text{следовательно,} \quad p \in \bigcup_n C^c_{n,k+1}, \quad p \in \bigcap_n C^c_{n,k+2}, \ \ldots .$$

Из первой формулы (4) следует существование последовательности индексов $i_1, i_2, \ldots$, такой, что

$$p \in B^c_{1,i_1} \cap B^c_{2,i_2} \cap \ldots .$$

Пусть m_0 — наибольшее из чисел $i_1, \ldots, i_k$. Пусть $m \geqslant m_0$. Тогда

$$p \in B^c_{l,i_l} \subset B^c_{l,1} \cup \ldots \cup B^c_{l,m} \quad \text{для} \quad l \leqslant k,$$
$$p \in \left(C^c_{1,l} \cap \ldots \cap C^c_{m,l}\right) \quad \text{для} \quad l \geqslant k.$$

Следовательно, для любого l $(\leqslant m)$ имеем

$$p \in \left[B^c_{l,1} \cup \ldots \cup B^c_{l,m} \cup \left(C^c_{1,l} \cap \ldots \cap C^c_{m,l}\right)\right], \quad \text{т. е.} \quad p \in A^c_m.$$

Из леммы непосредственно вытекает следующее утверждение, дополняющее теорему 1:

Теорема 2. *Пусть A — двустороннее множество класса $\lambda+1$, где λ — предельное число. Тогда существует последовательность двусторонних множеств A_n классов $<\lambda$, такая, что*

$$A = \operatorname*{Limes}_{n\to\infty} A_n.$$

X. Локально борелевские множества. $\mathscr{M}$-операция Монтгомери. В соответствии с общим определением локализации свойств (§ 7, IV) множество A называется *множеством класса* α *в точке* p, если существует окрестность E точки p, такая, что $A\cap E$ есть борелевское множество класса α.

Термин „окрестность" можно заменить термином „открытая окрестность", за исключением случая, когда речь идет о мультипликативном классе 0 (случай локально замкнутого множества, см. § 7, V), ибо если $A\cap E$ — множество класса α, а G — внутренность множества E, то множество $A\cap G$ также является множеством класса α (за исключением отмеченного случая).

Наконец, в случае сепарабельного пространства можно заменить открытые окрестности открытыми множествами, принадлежащими базе R_1, R_2, ... пространства.

Теорема 1. *Множество B точек множества A, в которых A локально есть множество аддитивного класса α (или мультипликативного класса $\alpha>0$), также является множеством этого класса.*

В частности, *если в сепарабельном пространстве $\mathscr{X}$ множество A является в каждой из своих точек множеством аддитивного класса α (или мультипликативного класса $\alpha>0$), то A есть множество того же класса.*

Рассмотрим сначала случай сепарабельного пространства (см. Заранкевич [3]), когда доказательство значительно проще.

Пусть R_{n_1}, R_{n_2}, ... — последовательность всех множеств (принадлежащих базе), таких, что $A\cap R_{n_k}$ есть множество аддитивного класса α. Тогда множество

$$B=\bigcup_k (A\cap R_{n_k})$$

представляет собой множество аддитивного класса α.

Предположим теперь, что $A\cap R_{n_k}$—множество мультипликативного класса $\alpha>0$. В силу тождества $X\cap Y=X-(X-Y)$, имеем

$$B=\bigcup_k (A\cap R_{n_k})=A\cap \bigcup_k R_{n_k}=\bigcup_k R_{n_k}-\Big[\bigcup_k R_{n_k}-A\Big]=$$
$$=\bigcup_k R_{n_k}-\bigcup_k \big[R_{n_k}-(A\cap R_{n_k})\big].$$

Множество $R_{n_k}-(A\cap R_{n_k})$ принадлежит аддитивному классу α, поэтому множество $\bigcup\limits_k[R_{n_k}-(A\cap R_{n_k})]$ принадлежит тому же классу, откуда следует требуемое заключение.

Таким образом, теорема 1 доказана для сепарабельного пространства.

Ее доказательство для произвольного метрического пространства будет основано на одном общем методе, который мы будем применять и в других случаях[1]).

Пусть $G_0, G_1, \ldots, G_\xi, \ldots$ — вполне упорядоченное семейство открытых множеств. Положим

(1) $$K_\xi = G_\xi - \bigcup_{\eta<\xi} G_\eta.$$

Каждой трансфинитной последовательности $X_0, X_1, \ldots, X_\xi, \ldots$ поставим в соответствие объединение

(2) $$S=\bigcup_\xi (X_\xi\cap K_\xi),$$

которое называется *результатом $\mathcal{M}$-операции*, примененной к последовательности $\{X_\xi\}$.

Теорема 2. *$\mathcal{M}$-операция аддитивна, мультипликативна и в случае, когда*

(i) $$\mathscr{X}=K_1\cup K_2\cup\ldots\cup K_\xi\cup\ldots,$$

дистрибутивна относительно вычитания.

Аддитивность $\mathcal{M}$-операции очевидна: из равенства $X_\xi=\bigcup\limits_\iota X_\xi^\iota$ (где ι пробегает произвольное множество индексов) следует, что

(3) $$\bigcup_\xi (X_\xi\cap K_\xi)=\bigcup_\xi\left[\left(\bigcup_\iota X_\xi^\iota\right)\cap K_\xi\right]=\bigcup_\iota\left[\left(\bigcup_\xi X_\xi^\iota\right)\cap K_\xi\right].$$

Чтобы доказать, что $\mathcal{M}$-операция мультипликативна, положим $X_\xi=\bigcap\limits_\iota X_\xi^\iota$ и заметим, что, в силу (1),

(4) $$K_\xi\cap K_\eta=0 \quad \text{для} \quad \xi\neq\eta.$$

Отсюда вытекает, что

(5) $$\bigcup_\xi (X_\xi\cap K_\xi)=\bigcup_\xi\bigcap_\iota(X_\xi^\iota\cap K_\xi)=\bigcap_\iota\bigcup_\xi(X_\xi^\iota\cap K_\xi);$$

[1]) Этот метод и его применения можно найти в работе Монтгомери [1]. См. также Куратовский [28].

Доказательство, основанное на паракомпактности метрических пространств, см. в работах: Майкл [2a] и Нагами [1].

при этом учитывается следующее общее правило: если для любых α, β и $\eta \neq \xi$ имеем $A_{\xi\alpha} \cap A_{\eta\beta} = 0$, то

$$\bigcup_{\xi} \bigcap_{\alpha} A_{\xi\alpha} = \bigcap_{\alpha} \bigcup_{\xi} A_{\xi\alpha}.$$

Наконец, положим $X_{\xi} = \mathscr{X} - X_{\xi}^{c}$; тогда

$$\bigcup_{\xi} (X_{\xi} \cap K_{\xi}) = \bigcup_{\xi} (K_{\xi} - X_{\xi}^{c}) = \bigcup_{\xi} K_{\xi} - \bigcup_{\xi} (K_{\xi} \cap X_{\xi}^{c}), \tag{6}$$

ибо, с одной стороны,

$$K_{\xi} = (K_{\xi} \cap X_{\xi}) \cup (K_{\xi} \cap X_{\xi}^{c}),$$

откуда

$$\bigcup_{\xi} K_{\xi} = \Big[\bigcup_{\xi} (K_{\xi} \cap X_{\xi})\Big] \cup \Big[\bigcup_{\xi} (K_{\xi} \cap X_{\xi}^{c})\Big],$$

а, с другой стороны, согласно (4),

$$(K_{\xi} \cap X_{\xi}) \cap (K_{\eta} \cap X_{\eta}^{c}) = 0,$$

откуда

$$\Big[\bigcup_{\xi} (K_{\xi} \cap X_{\xi})\Big] \cap \Big[\bigcup_{\xi} (K_{\xi} \cap X_{\xi}^{c})\Big] = 0.$$

Из формул (i), (5) и (6) следует дистрибутивность $\mathscr{M}$-операции относительно вычитания:

$$\bigcup_{\xi} [(X_{\xi} - Y_{\xi}) \cap K_{\xi}] = \Big[\bigcup_{\xi} (X_{\xi} \cap K_{\xi})\Big] \cap \Big[\bigcup_{\xi} (Y_{\xi}^{c} \cap K_{\xi})\Big] = \bigcup_{\xi} (X_{\xi} \cap K_{\xi}) - \bigcup_{\xi} (Y_{\xi} \cap K_{\xi}).$$

Замечание. Если отбросить предположение (i), то вместо дистрибутивности относительно вычитания будет выполняться следующая формула:

$$\bigcup_{\xi} (X_{\xi} \cap K_{\xi}) = \bigcup_{\xi} G_{\xi} - \bigcup_{\xi} (K_{\xi} \cap X_{\xi}^{c}). \tag{7}$$

В самом деле, (7) вытекает из (6), в силу очевидного равенства

$$\bigcup_{\xi} K_{\xi} = \bigcup_{\xi} G_{\xi}.$$

Теорема 3. *Для $\alpha > 0$ классы $\boldsymbol{F}_{\alpha}$ и $\boldsymbol{G}_{\alpha}$ инвариантны по отношению к $\mathscr{M}$-операции.*

Условимся, что $\rho(X, 0) = 1$, и положим

$$X_{\xi}^{n} = X_{\xi} \cap K_{\xi} \cap \mathop{\mathrm{E}}_{x} \Big[\rho(x, \mathscr{X} - G_{\xi}) \geqslant \frac{1}{n}\Big]. \tag{8}$$

Согласно (1), $X_\xi \cap K_\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_\xi^n$, откуда, согласно (2), вытекает, что

$$S = \bigcup_{\xi} \bigcup_{n=1}^{\infty} X_\xi^n;$$

следовательно, если положить

(9) $$S_n = \bigcup_{\xi} X_\xi^n,$$

то

(10) $$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Кроме того,

(11) $$\rho(X_\eta^n, X_\xi^n) \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{для} \quad \eta \neq \xi.$$

В самом деле, пусть $x_\eta \in X_\eta^n$, $x_\xi \in X_\xi^n$ и $\eta < \xi$. Согласно (8) и (1), имеем

$$\rho(x_\eta, \mathscr{X} - G_\eta) \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad x_\xi \in K_\xi \subset \mathscr{X} - G_\eta,$$

следовательно, $|x_\eta - x_\xi| \geqslant \frac{1}{n}$, откуда вытекает формула (11).

Множества X_ξ^n, в силу неравенства (11), открыто-замкнуты в множестве S_n. Так как $\operatorname{Fr}(G_\xi) \cap \underset{x}{\mathrm{E}} \left[\rho(x, \mathscr{X} - G_\xi) \geqslant \frac{1}{n}\right] = 0$, то, в силу (8) и (1), имеем

$$X_\xi^n = X_\xi \cap \left[\overline{G}_\xi - \bigcup_{\eta < \xi} G_\eta\right] \cap \underset{x}{\mathrm{E}} \left[\rho(x, \mathscr{X} - G_\xi) \geqslant \frac{1}{n}\right].$$

Это означает, что *если множество X_ξ замкнуто, то множество X_ξ^n также замкнуто*. Отсюда следует, что множество S_n замкнуто, ибо если предположить, что $p \in \overline{S}_n - S_n$, то существуют две точки $x_\eta \in X_\eta^n$ и $x_\xi \in X_\xi^n$, такие, что

$$|x_\eta - p| < \frac{1}{2n}, \quad |x_\xi - p| < \frac{1}{2n} \quad \text{и} \quad \eta \neq \xi.$$

Но тогда $|x_\eta - x_\xi| < 1/n$, вопреки (11).

Таким образом, мы доказали, принимая во внимание (10), что *если множество X_ξ замкнуто, то S есть F_σ-множество*. Отсюда следует, в силу (3), что если множество X_ξ типа F_σ, то множество S также типа F_σ. В силу (7), отсюда вытекает, что *если X_ξ есть G_δ-множество, то S — также G_δ-множество*.

Принимая во внимание формулы (3) и (5), мы приходим к требуемому заключению: *если X_ξ есть множество класса $\boldsymbol{F}_\alpha$ (или $\boldsymbol{G}_\alpha$), то и S — множество того же класса.*

Отсюда мы выводим следующую теорему, частным случаем которой является теорема 1 (согласно теореме 3).

Теорема 4. *Пусть* P — *некоторое свойство, инвариантное относительно $\mathcal{M}$-операции, и пусть A — некоторое множество. Обозначим через S множество точек $x \in A$, для которых существует открытое множество G, такое, что $x \in G$ и $G \cap A$ обладает свойством* P. *Тогда множество S также обладает этим свойством.*

Действительно, занумеруем открытые множества G, такие, что множества $G \cap A$ обладают свойством P, в трансфинитную последовательность $G_0, G_1, \ldots, G_\xi, \ldots$ и положим $X_\xi = A \cap G_\xi$.

Тогда имеет место равенство (2), ибо

$$S = \bigcup_\xi (A \cap G_\xi) = \bigcup_\xi (A \cap K_\xi) = \bigcup_\xi (X_\xi \cap K_\xi).$$

Множество X_ξ обладает свойством P. Из инвариантности этого свойства относительно $\mathcal{M}$-операции следует, что множество S тоже обладает этим свойством.

Замечание[1]). Пользуясь методом доказательства теоремы 1 в случае сепарабельного пространства, легко показать, что любое множество в сепарабельном пространстве, являющееся локально борелевским в каждой из своих точек, является борелевским множеством.

Однако *существует несепарабельное метрическое пространство, содержащее неборелевское множество, являющееся в каждой из своих точек локально борелевским (неограниченного класса).* В самом деле, рассмотрим пространство, образованное всеми точками (x, α), где $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha < \Omega$; расстояние между точками (x, α) и (x', α') положим равным $|x - x'|$ для $\alpha = \alpha'$ и 1 для $\alpha \neq \alpha'$ (таким образом, это пространство представляет собой прямое произведение интервала и дискретного множества чисел $\alpha < \Omega$). Пусть I_α — „интервал“ (x, α), где $0 \leqslant x \leqslant 1$, и B_α — борелевское множество $\subset I_\alpha$, не являющееся множеством класса α (см. п. XIV). Множество $S = \bigcup\limits_{\alpha < \Omega} B_\alpha$ — локально борелевское, так как интервалы I_α открыты в пространстве, но оно не является борелевским, так как если бы оно было множеством класса α, то и множество $S \cap I_\alpha = B_\alpha$ было бы множеством того же класса.

Теорема 1 позволяет установить для общих метрических пространств следующую теорему, которую мы доказали для сепарабельных пространств в § 24, III.

[1]) Это замечание принадлежит Шпильрайну-Марчевскому [4], стр. 112.

Теорема 5. *Любое разложимое множество есть множество типа F_σ и G_δ.*

Действительно, пусть

$$E = \bigcup_{\xi < \alpha} (F_\xi - H_\xi), \quad \text{где} \quad F_\xi \supset H_\xi \supset F_\zeta \quad \text{для} \quad \xi < \zeta,$$

и $F_\xi = \overline{F}_\xi$, $H_\xi = \overline{H}_\xi$. Допустим, что теорема верна для каждого $\alpha' < \alpha$; докажем ее для α, или, принимая во внимание теорему 1, докажем, что множество E локально типа F_σ и G_δ в каждой точке.

Итак, пусть $p \in E$. Тогда существует $\alpha' < \alpha$, такое, что $p \in F_{\alpha'} - H_{\alpha'}$. Положим $G = \mathcal{X} - H_{\alpha'}$. Имеем $p \in G$, где G — открытое множество, и для $\zeta > \alpha'$

$$F_\zeta \subset H_{\alpha'}, \quad \text{откуда} \quad F_\zeta \cap G = 0,$$

следовательно,

$$G \cap \bigcup_{\zeta > \alpha'} (F_\zeta - H_\zeta) = 0.$$

Тогда

$$G \cap E = G \cap \left[\bigcup_{\xi < \alpha'} (F_\xi - H_\xi)\right] \cup [G \cap F_{\alpha'} - H_{\alpha'}].$$

Так как множество $\bigcup_{\xi < \alpha'} (F_\xi - H_\xi)$ является (по предположению) множеством типа F_σ и G_δ, это верно и для множества $G \cap E$. Следовательно, множество E локально типа F_σ и G_δ в точке p.

XI. Вычисление классов с помощью логических символов[1]**.** Функция высказываний $\varphi(x)$ называется *функцией класса* F_α (*класса* G_α), если множество $\underset{x}{E}\, \varphi(x)$ есть множество класса F_α (класса G_α).

Опираясь на формулы, установленные во введении (§ 1, IV и § 2, V — VI), докажем следующие предложения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две функции высказываний класса F_α (класса G_α); тогда функции $\varphi(x) \vee \psi(x)$ и $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ являются функциями того же класса.*

Это утверждение следует из того, что

$$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) \vee \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) \cup \underset{x}{E}\, \psi(x)$$

и

$$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) \wedge \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) \cap \underset{x}{E}\, \psi(x),$$

поскольку борелевский класс инвариантен относительно пересечения и объединения множеств.

[1]) См. Тарский и Куратовский [1] и Куратовский [15].

Справедлива более общая

Теорема 1′. *Пусть* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \psi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_j}) \vee \vee \chi(x_{l_1}, \ldots, x_{l_m})$, *где индексы* $k_1, \ldots, k_j$ *и* $l_1, \ldots, l_m$ *все* $\leqslant n$ *(например,* $\varphi(x, y, z) \equiv \psi(x, y) \vee \chi(y, z)$*). Если* ψ *и* χ *— функции класса* F_α *(класса* G_α*), то функция* φ *является функцией того же класса (причем это верно и для* $\psi \wedge \chi$*).*

В самом деле,

$$\underset{x_1, \ldots, x_n}{\mathrm{E}} \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \underset{x_1, \ldots, x_n}{\mathrm{E}} \psi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_j}) \cup \underset{x_1, \ldots, x_n}{\mathrm{E}} \chi(x_{l_1}, \ldots, x_{l_m}),$$

и так как $\underset{x_{k_1}, \ldots, x_{k_j}}{\mathrm{E}} \psi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_j})$ есть множество класса F_α, то и $\underset{x_1, \ldots, x_n}{\mathrm{E}} \psi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_j})$ — также множество класса F_α, ибо оно получается из предыдущего множества умножением на оси (см. п. III).

Очевидно, что, *выполняя конечное число логических сложений и умножений над функциями высказываний класса* F_α *(класса* G_α*), мы всегда получим функцию высказываний класса* F_α *(класса* G_α*).*

Теорема 2. *Если функция высказываний* $\varphi(x)$ *есть функция класса* F_α, *то ее отрицание есть функция класса* G_α.

Это вытекает из того, что множество $\underset{x}{\mathrm{E}} \neg\varphi(x)$ является дополнением к множеству $\underset{x}{\mathrm{E}} \varphi(x)$.

Теорема 3. *Если функции высказываний* $\varphi_n(x)$, *где* $n = 1, 2, \ldots$, *являются функциями классов* $< \alpha$, *то функция* $\bigvee_n \varphi_n(x)$ *есть функция аддитивного класса* α, *а* $\bigwedge_n \varphi_n(x)$ *— функция мультипликативного класса* α.

Это следует из равенств (см. § 2, V (1) и (2))

$$\underset{x}{\mathrm{E}} \bigvee_n \varphi_n(x) = \bigcup_n \underset{x}{\mathrm{E}} \varphi_n(x) \quad \text{и} \quad \underset{x}{\mathrm{E}} \bigwedge_n \varphi_n(x) = \bigcap_n \underset{x}{\mathrm{E}} \varphi_n(x).$$

В частности, если все $\varphi_n(x)$ — функции одного и того же класса F_α с четным α, то $\bigvee_n \varphi_n(x)$ есть функция класса $F_{\alpha\sigma}$, а $\bigwedge_n \varphi_n(x)$ есть функция класса F_α. Аналогичным образом, если $\varphi_{n, m}(x)$ — функции класса F_α, то $\bigwedge_m \bigvee_n \varphi_{n, m}(x)$ есть функция класса $F_{\alpha\sigma\delta}$, и т. д.

Итак, мы видим, что *теоремы* 1 — 3 *позволяют вычислить борелевский класс множества, если это множество определено с помощью функции высказываний, которую можно получить, исходя из системы таких функций высказываний, классы которых известны, осуществляя при этом только конечное число логических операций* $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\bigvee_n$, $\bigwedge_n$.

В приложениях часто применяются следующие правила.

Теорема 4. *Если $\varphi(x)$ — функция высказываний класса F_α (класса G_α) и если $f\colon T\to\mathscr{X}$ — непрерывное отображение, то функция высказываний $\varphi[f(t)]$ также является функцией класса F_α (класса G_α).*

В самом деле, положим $A=\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)$. Тогда (см. § 3, I)

$$\underset{t}{\mathsf{E}}\,\varphi[f(t)]=\underset{t}{\mathsf{E}}\left\{f(t)\in\underset{x}{\mathsf{E}}\,\varphi(x)\right\}=\underset{t}{\mathsf{E}}\,\{f(t)\in A\}=f^{-1}(A),$$

и так как A — множество класса F_α (класса G_α), то (см. п. III) множество $f^{-1}(A)$ принадлежит тому же классу.

Теорема 5. *Пусть $\psi(x, y)$ — функция класса F_α (класса G_α), тогда функция $\varphi(x)=\psi(x, y_0)$ при фиксированном y_0, а также функция $\chi(x)=\psi(x, x)$ принадлежат тому же классу.*

Чтобы убедиться в этом, подставим в III (1)

$$Z=\underset{x}{\mathsf{E}}\,\psi(x, y)\quad\text{или}\quad Z=\underset{x}{\mathsf{E}}\,\psi(x, x).$$

Теорема 6. *Пусть $\psi(x)$ — функция класса F_α (класса G_α), тогда $\varphi(x, y)\equiv\psi(x)$ является функцией того же класса.*

Это следует из того, что

$$\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,\varphi(x, y)=\underset{x}{\mathsf{E}}\,\psi(x)\times\mathscr{Y}.$$

XII. Приложения. 1. *Вычисление борелевского класса множеств* $S_\alpha=\underset{z}{\mathsf{E}}\,(\overline{z}<\alpha)$, *где* $\alpha<\Omega$ (см. § 3, XVI).

Каждому $z\in\mathscr{C}$ и каждому целому положительному числу n поставим в соответствие точку $u\in\mathscr{C}$, определенную следующим образом: если $z^n=0$, положим $u=0$; если $z^n=2$, то $u^k=2$, когда $z^k=2$ и $r_n<r_k$ и $u^k=0$ в противном случае.

Обозначая u символом $z^{[n]}$, получаем

$$(1)\qquad (u=z^{[n]})\equiv\bigwedge_k\{(u^k=2)\equiv(z^k=2=z^n)\wedge(r_n<r_k)\}.$$

В обозначениях § 3, XVI имеем

$$R_{z^{[n]}}=R_z\cap\underset{r}{\mathsf{E}}\,(r_n<r),\quad\text{если}\quad z^n=2.$$

Отсюда следует, что если $\overline{z}$ — порядковое число, то последовательность $\overline{z^{[1]}}$, $\overline{z^{[2]}}$, ... пробегает все порядковые числа $<\overline{z}$.

Так как множества $\underset{z}{\mathsf{E}}\,(z^j=2)$, где $j=1, 2, \ldots$, открыто-замкнуты в $\mathscr{C}$, то множество пар u, z, удовлетворяющих условию в фигурных скобках, также является открыто-замкнутым. Следовательно, множество $\underset{u,\,z}{\mathsf{E}}\,(u=z^{[n]})$, т. е. график функции $z^{[n]}$, замкнуто. Так как множество $\mathscr{C}$ компактно, отсюда вытекает, что функция $z^{[n]}$ непрерывна (см. § 20, V, 8).

Теорема 1. *Для* $\alpha < \Omega$ *множества* $S_\alpha = \underset{z}{\mathsf{E}}(\overline{z} < \alpha)$ *и, следовательно, составляющие* $L_\alpha = \underset{z}{\mathsf{E}}(\overline{z} = \alpha)$ *представляют собой борелевские множества*. (Лебег [1], Лузин и Серпинский [2].)

А именно, S_α *есть множество класса* $\boldsymbol{G}_\alpha$.

Отметим сначала два тождества (λ — предельное число):

$$(2)\qquad (\overline{z} < \alpha + 1) \equiv \bigwedge_n \left(\overline{t^{[n]}} < \alpha\right);$$

$$(3)\qquad (\overline{z} < \lambda) \equiv \bigvee_{\xi < \lambda} (\overline{z} < \xi),$$

Применим индукцию. В случае, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, теорема очевидна. Допустим теперь, что функция высказываний $\overline{z} < \xi$ есть функция класса $\boldsymbol{G}_\xi$ для любого $\xi < \beta$. Следовательно, если $\beta = \alpha + 1$, то функция высказываний $\overline{z} < \alpha$ есть функция класса $\boldsymbol{G}_\alpha$. Так как функция $z^{[n]}$ непрерывна, отсюда вытекает (в силу XI, 4), что функция высказываний $\overline{z^{[n]}} < \alpha$ также принадлежит классу $\boldsymbol{G}_\alpha$. Отсюда, в силу (2) и XI, 3, следует, что функция высказываний $\overline{z} < \alpha + 1$, т. е. $\overline{z} < \beta$, есть функция класса $\boldsymbol{G}_\beta$.

С другой стороны, если β — предельное число, то к этому заключению можно прийти, принимая во внимание (3) и XI, 3.

Замечание. 1. Вычисление класса множества S_α может быть проведено точнее. Действительно, множества S_n для конечных n замкнуты, S_ω есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество, $S_{\omega\cdot 2}$ есть $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta\sigma}$-множество, и т. д. Однако следует заметить (см. § 39, VIII), что S_α являются множествами *неограниченных* классов, т. е. что любому $\beta < \Omega$ соответствует множество S_α, не являющееся множеством класса β.

2. Каждому иррациональному числу z интервала $(0, 1)$ поставим в соответствие множество Z_z, состоящее из чисел $r_{z^1}, r_{z^2}, \ldots$ (где z отождествлено с последовательностью $z^1, z^2, \ldots$, см. § 3, IX, 2). Обозначим через $\overline{z}$ порядковый тип множества Z_z. Положим

$$T_\alpha = \underset{z}{\mathsf{E}}(\overline{z} < \alpha).$$

Рассуждения, полностью аналогичные предыдущим, позволяют доказать, что T_α — *множество класса* $\boldsymbol{G}_\alpha$.

3. Напомним, что порядковый тип τ называется *предельным*, если упорядоченное множество T порядкового типа τ не имеет последнего элемента. Обозначим через A множество точек $z \in \mathscr{E}$, таких, что $\overline{z}$ — предельный тип. В логических терминах (см. обозначения § 3, XVI)

$$(z \in A) \equiv \bigwedge_n \bigvee_k [(r_n \in R_z) \Rightarrow (r_k \in R_z) \wedge (r_k < r_n)] \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_n \bigvee_k [(z^n = 2) \Rightarrow (z^k = 2) \wedge (r_k < r_n)].$$

Так как множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{z}(z^n = 2)$ является открыто-замкнутым (в множестве $\mathscr{C}$), то функция высказываний, записанная в квадратных скобках, есть функция класса $\boldsymbol{G}_0$. Следовательно, *множество A есть множество класса $\boldsymbol{G}_\delta$*.

4. Условимся называть порядковый тип *четным*, если он имеет вид $\lambda + 2n$, где λ — предельный тип и n — целое число $\geqslant 0$. Аналогичным образом, порядковый тип называется *нечетным*, если он имеет вид $\lambda + 2n + 1$ [1]).

Обозначим через P множество точек z, таких, что $\overline{z}$ — четный тип. Тогда $P = P_0 \cup P_2 \cup \ldots$, где P_{2n} — множество элементов z, таких, что $\overline{z}$ имеет вид $\lambda + 2n$.

Запишем в логических символах определение множества P_2:

$$(z \in P_2) \equiv \bigvee_{i,\, j} \Big\{ (r_i,\ r_j \in R_z) \wedge (r_i < r_j) \wedge \bigwedge_n (i \neq n \neq j) \wedge (r_n \in R_z) \Rightarrow \Rightarrow \Big[(r_j < r_n) \wedge \bigvee_k (r_j < r_k < r_n) \wedge (r_k \in R_z) \Big] \Big\}.$$

Следовательно,

$$(z \in P_2) \equiv \bigvee_{i,\, j} \Big\{ (z^i = 2 = z^j) \wedge (r_i < r_j) \wedge \bigwedge_n ((i \neq n \neq j) \wedge \wedge (z^n = 2)) \Rightarrow \Big[(r_j < r_n) \wedge \bigvee_k (r_j < r_k < r_n) \wedge (z^k = 2) \Big] \Big\}.$$

Отсюда вытекает, что множество P_2 есть $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}$-множество. Из аналогичного определения множеств P_4, P_6, ... видно, что все они являются $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}$-множествами. Следовательно, и P есть $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}$-множество.

Подобно этому можно доказать, что множество точек z, таких, что $\overline{z}$ — нечетный порядковый тип, есть $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}$-множество.

5. Пусть Φ — семейство всех последовательностей $\{\xi^i\}$ точек метрического пространства $\mathscr{X}$, удовлетворяющих условию сходимости Коши (последовательность ξ^1, ξ^2, ... удовлетворяет условию Коши, если любому $\varepsilon > 0$ соответствует индекс m, такой, что $|\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было i).

Докажем, что Φ является множеством типа $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$ в пространстве $\mathscr{X}^{\aleph_0}$. По определению,

$$\{\xi \in \Phi\} \equiv \bigwedge_k \bigvee_m \bigwedge_i |\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Функция высказываний

$$\varphi_{k,\, m,\, i}(\xi) \equiv \Big\{ |\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \frac{1}{k} \Big\}$$

есть функция класса $\boldsymbol{F}_0$ (при фиксированных k, m, i). В самом деле, так как расстояние $|x - y|$ — непрерывная функция двух переменных

[1]) Обычно эти понятия рассматриваются только для типов вполне упорядоченных множеств.

и ξ^n — непрерывная функция точки ξ (см. § 16, II), то множество

$$\underset{\xi}{\mathrm{E}}\left\{|\xi^{m+l}-\xi^m|\leqslant\frac{1}{k}\right\}$$

замкнуто.

Применяя теорему XI, 3, получаем, что функция $\bigwedge_l \varphi_{k,m,l}(\xi)$ есть также функция класса F_0, функция $\bigvee_m\bigwedge_l \varphi_{k,m,l}(\xi)$ есть функция класса F_σ и, наконец, функция $\bigwedge_k\bigvee_m\bigwedge_l \varphi_{k,m,l}(\xi)$ является функцией класса $F_{\sigma\delta}$. Это означает, что множество Φ есть множество класса $F_{\sigma\delta}$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в силу теоремы XI, 4, вытекает следующее утверждение:

Пусть f_n: $T\to\mathscr{X}$, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательность непрерывных функций; множество C точек t, для которых последовательность $\{f_n(t)\}$ удовлетворяет условию Коши, есть множество класса $F_{\sigma\delta}$[1].

Обозначим через $\xi(t)$ последовательность $[f_1(t), f_2(t), \ldots]$. Тогда $\{t\in C\}\equiv\bigwedge_k\bigvee_m\bigwedge_l \varphi_{k,m,l}[\xi(t)]$, откуда следует сформулированное утверждение

6. *Семейство Θ плотных в себе последовательностей образует в пространстве $\mathscr{X}^{\aleph_0}$ множество типа G_δ.*

Последовательность $\xi=[\xi^1, \xi^2, \ldots]$ называется плотной в себе, если для любого n существует точка $\xi^m\neq\xi^n$, сколь угодно близкая к точке ξ^n, т. е.

$$[\xi\in\Theta]\equiv\bigwedge_{n,k}\bigvee_m\left\{0<|\xi^n-\xi^m|<\frac{1}{k}\right\}.$$

Функция высказываний в фигурных скобках, очевидно, представляет собой функцию класса G_0 (при фиксированных n, m и k), поэтому ее класс не меняется при применении оператора $\bigvee_m$.

Следовательно, функция $[\xi\in\Theta]$ является функцией класса G_δ.

XIII. Универсальные функции[2]. Пусть F—некоторое семейство множеств и T—некоторое множество. Любое отображение $F: T\xrightarrow{\text{на}}\boldsymbol{F}$, т. е.

$$\{X\in\boldsymbol{F}\}\equiv\bigvee_t[X=F(t)],$$

называется *функцией, универсальной относительно семейства* $\boldsymbol{F}$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что пространство $\mathscr{X}$ (подмножествами которого являются элементы семейства $\boldsymbol{F}$)—метрическое

[1]) Ср. § 2, VI, пример 2. Если $\mathscr{X}$ — полное пространство, то C есть множество точек сходимости последовательности $\{f_n\}$.

[2]) См. Серпинский [39], стр. 82.

сепарабельное. Возьмем в качестве T множество $\mathcal{N}$ иррациональных чисел интервала $\mathcal{J}$ [1]).

Если семейство $\boldsymbol{F}$ имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$, то, очевидно, существует функция, универсальная относительно семейства $\boldsymbol{F}$ (так как множество $\mathcal{N}$ имеет мощность $\mathfrak{c}$). Тогда можно заменить семейство $\boldsymbol{F}$ борелевским классом $\boldsymbol{F}_\alpha$ или $\boldsymbol{G}_\alpha$.

Теорема. *Любому $\alpha<\Omega$ соответствует некоторая функция G_α, универсальная относительно класса $\boldsymbol{G}_\alpha$, такая, что множество $\underset{x,z}{\mathrm{E}}[x \in G_\alpha(z)]$, принадлежащее прямому произведению $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$, есть множество класса $\boldsymbol{G}_\alpha$* [2]).

Воспользуемся следующими обозначениями. Как обычно, мы будем рассматривать иррациональное число z как последовательность натуральных чисел $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots$ (определяемую, например, разложением z в непрерывную дробь).

Поскольку пространство $\mathcal{N}$ гомеоморфно пространству $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ (ср. § 3, IX, 2 и § 16, II, 6), имеется взаимно однозначное соответствие между иррациональными числами z и последовательностями иррациональных чисел $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots$, такое, что при фиксированном n число $z_{(n)}$ является непрерывной функцией числа z; можно положить, например,

$$z_{(n)} = \left[z^{(2^{n-1})}, \ldots, z^{(2^{n-1}+k\cdot 2^n)}, \ldots\right].$$

Каждому предельному трансфинитному числу $\lambda < \Omega$ поставим в соответствие последовательность $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, сходящуюся к λ (существование такой последовательности вытекает из аксиомы выбора).

Наконец, через $R_1, R_2, \ldots$ обозначим базу пространства (содержащую пустое множество).

Определим функцию G_α следующим образом:

1) $G_0(z) = \bigcup\limits_n R_{z(n)}$,

2) $G_{\alpha+1}(z) = \bigcap\limits_n G_\alpha(z_{(n)})$ или $\bigcup\limits_n G_\alpha(z_{(n)})$ в зависимости от того, четно или нечетно число α,

3) $G_\lambda(z) = \bigcup\limits_n G_{\lambda_n}(z_{(n)})$, если λ — предельное число.

Докажем, что

(i) $G_\alpha(z)$ есть множество класса $\boldsymbol{G}_\alpha$;

---

[1]) В качестве T берется множество $\mathcal{N}$ иррациональных чисел интервала $\mathcal{J}$, а не *весь* интервал $\mathcal{J}$, с тем чтобы избежать некоторых неудобств, связанных с разрывностью функции „n-я цифра двоичного разложения числа x“; если рассматривать иррациональное число z как последовательность натуральных чисел, то n-й член этой последовательности является непрерывной функцией числа z (см. § 16, II).

Можно было бы обойтись нигде не плотным канторовским множеством $\mathcal{C}$.

[2]) Последующее рассуждение, по существу, заимствовано у Лебега [3].

(ii) если X — множество класса $\boldsymbol{G}_\alpha$, то существует $z \in \mathcal{N}$, такое, что $X = G_\alpha(z)$;

(iii) $\underset{x,\,z}{\mathsf{E}}\,[x \in G_\alpha(z)]$ есть множество класса $\boldsymbol{G}_\alpha$.

Доказательство. Свойство (i) непосредственно вытекает из свойства (iii) (см. III, теорема).

Докажем (ii). Пусть сначала X — множество класса $\boldsymbol{G}_0$, т. е. открытое множество. По определению базы, множество X имеет вид $X = \bigcup_n R_{k_n}$. Пусть z — иррациональное число, такое, что

$$z^1 = k_1, \qquad z^2 = k_2, \ \ldots .$$

Тогда

$$G_0(z) = \bigcup_n R_{z(n)} = \bigcup_n R_{k_n} = X.$$

Следовательно, при $\alpha = 0$ условие (ii) выполняется. Предположим, что оно выполняется для α, и докажем его для $\alpha + 1$. Пусть X — множество класса $\boldsymbol{G}_{\alpha+1}$:

$$X = \bigcap_n X_n \quad \text{или} \quad X = \bigcup_n X_n$$

(в зависимости от того, четно или нечетно число α), где X_n — множества класса $\boldsymbol{G}_\alpha$. По предположению, существует последовательность иррациональных чисел $\{z_n\}$, такая, что $X_n = G_\alpha(z_n)$. По определению функции $z_{(n)}$, существует значение z, такое, что $z_n = z_{(n)}$ для любого n. Следовательно, в зависимости от четности или нечетности числа α имеем

$$G_{\alpha+1}(z) = \bigcap_n G_\alpha(z_{(n)}) = X \quad \text{или} \quad G_{\alpha+1}(z) = \bigcup_n G_\alpha(z_{(n)}) = X.$$

Предположим, наконец, что $\lambda = \lim \lambda_n$ и что для каждого λ_n утверждение (ii) верно. Пусть X — множество класса $\boldsymbol{G}_\lambda$, тогда $X = \bigcup_n X_n$, где X_n — множество класса $\boldsymbol{G}_{\alpha_n}$, $\alpha_n < \lambda$. Так как последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к λ, то для любого n существует индекс k_n, такой, что $\alpha_n \leqslant \lambda_{k_n}$.

Следовательно, X_n есть множество класса $\boldsymbol{G}_{\lambda_{k_n}}$. Тогда существует иррациональное число z_{k_n}, такое, что $X_n = G_{\lambda_{k_n}}(z_{k_n})$. Если i — индекс, отличный от всех индексов k_n, то существует иррациональное число z_i, такое, что $G_{\lambda_i}(z_i) = 0$.

Таким образом, $X = \bigcup_n G_{\lambda_n}(z_n)$. Пусть, как и раньше, z — иррациональное число, такое, что $z_n = z_{(n)}$. Тогда

$$X = \bigcup_n G_{\lambda_n}(z_{(n)}) = G_\lambda(z).$$

Докажем утверждение (iii). Прежде всего заметим, что множество $\underset{x,\,n}{\mathsf{E}}\,(x \in R_n)$ открыто в прямом произведении пространства $\mathcal{X}$ и множества натуральных чисел. Иначе говоря, функция высказываний (двух переменных) $x \in R_n$ есть функция класса G_0. Так как функция z^n непрерывна при фиксированном n, то, на основании XI, 4, функция высказываний $x \in R_{z(n)}$ является функцией класса G_0. То же относится и к функции высказываний $\bigvee_n (x \in R_{z(n)})$, которая эквивалентна функции $x \in \bigcup_n R_{z(n)}$ (см. § 2, V).

Следовательно, функция высказываний $x \in G_0(z)$ есть функция класса G_0 и множество $\underset{x,z}{\mathsf{E}}\,[x \in G_0(z)]$ открыто. Аналогичным образом, если функция высказываний $x \in G_\alpha(z)$ есть функция класса α, то функция $x \in G_\alpha\left(z_{(n)}\right)$ при фиксированном n также является функцией класса α, поскольку $z_{(n)}$ — непрерывная функция от z. Следовательно, функция высказываний $\bigwedge_n \left[x \in G_\alpha\left(z_{(n)}\right)\right]$ (для четных α) есть функция класса $G_{\alpha+1}$ (случай нечетного α рассматривается аналогично). Так как

$$\bigwedge_n \left[x \in G_\alpha\left(z_{(n)}\right)\right] \equiv \left\{x \in \bigcap_n G_\alpha\left(z_{(n)}\right)\right\} \equiv \left\{x \in G_{\alpha+1}(z)\right\},$$

отсюда вытекает, что условие (iii) выполняется для $\alpha + 1$. Наконец, если для любого n функция высказываний $x \in G_{\lambda_n}(z)$ есть функция класса G_{λ_n}, то $\bigvee_n \left[x \in G_{\lambda_n}\left(z_{(n)}\right)\right]$ — функция класса G_λ. Отсюда, как и раньше, следует, что $\underset{x,z}{\mathsf{E}}\,[x \in G_\lambda(z)]$ есть множество класса G_λ.

З а м е ч а н и е. Для классов F_α имеет место аналогичная теорема: для любого α существует универсальная функция F_α, такая, что множество $\underset{x,z}{\mathsf{E}}\,[x \in F_\alpha(z)]$ есть множество класса F_α. А именно, $F_\alpha(z) = \mathscr{X} - G_\alpha(z)$.

XIV. Существование множеств класса G_α, не являющихся множествами класса F_α. Установим существование таких множеств в пространстве $\mathscr{N}$ иррациональных чисел интервала (0,1) [1]).

Пусть $\mathscr{X} = \mathscr{N}$; рассмотрим множество

$$Z_\alpha = \underset{z}{\mathsf{E}}\,[z \in G_\alpha(z)],$$

представляющее собой проекцию на ось $\mathscr{N}$ подмножества множества $\underset{z,z'}{\mathsf{E}}\,[z \in G_\alpha(z')]$, лежащего на *диагонали* пространства $\mathscr{N} \times \mathscr{N}$, т. е. на множестве $\underset{z,z'}{\mathsf{E}}\,(z = z')$ (см. § 15, IV).

---

[1]) Для $\alpha \leqslant 3$ это можно установить более прямым способом, см. Бэр [3] и [5], а также Лузин [8], пример, данный Л. В. Келдыш. Для произвольных α см. работу Энгелькинга и др., *Coll. Math.* (в печати).

Так как $\underset{z,\, z'}{\mathsf{E}}[z \in G_\alpha(z')]$ — множество класса $\boldsymbol{G}_\alpha$, то Z_α также является множеством класса $\boldsymbol{G}_\alpha$ (см. III, теорема).

Остается доказать, что Z_α не является множеством класса $\boldsymbol{F}_\alpha$. Предположим противное, тогда $\mathcal{N} - Z_\alpha$ есть множество класса $\boldsymbol{G}_\alpha$. Пусть G_α — универсальная функция, тогда существует z_0, такое, что $\mathcal{N} - Z_\alpha = G_\alpha(z_0)$. Но это приводит к противоречию, ибо, согласно определению множества Z_α, имеет место тождество

$$\{z_0 \in G_\alpha(z_0)\} \equiv \{z_0 \in Z_\alpha\},$$

тогда как, по определению числа z_0,

$$\{z_0 \in G_\alpha(z_0)\} \equiv \{z_0 \in (\mathcal{N} - Z_\alpha)\}.$$

Замечание. Вторая часть этого утверждения представляет собой по существу доказательство следующей теоремы общей теории множеств:

Теорема о диагонали[1]. *Пусть* $F: T \to 2^T$, *тогда множество* $\underset{t}{\mathsf{E}}[t \in T - F(t)]$ *не может быть значением функции* F.

XV. Проблема эффективности[2]. Доказательство существования множества класса $\boldsymbol{G}_\alpha$, не являющегося множеством класса $\boldsymbol{F}_\alpha$, приведенное в п. XIV, *не эффективно* в том смысле, что мы не можем *определить* функцию, которая ставила бы в соответствие каждому α множество, обладающее рассматриваемым свойством.

Анализируя рассуждения п. XIII, мы видим, что отсутствие эффективности проистекает из того, что мы не определили функцию, которая ставила бы в соответствие каждому предельному числу λ сходящуюся последовательность чисел $< \lambda$; в самом деле, мы только утверждали *существование*, но не определили никакой конкретной последовательности такого рода. Такое определение до сих пор неизвестно.

Итак, для того чтобы эффективно доказать существование множеств, являющихся множествами класса $\boldsymbol{G}_\alpha$, но не являющихся множествами класса $\boldsymbol{F}_\alpha$, необходимо видоизменить условие 3) определения G_α.

Воспользуемся для этого функцией $\bar{z}$, определенной в п. XII, 2. Положим $\tau(z) = \bar{z}$, если $\bar{z} < \Omega$, и $\tau(z) = -1$ в противном случае; функция $\tau(z)$ обладает двумя важными свойствами:

[1] Эта теорема была доказана Кантором; см. его доказательство неравенства $2^\mathfrak{m} > \mathfrak{m}$.

[2] См. Куратовский [8], Серпинский [21].

1° она ставит в соответствие каждому числу z трансфинитное число (или -1) таким образом, что исчерпываются все числа $\alpha < \Omega$;

2° функция высказываний $\varphi_\alpha(z) \equiv \{0 < \tau(z) < \alpha\}$ есть функция класса $\boldsymbol{G}_\alpha$.

Допустим, что функция G_α определена условиями 1), 2), п. XIII и следующим условием, заменяющим условие 3):

$$3')\quad \{x \in G_\lambda(z)\} \equiv \bigvee_n \bigvee_{\xi<\lambda} \left[0 < \tau\left(z_{(2n)}\right) = \xi\right] \wedge \left[x \in G_\xi\left(z_{(2n+1)}\right)\right].$$

Докажем утверждения (ii) и (iii) п. XIII для $\alpha = \lambda$, исходя из предположения, что эти условия выполняются для $\xi < \lambda$ (условие (i) есть следствие условия (iii)).

Доказательство. (ii) Любое множество X класса $\boldsymbol{G}_\lambda$ имеет вид $X = \bigcup_n X_n$, где X_n — множества класса $\boldsymbol{G}_{\xi_n}$ и $0 < \xi_n < \lambda$. Любому ξ_n соответствует иррациональное число v_n, такое, что $\tau(v_n) = \xi_n$.

Кроме того, если G_{ξ_n} — универсальная функция, то существует число w_n, такое, что $X_n = G_{\xi_n}(w_n)$. Но, согласно определению функции $z_{(n)}$, существует значение z, такое, что $z_{(2n)} = v_n$ и $z_{(2n+1)} = w_n$, каково бы ни было n.

Таким образом, $X_n = G_{\xi_n}\left(z_{(2n+1)}\right)$ и $0 < \tau\left(z_{(2n)}\right) = \xi_n$, откуда $X = G_\lambda(z)$.

(iii) Докажем, что функция высказываний двух переменных $x \in G_\lambda(z)$ есть функция класса $\boldsymbol{G}_\lambda$. Из тождества

$$[0 < \tau(z) = \xi] \equiv \neg\, \varphi_\xi(z) \wedge \varphi_{\xi+1}(z)$$

видно, что функция высказываний $[0 < \tau(z) = \xi]$ есть функция класса $\boldsymbol{G}_{\xi+1}$; функция $\left[0 < \tau\left(z_{(2n)}\right) = \xi\right]$ также является функцией класса $\boldsymbol{G}_{\xi+1}$, так как $z_{(2n)}$ — непрерывная функция от z (см. XI, 4). По той же причине функция высказываний $x \in G_\xi\left(z_{(2n+1)}\right)$ есть функция класса $\boldsymbol{G}_\xi$, если $\xi < \lambda$; следовательно, логическое произведение двух этих функций, т. е. функция

$$\left[0 < \tau\left(z_{(2n)}\right) = \xi\right] \wedge \left[x \in G_\xi\left(z_{(2n+1)}\right)\right],$$

есть функция класса $\boldsymbol{G}_{\xi+1}$. Поэтому функция $x \in G_\lambda(z)$ также является функцией класса $\boldsymbol{G}_\lambda$ (согласно (3')).

Таким образом, проблема существования для каждого α универсальной функции класса $\boldsymbol{G}_\alpha$ резрешена эффективным образом.

Определение множества Z_α, указанного в п. XIV, дает, следовательно, эффективное решение проблемы существования в пространстве иррациональных чисел множества класса $\boldsymbol{G}_\alpha$, не являющегося множеством класса $\boldsymbol{F}_\alpha$.

*§ 31. B-измеримые отображения

I. Классификация. Отображение (функция) $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, где $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — метрические пространства, называется *B-измеримым класса* α (или просто *отображением (функцией) класса* α), если каково бы ни было замкнутое множество $F \subset \mathscr{Y}$, множество $f^{-1}(F)$ есть борелевское множество мультипликативного класса α (см. Лебег [1]).

Так как замкнутые множества представляют собой множества мультипликативного класса 0, то, согласно этому определению, непрерывные отображения совпадают с отображениями класса 0.

Взаимно однозначное отображение f называется (*обобщенным*) *гомеоморфизмом класса* (α, β), если отображение f — класса α, а обратное отображение f^{-1} — класса β (см. Куратовский [21], Серпинский [48], стр. 66).

Очевидно, что гомеоморфизмы класса $(0, 0)$ совпадают с гомеоморфизмами в обычном смысле.

Теорема 1. *Для того чтобы характеристическая функция некоторого множества A была функцией класса α, необходимо и достаточно, чтобы A было двусторонним множеством класса α.*

Доказательство. Характеристическая функция принимает только два значения 0 и 1; в качестве пространства $\mathscr{Y}$ возьмем множество, состоящее из этих двух элементов. Каждый из них представляет собой замкнутое множество. Предположим, что характеристическая функция f является функцией класса α, тогда $A = f^{-1}(1)$ и $\mathscr{X} - A = f^{-1}(0)$ — множества мультипликативного класса α; следовательно, A — двустороннее множество класса α.

Обратно, пусть A — двустороннее множество класса α; легко проверить, что $f^{-1}(F)$ — множество мультипликативного класса α, каково бы ни было замкнутое множество F (пространство $\mathscr{Y}$ содержит только четыре замкнутых множества).

Изложенное в § 30, XIV и III приводит к следующим заключениям.

Теорема 2. *В любом классе α существуют действительные функции действительного переменного, не принадлежащие низшим классам.*

Теорема 3. *Существуют функции, не являющиеся В-измеримыми.*

Последнее утверждение для сепарабельных пространств вытекает также из следующей теоремы:

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — сепарабельные пространства, тогда семейство В-измеримых функций имеет мощность* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Доказательство. Пусть последовательность $R_1, R_2, \ldots$ представляет собой базу пространства $\mathcal{Y}$; любую функцию f, отображающую пространство $\mathcal{X}$ на некоторое подмножество пространства $\mathcal{Y}$, можно полностью охарактеризовать последовательностью множеств $f^{-1}(R_1), f^{-1}(R_2), \ldots$.

Так как любая точка y пространства $\mathcal{Y}$ имеет вид $y = R_{k_1} \cap R_{k_2} \cap \ldots$, справедливо тождество

$$\{y = f(x)\} \equiv \{x \in f^{-1}(y)\} \equiv \left\{x \in \bigcap_n f^{-1}(R_{k_n})\right\}.$$

Итак, пусть f есть B-измеримое отображение, тогда множества $f^{-1}(R_n)$ — борелевские, и так как семейство этих множеств имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$, то семейство B-измеримых отображений имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 5. *Любой паре чисел* (α, β) (*меньших* Ω) *соответствует отображение f множества $\mathcal{N}$ на себя: $\mathcal{N} = f(\mathcal{N})$, являющееся гомеоморфизмом в точности класса* (α, β) (*т. е. ни f не является функцией класса* $< \alpha$, *ни f^{-1} не является функцией класса* $< \beta$). Доказательство см. в работе Куратовского [25].

II. Необходимые и достаточные условия. Принимая во внимание тождество $f^{-1}(\mathcal{Y} - Y) = \mathcal{X} - f^{-1}(Y)$, отображение класса α можно определить как отображение, для которого $f^{-1}(G)$ представляет собой множество аддитивного класса α, каково бы ни было *открытое* множество G.

Теорема 1. *Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства $\mathcal{Y}$; для того чтобы f было отображением класса α, необходимо и достаточно, чтобы каждое из множеств $f^{-1}(R_n)$ было множеством аддитивного класса α.*

Это следует из того, что $G = R_{k_1} \cup R_{k_2} \cup \ldots$, откуда

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(R_{k_1}) \cup f^{-1}(R_{k_2}) \cup \ldots.$$

Отсюда также следует, что *если множества $f^{-1}(R_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, борелевские, то отображение f является В-измеримым,* а именно оно принадлежит классу α, где $\alpha > \alpha_n$ и где $f^{-1}(R_n)$ — множество класса α_n.

В частном случае, когда $\mathscr{Y}$ — множество *действительных чисел*, функции класса α можно определить при помощи следующего условия: множества $\underset{x}{\mathrm{E}}\{a < f(x) < b\}$ являются множествами аддитивного класса α, каковы бы ни были числа a и b (впрочем, можно предположить, что они рациональные).

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{Y}$ — дискретное пространство и f — функция класса α; тогда $f^{-1}(Y)$ — двустороннее множество класса α, каково бы ни было $Y \subset \mathscr{Y}$.*

Это утверждение следует из того, что любое множество Y является открыто-замкнутым в пространстве $\mathscr{Y}$.

Теорема 3[1]). *Пусть $\mathscr{Y}$ — сепарабельное пространство; для того чтобы функция f была функцией класса α, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала последовательность множеств $Z_1, Z_2, \ldots$ аддитивного класса α, такая, что*

$$\mathscr{X} = Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \quad \textit{и} \quad \delta[f(Z_n)] < \varepsilon \quad \textit{для} \quad n = 1, 2 \ldots .$$

Доказательство. Поскольку пространство $\mathscr{Y}$ сепарабельно, существует (см. § 21, II, теорема 2 и замечание 1) последовательность $S_1, S_2, \ldots$ открытых шаров, такая, что

$$\mathscr{Y} = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad \delta(S_n) < \varepsilon.$$

Следовательно, достаточно положить $Z_n = f^{-1}(S_n)$.

С другой стороны, предположим, что условие теоремы выполнено. Тогда

$$\mathscr{X} = Z_1^k \cup Z_2^k \cup \ldots \quad \text{и} \quad \delta\left[f\left(Z_n^k\right)\right] < \frac{1}{k},$$

где Z_n^k — множества аддитивного класса α. Докажем, что если G — открытое множество (в пространстве $\mathscr{Y}$), то $f^{-1}(G)$ — множество аддитивного класса α.

В самом деле, докажем, что множество $f^{-1}(G)$ представляет собой объединение множеств Z_n^k, таких, что $f\left(Z_n^k\right) \subset G$.

С одной стороны, из условий $x \in Z_n^k$ и $f\left(Z_n^k\right) \subset G$ вытекает, что $f(x) \in G$, т. е. $x \in f^{-1}(G)$. С другой стороны, из условия $f(x) \in G$, которое эквивалентно условию $x \in f^{-1}(G)$, следует,

[1]) См. Лебег [1], стр. 172 (действительная область). Что касается общего случая, см. Гагаев [1], стр. 183. См. также Фересс [1], где имеется много применений рассматриваемой теоремы.

что для достаточно больших k неравенство $|y - f(x)| < 1/k$ влечет за собой включение $y \in G$ (так как G — открытое множество). Пусть n — индекс, такой, что $x \in Z_n^k$. Тогда из неравенства $\delta[f(Z_n^k)] < 1/k$ следует, что

$$f(Z_n^k) \subset G.$$

III. Суперпозиция функций.

Теорема 1. *Пусть f — функция класса α и Y — множество класса β; тогда $f^{-1}(Y)$ — множество класса $\alpha+\beta$ (мультипликативного или аддитивного, в зависимости от класса множества Y).*

Это утверждение можно получить при помощи трансфинитной индукции (по β) из тождеств

$$f^{-1}\Big(\bigcup_n Y_n\Big) = \bigcup_n f^{-1}(Y_n), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_n Y_n\Big) = \bigcap_n f^{-1}(Y_n)$$

и импликации $(\beta_n < \beta) \Rightarrow (\alpha + \beta_n < \alpha + \beta)$.

В частности, если f — *непрерывная* функция, то $f^{-1}(Y)$ — множество класса β.

Теорема 2. *Если $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ есть функция класса α и $g: \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ — функция класса β, то $h = g \circ f$ есть функция класса $\alpha + \beta$.*

Доказательство. Согласно § 3, IV (1), имеем

$$h^{-1}(F) = f^{-1}[g^{-1}(F)].$$

Если множество F замкнуто, то $g^{-1}(F)$ — множество мультипликативного класса β; таким образом, согласно теореме 1, $f^{-1}[g^{-1}(F)]$ есть множество класса $\alpha+\beta$.

В частности, если функция g *непрерывна*, то $g \circ f$ и $f \circ g$ — функции того же класса, что и f.

IV. Сужения функций.

Теорема 1. *Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств аддитивного класса α, такая, что $\mathscr{X} = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$, и пусть $f_n = f \mid E_n$ — функция класса α на E_n; тогда f — функция класса α (на всем пространстве).*

В самом деле, пусть G — открытое подмножество в $\mathscr{Y}$. Тогда (см. § 3, III (15)) $f^{-1}(G) = f_1^{-1}(G) \cup f_2^{-1}(G) \cup \ldots$, и так как каждое из множеств $f_n^{-1}(G)$, по предположению, является множеством аддитивного класса α относительно E_n, которое само является множеством аддитивного класса α, то и $f^{-1}(G)$ как объединение множеств, принадлежащих этому классу, представляет собой множество аддитивного класса α.

Теорема 2. *Пусть M и N — два множества мультипликативного класса α, таких, что $\mathscr{X} = M \cup N$ и сужения $f \mid M$ и $f \mid N$ — функции класса α; тогда f также является функцией класса α.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству предыдущей: достаточно заменить открытое множество G замкнутым множеством F и бесконечное объединение — объединением двух членов.

Теорема 3. *Пусть f — функция класса α, тогда $f \mid E$ также является функцией класса α, каково бы ни было подмножество E.*

Это утверждение непосредственно вытекает из § 3, III (14).

Теорема 4. *Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — произвольная конечная система непересекающихся множеств мультипликативного класса $\alpha > 0$ и $\mathscr{Y}$ — конечное пространство, состоящее из элементов $y_1, \ldots, y_k$; тогда существует функция $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ класса α, такая, что $f(x) = y_i$ для $x \in F_i$.*

В самом деле, согласно теореме 4 из § 30, VII, существует система непересекающихся двусторонних множеств $A_1, \ldots, A_k$ класса α, таких, что

$$\mathscr{X} = A_1 \cup \ldots \cup A_k, \qquad F_i \subset A_i.$$

Положим $f(x) = y_i$ для $x \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Согласно теореме 1, f есть функция класса α.

V. Функции многих переменных. В случае, когда независимая переменная пробегает *прямое произведение* двух пространств $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, функция f называется функцией двух переменных.

Очевидно, что любую функцию $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$ одной переменной всегда можно рассматривать как функцию $g\colon \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ двух переменных, полагая $g(x, y) = f(x)$.

Теорема 1. *Если f — функция класса α и $g(x, y) = f(x)$, то g является функцией класса α относительно переменной (x, y).*

В самом деле, если x рассматривать как функцию (абсциссу) точки (x, y), то она будет непрерывной функцией точки (x, y) (см. § 15, II). В силу теоремы о суперпозиции функций (III, 2), f есть функция класса α.

Теорема 2. *Если функция f переменных x и y непрерывна относительно переменной x и является функцией класса α относительно переменной y, то она является функцией класса $\alpha+1$ относительно переменной (x, y)*[1].

В частности, *если функция f непрерывна относительно каждой из переменных в отдельности, то она является функцией первого класса.*

Следовательно, *любая функция n переменных, непрерывная относительно каждой из них в отдельности, является функцией класса $n-1$.*

Так как доказательство теоремы 2 в случае, когда $\mathcal{X}$ — сепарабельное пространство, является более простым, рассмотрим сначала этот частный случай. Докажем предварительно следующее утверждение:

Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность точек, плотная в пространстве $\mathcal{X}$, и g — непрерывная функция; для того чтобы точка $g(x)$ принадлежала замкнутому множеству F, необходимо и достаточно, чтобы для каждого n существовал такой индекс k, что $|x-r_k|<1/n$ и $g(r_k)\in B_n$, где B_n — открытый обобщенный шар радиуса $1/n$ с центром F:

$$\text{(i)}\qquad \{g(x)\in F\}\equiv\bigwedge_n\bigvee_k\left[|x-r_k|<\frac{1}{n}\right]\wedge[g(r_k)\in B_n].$$

В самом деле, если $r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots$ — последовательность, сходящаяся к точке x, то $\lim\limits_{m\to\infty} g(r_{k_m})=g(x)$; следовательно, для достаточно больших m имеем $|r_{k_m}-x|<1/n$ и $|g(r_{k_m})-g(x)|<1/n$.

Итак, пусть $g(x)\in F$, тогда $g(r_{k_m})\in B_n$ и правая часть тождества (i) имеет место. Обратно, если предположить, что для любого n существует индекс k_n, такой, что $|x-r_{k_n}|<1/n$ и $g(r_{k_n})\in B_n$, откуда $\rho[g(r_{k_n}), F]<1/n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_{k_n}=x$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} g(r_{k_n})=g(x)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\rho[g(r_{k_n}), F]=0$, имеем $\rho[g(x), F]=0$, т. е. $g(x)\in F$.

Подставим в формулу (i) вместо функции $g(x)$ функцию $f(x, y)$; тогда мы получим

$$\{f(x, y)\in F\}\equiv\bigwedge_n\bigvee_k\left[|x-r_k|<\frac{1}{n}\right]\wedge[f(r_k, y)\in B_n],$$

откуда

$$\text{(ii)}\quad f^{-1}(F)=\bigcap_n\bigcup_k\left\{\left[\left(\mathop{\mathrm{E}}_x|x-r_k|<\frac{1}{n}\right)\times\mathcal{Y}\right]\cap\right.$$
$$\left.\cap\left[\mathcal{X}\times\mathop{\mathrm{E}}_y f(r_k, y)\in B_n\right]\right\}.$$

[1]) См. Лебег [1] и Куратовский [16]. Элементарные примеры показывают, что функция двух переменных может быть *разрывной*, даже если она непрерывна относительно каждой из двух переменных в отдельности.

Итак, если $f(r_k, y)$ определяет функцию класса α относительно переменной y, то $\underset{y}{\mathrm{E}}[f(r_k, y) \in B_n]$ есть множество аддитивного класса α (при фиксированных k и n).

Очевидно, что множество $\underset{x}{\mathrm{E}}[|x - r_k| < 1/n]$ является открытым шаром. Отсюда методом вычисления класса функции высказываний (§ 30, XI) можно вывести, что функция высказываний двух переменных $\{f(x, y) \in F\}$ и множество $f^{-1}(F)$ принадлежат мультипликативному классу $\alpha + 1$.

Теорема 2 установлена для случая сепарабельного пространства; перейдем к общему случаю (см. Монтгомери [1], Куратовский [28]).

Если $\alpha = 0$, то вместо (i) можно пользоваться следующим тождеством:

$$\text{(iii)} \qquad \{g(x) \in F\} \equiv \bigwedge_n \bigvee_{x'} \left[|x - x'| < \frac{1}{n}\right] \wedge [g(x') \in B_n],$$

которое легко вывести аналогичным образом. Заменим в формуле (ii) $\bigcup\limits_k$ на $\bigcup\limits_{x'}$ и r_k на x'. Так как множество в фигурных скобках открыто (ибо по предположению $\alpha = 0$), суммирование (несчетное) $\bigcup\limits_{x'}$ приводит к открытому множеству и, наконец, $f^{-1}(F)$ есть множество типа G_δ. Таким образом, теорема 2 доказана для $\alpha = 0$. Допустим теперь, что $\alpha > 0$.

Предварительно рассмотрим замкнутое множество F и последовательность точек, таких, что $\lim y_n = y$. Пусть B_n — открытый шар с центром F радиусом $1/n$ (см. § 21, IV). Докажем, что *$y \in F$ тогда и только тогда, когда для любого n существует индекс k, такой, что $y_{n+k} \in B_n$*; в логических символах

$$\text{(iv)} \qquad \{y \in F\} \equiv \bigwedge_n \bigvee_k (y_{n+k} \in B_n).$$

В самом деле, с одной стороны, если $y \in F$, то все точки y_m с достаточно большими индексами удовлетворяют неравенству $|y_m - y| < 1/n$, т. е. $y_m \in B_n$; следовательно, за индекс k можно принять произвольный достаточно большой индекс. С другой стороны, если $y \notin F$, то, в силу формулы $F = \bigcap\limits_n \overline{B}_n$, существует индекс m, такой, что $y \notin \overline{B}_m$.

Из равенства $y = \lim y_n$ следует, что, начиная с некоторого индекса $n > m$, все точки y_{n+k} не принадлежат шару $\overline{B}_m$, следовательно, не принадлежат шару B_m; это показывает, что правая часть выражения (iv) не выполняется.

Таким образом, формула (iv) установлена. Докажем вспомогательную теорему, касающуюся $\mathcal{A}$-операции (см. § 30, X, откуда заимствованы обозначения).

Вспомогательная теорема. *Пусть* P — *свойство множеств, инвариантное как относительно* $\mathscr{M}$*-операции, так и относительно прямого произведения на пространство* $\mathscr{X}$. *Пусть* $\mathscr{X} = \{p_0, p_1, \ldots, p_\xi, \ldots\}$ (*пространство* $\mathscr{X}$ *вполне упорядочено*) *и* $G_0, G_1, \ldots, G_\xi, \ldots$ — *трансфинитная последовательность открытых множеств, такая, что* $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{\xi} G_\xi$. *Обозначим через* $\xi(x)$ *минимальный индекс, такой, что* $x \in G_{\xi(x)}$, *и положим* $w(x) = p_{\xi(x)}$. *Пусть* $\varphi(x, y)$ — *функция высказываний двух переменных, пробегающая пространство* $\mathscr{X}$ *и такая, что множество* $\mathop{\mathrm{E}}\limits_{y} \varphi(x, y)$ *обладает свойством* P, *каково бы ни было* x.

При этих предположениях множество $\mathop{\mathrm{E}}\limits_{x, y} \varphi[w(x), y]$ *также обладает свойством* P.

Согласно определению функции $w(x)$, имеет место тождество

$$(1) \qquad \{p_\xi = w(x)\} \equiv \left\{x \in G_\xi - \bigcup_{\eta<\xi} G_\eta\right\}.$$

Следовательно,

$$\varphi[w(x), y] \equiv \bigvee_{\xi} \varphi(p_\xi, y) \wedge [p_\xi = w(x)] \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{\xi} \varphi(p_\xi, y) \wedge \left[x \in \left(G_\xi - \bigcup_{\eta<\xi} G_\eta\right)\right].$$

Тогда имеем

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x, y} \varphi[w(x), y] = \mathop{\mathrm{E}}_{x, y} \bigvee_{\xi} \varphi(p_\xi, y) \wedge \left[x \in \left(G_\xi - \bigcup_{\eta<\xi} G_\eta\right)\right] =$$
$$= \bigcup_{\xi} \left\{\mathop{\mathrm{E}}_{x, y} \varphi(p_\xi, y) \cap \mathop{\mathrm{E}}_{x, y} \left[x \in \left(G_\xi - \bigcup_{\eta<\xi} G_\eta\right)\right]\right\} =$$
$$= \bigcup_{\xi} \left\{\mathop{\mathrm{E}}_{x, y} \varphi(p_\xi, y) \cap \mathop{\mathrm{E}}_{x, y} (x \in G_\xi) - \bigcup_{\eta<\xi} \mathop{\mathrm{E}}_{x, y} (x \in G_\eta)\right\}.$$

Положим

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x, y} \varphi(p_\xi, y) = X_\xi \quad \text{и} \quad \mathop{\mathrm{E}}_{x, y} (x \in G_\xi) = G_\xi^*.$$

Тогда

$$(2) \qquad \mathop{\mathrm{E}}_{x, y} \varphi[w(x), y] = \bigcup_{\xi} \left(X_\xi \cap G_\xi^* - \bigcup_{\eta<\xi} G_\eta^*\right),$$

откуда следует, что множество $\mathop{\mathrm{E}}\limits_{x, y} \varphi[w(x), y]$ порождается множествами $\{X_\xi\}$, если применить к ним $\mathscr{M}$-операцию.

Так как $X_\xi = \mathscr{X} \times \mathop{\mathrm{E}}\limits_{y} \varphi(p_\xi, y)$, то множество X_ξ обладает свойством P.

Поскольку $G_\xi^* = G_\xi \times \mathscr{X}$, множество G_ξ^* открыто. Свойство P инвариантно относительно $\mathscr{M}$-операции, поэтому из равенства (2) вытекает, что множество $\mathop{\mathrm{E}}\limits_{x, y} \varphi[w(x), y]$ обладает свойством P.

Вспомогательная теорема доказана; пусть f — функция, непрерывная по x и класса $\alpha > 0$ по y. Докажем, что $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}[f(x, y) \in F]$ — множество мультипликативного класса $\alpha + 1$, каково бы ни было множество $F = \bar{F}$.

Пусть при фиксированном n, $n = 1, 2, \ldots$, множество G_ξ — (открытый) шар с центром в точке p_ξ радиуса $1/n$. Обозначим через $w_n(x)$ функцию $w(x)$, определенную равенством (1). Так как $x \in G_{\xi(x)}$ и $w_n(x) = p_{\xi(x)} \in G_{\xi(x)}$, имеем

$$(3) \qquad |w_n(x) - x| < \frac{1}{n}, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n \to \infty} w_n(x) = x.$$

В силу непрерывности функции f относительно x, из равенства (3) вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} f[w_n(x), y] = f\left\{\left[\lim_{n \to \infty} w_n(x)\right], y\right\} = f(x, y),$$

откуда, в силу (iv),

$$(4) \qquad \{f(x, y) \in F\} \equiv \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=1}^{\infty} \{f[w_{n+k}(x), y] \in B_n\}.$$

Пусть в вспомогательной теореме свойство P — это свойство быть множеством аддитивного класса α; положим

$$\varphi_n(x, y) \equiv \{f(x, y) \in B_n\}.$$

Так как аддитивный класс $\alpha > 0$ инвариантен относительно $\mathcal{M}$-операции (см. § 30, X, 3) и относительно прямого умножения на пространство $\mathcal{X}$ (см. § 30, III), то множество

$$\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\, \varphi_n[w_m(x), y] = \underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\, \{f[w_m(x), y] \in B_n\}$$

есть множество аддитивного класса α, каковы бы ни были m и n. Следовательно, в силу (4), $f^{-1}(F)$ — множество мультипликативного класса $\alpha + 1$.

З а м е ч а н и е. *Функция $f: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$, являющаяся функцией первого класса относительно каждой из переменных, может быть не B-измеримой (и даже не измеримой в смысле Лебега).* (См. Серпинский [6], [23], стр. 68.)

В самом деле, пусть на евклидовой плоскости $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ множество A — не борелевское множество, расположенное на окружности (или множество, поверхностно не измеримое в смысле Лебега, пересекающееся с любой прямой, параллельной одной из осей, самое большее в двух точках).

Характеристическая функция множества A не B-измерима (см. п. I), тогда как по отношению к каждой из переменных она является функцией первого класса; действительно, она обращается в 0 всюду, за исключением (самое большее) двух точек.

VI. Сложные функции. Любая пара функций $f: \mathcal{T} \to \mathcal{X}$, $g: \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ определяет „составную" функцию $h: \mathcal{T} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (см. § 3, III).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — сепарабельные*[1]) *пространства. Для того чтобы функция h принадлежала классу α, необходимо и достаточно, чтобы классу α принадлежали функции f и g.*

Необходимость. Пусть G — открытое подмножество пространства $\mathcal{X}$, тогда множество $G \times \mathcal{Y}$ открыто, и если h — функция класса α, то $\mathop{\mathrm{E}}\limits_{t} [h(t) \in G \times \mathcal{Y}]$ есть множество аддитивного класса α; так как, в силу тождества $\{f(t) \in G\} \equiv \{h(t) \in G \times \mathcal{Y}\}$, оно совпадает с множеством $f^{-1}(G)$, то функция f принадлежит классу α.

Достаточность. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства $\mathcal{X}$ и $S_1, S_2, \ldots$ — база пространства $\mathcal{Y}$. Тогда двойная последовательность $R_m \times S_n$ образует базу пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (см. § 15, I, 3). Следовательно, достаточно (см. II, 1) показать, что множество $h^{-1}(R_m \times S_n)$ принадлежит аддитивному классу α. Согласно § 3, III (23), имеем

$$h^{-1}(R_m \times S_n) = f^{-1}(R_m) \cap g^{-1}(S_n),$$

и так как функции f и g, по предположению, являются функциями класса α, то множества $f^{-1}(R_m)$ и $f^{-1}(S_n)$ принадлежат аддитивному классу α; следовательно, их пересечение $h^{-1}(R_m \times S_n)$ является множеством того же класса.

Предшествующие рассуждения можно применить к *счетному произведению*.

Теорема 1'. *Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ — последовательность сепарабельных пространств, и пусть $z: \mathcal{T} \to \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$, т. е. отображение z представляет собой последовательность отображений $z_1, z_2, \ldots$. Для того чтобы z было отображением класса α, необходимо и достаточно, чтобы каждое из отображений z_i принадлежало классу α.*

---

[1]) Было бы интересно выяснить, существенно ли здесь предположение сепарабельности пространства.

Необходимость этого условия доказывается так же, как в предыдущем случае, ибо имеет место соотношение

$$\{z_1(t)\in G\}\equiv\{z(t)\in(G\times\mathscr{X}_2\times\mathscr{X}_3\times\ \ldots)\}.$$

Докажем его достаточность. Обозначим через R^i_m, $m=1, 2, \ldots$, базу пространства $\mathscr{X}_i$. Тогда множества вида

$$R^1_{k_1}\times R^2_{k_2}\times\ \ldots\ \times R^n_{k_n}\times\mathscr{X}_{n+1}\times\mathscr{X}_{n+2}\times\ \ldots$$

образуют базу пространства $\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\ \ldots$ (§ 16, I). Имеем

$$z^{-1}\left(R^1_{k_1}\times\ \ldots\ \times R^n_{k_n}\times\mathscr{X}_{n+1}\times\mathscr{X}_{n+2}\times\ \ldots\right)=$$
$$=z_1^{-1}\left(R^1_{k_1}\right)\cap\cdots\cap z_n^{-1}\left(R^n_{k_n}\right)\cap\mathscr{T}\cap\mathscr{T}\cap\ldots,$$

по формуле § 3, VIII (9).

Так как первые n множеств последнего пересечения принадлежат аддитивному классу α, то и все пересечение также принадлежит этому классу, что и требовалось доказать.

Пусть f_i: $\mathscr{X}_i\to\mathscr{Y}_i$, и пусть $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots)$ — переменная точка пространства $\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\ \ldots$ тогда, полагая $\mathfrak{y}(\mathfrak{z})=(f_1(\mathfrak{z}^1), f_2(\mathfrak{z}^2), \ldots)$, мы получаем отображение-произведение

$$\mathfrak{y}\colon\ \mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\ \ldots\to\mathscr{Y}_1\times\mathscr{Y}_2\times\ \ldots$$

(ср. § 3, VIII).

Теорема 2. *Пусть каждая из функций* $f_i:\mathscr{X}_i\to\mathscr{Y}_i$ *является функцией класса* α; *тогда* $\mathfrak{y}$ — *также функция класса* α. *Пусть функция* $g:\mathscr{Y}_1\times\mathscr{Y}_2\times\ \ldots\to\mathfrak{Z}$ *есть функция класса* β, *тогда функция* $g\circ\mathfrak{y}:\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\ \ldots\to\mathfrak{Z}$ *является функцией класса* $\alpha+\beta$ (пространства $\mathscr{Y}_i$ предполагаются сепарабельными).

Действительно, так как функции $\mathfrak{z}^i$ непрерывны и координаты $f_i(\mathfrak{z}^i)$ точки $\mathfrak{y}(\mathfrak{z})$ являются функциями точки $\mathfrak{z}$, принадлежащими классу α, функция $\mathfrak{y}$ также принадлежит классу α. Кроме того, отображение $g\circ\mathfrak{y}$ принадлежит классу $\alpha+\beta$.

Теорема 3. *Пусть* $f_i:\mathscr{X}_i\to\mathscr{Y}_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ — *отображение класса* α (*пространства* $\mathscr{Y}_i$ *сепарабельны*). *Тогда множество*

$$\mathfrak{Z}=\underset{\mathfrak{z}}{\mathsf{E}}\,[f_1(\mathfrak{z}^1)=f_2(\mathfrak{z}^2)=\ \ldots],\qquad \mathfrak{z}\in\prod_i\mathscr{X}_i,$$

принадлежит мультипликативному классу α *в* $\prod\limits_i\mathscr{X}_i$.

Более того, *отображение* $f^*:\mathfrak{Z}\to\mathscr{Y}$, *где* $f^*(\mathfrak{z})=f_1(\mathfrak{z}^1)$ *для* $\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z}$, *принадлежит классу* α *и*

$$f^*(\mathfrak{Z})=\bigcap_i f_i(\mathscr{X}_i).$$

Наконец, *если отображения* f_i — *гомеоморфизмы класса* (α, β), *то отображение* f^* *также является гомеоморфизмом* *класса* (α, β) (*пространства* $\mathscr{X}_i$ *предполагаются сепарабельными*).

Доказательство полностью аналогично доказательству теорем 4 и 5 из § 16, IV.

Теорема 4. *Для того чтобы характеристическая функция последовательности множеств* $A_1, A_2, \ldots$ (ср. § 3, VII) *была функцией класса* α, *необходимо и достаточно, чтобы каждое из этих множеств было двусторонним множеством класса* α.

Это утверждение следует непосредственно из теорем 1′ и I, 1.

Примеры. 1. Пусть $\mathscr{Y}$ — сепарабельное пространство, $f_1 : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{Y}$ и $f_2 : \mathscr{X}_2 \to \mathscr{Y}$ — функции класса α и $h(x_1, x_2) = |f_1(x_1) - f_2(x_2)|$. Тогда h — функция класса α. В теореме 2 нужно положить $g(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$; расстояние представляет собой непрерывную функцию.

2. Пусть f_1 и f_2 — действительные функции класса α, тогда $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $f_1 : f_2$ — функции того же класса.

VII. График отображения $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Пусть $I = \underset{x, y}{\mathrm{E}}[y = f(x)]$.

Теорема 1. *Если* f — *функция класса* α, *то* I — *множество мультипликативного класса* α.

В случае, когда $\mathscr{Y}$ — сепарабельное пространство, теорема представляет собой частный случай теоремы VI, 3, где $\mathscr{X}_1 = \mathscr{Y}$, $\mathscr{X}_2 = \mathscr{X}$, f_1 — тождественное отображение, $f_2 = f$ $(i = 1, 2)$.

Приведем более прямое доказательство, основанное на другой идее. Рассмотрим функцию $h(x, y) = |y - f(x)|$. Очевидно, что

$$I = \underset{x, y}{\mathrm{E}}[h(x, y) = 0] = h^{-1}(0)$$

(где 0 означает число нуль). Так как h — функция класса α (см. VI, пример 1), то $h^{-1}(0)$ — множество мультипликативного класса α [1]).

В случае, когда $\mathscr{Y}$ — произвольное метрическое пространство, при доказательстве мы будем опираться на вспомогательную теорему из п. V (см. Монтгомери [1]).

В этой теореме заменим пространство $\mathscr{X}$ пространством $\mathscr{Y}$, а в качестве множества G_ξ возьмем открытый шар с центром в точке p_ξ

---

[1]) См. Хаусдорф [5]. Случай действительной функции см. в работе Серпинского [9].

Для общего случая в заметке Куратовского [16] дано другое доказательство, основанное на следующей формуле „разделения переменных“:

$$(y \neq y') \equiv \bigvee_n (y \in \mathscr{Y} - R_n) \wedge (y' \in R_n),$$

где $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства.

радиуса $1/n$ (при фиксированном n). Обозначим, как в доказательстве теоремы V, 2, через $w_n(y)$ функцию $w(y)$, определенную равенством V (1). Из неравенства V (3) следует соотношение эквивалентности

$$[a=b] \equiv \bigwedge_n |w_n(a)-b| \leqslant \frac{1}{n},$$

откуда

$$[y=f(x)] \equiv \bigwedge_n |w_n(y)-f(x)| \leqslant \frac{1}{n},$$

и, следовательно,

$$I = \underset{x,\,y}{\mathrm{E}}[y=f(x)] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underset{x,\,y}{\mathrm{E}}\left[|w_n(y)-f(x)| \leqslant \frac{1}{n}\right]. \tag{1}$$

Положим в вспомогательной теореме

$$\varphi(x,\ y) \equiv \left[|y-f(x)| \leqslant \frac{1}{n}\right]. \tag{2}$$

Так как множество $\underset{x}{\mathrm{E}}\,\varphi(x,\ y)$ для любого y принадлежит мультипликативному классу α (поскольку f — функция класса α) и так как мультипликативный класс $\alpha>0$ является инвариантом $\mathcal{M}$-операции (согласно § 30, X, 3) и прямого умножения на пространство $\mathcal{Y}$, то отсюда следует, что $\underset{x,\,y}{\mathrm{E}}\,\varphi[x,\ w_n(y)]$ — множество мультипликативного класса α.

Согласно (1) и (2), множество I также принадлежит мультипликативному классу α.

Разумеется, если $\alpha=0$, т. е. если функция f непрерывна, то множество I замкнуто (согласно § 15, V, 2). Если $\alpha=1$, I есть G_δ-множество. Однако обратные утверждения не имеют места.

Теорема 2. *Если f — функция класса α и A — множество класса β в пространстве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, то проекция P множества $I\cap A$ на ось $\mathcal{X}$ есть множество класса $\alpha+\beta$, мультипликативного или аддитивного, в зависимости от того, какому классу принадлежит A (пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ предполагаются сепарабельными).*

Пусть $h(x)=(x,f(x))$. Тогда h — функция класса α (согласно VI, 1), и поэтому множество $P=h^{-1}(A)$ принадлежит классу $\alpha+\beta$ (согласно III, 1).

VIII. Предел функций[1]).

Теорема 1. *Предел сходящейся последовательности функций класса α есть функция класса $\alpha+1$.*

---

[1]) См. Хаусдорф [5].

Положим $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Согласно V (iv),

$$\{f(x)\in F\}\equiv\bigwedge_n\bigvee_k\{f_{n+k}(x)\in B_n\},$$

откуда

$$f^{-1}(F)=\mathop{\mathsf{E}}_x[f(x)\in F]=\bigcap_n\bigcup_k\mathop{\mathsf{E}}_x[f_{n+k}(x)\in B_n]=\bigcap_n\bigcup_k f_{n+k}^{-1}(B_n).$$

Но f_n — функции класса α, поэтому множество $f_{n+k}^{-1}(B_n)$ есть множество аддитивного класса α и, следовательно, $f^{-1}(F)$ есть множество мультипликативного класса $\alpha+1$, что и требовалось доказать.

В частности, предел последовательности непрерывных функций есть функция первого класса. Предел последовательности функций конечных классов есть функция класса $\omega+1$.

Теорема 2. *Предел равномерно сходящейся последовательности функций класса α есть функция класса α.*

Действительно, так как сходимость равномерна, существует последовательность целых (возрастающих) чисел m_n, таких, что $|f(x)-f_{m_n+k}(x)|<1/n$ для любой точки x и любого $k\geqslant 0$. Покажем, что отсюда вытекает соотношение эквивалентности

$$\{f(x)\in F\}\equiv\bigwedge_n\bigwedge_k\{f_{m_n+k}(x)\in\overline{B}_n\}.$$

Положим, для сокращения записи, $y=f(x)$ и $y_n=f_n(x)$. Предположим, что $y\in F$; тогда $y_{m_n+k}\in\overline{B}_n$ для любых n и k, так как $|y-y_{m_n+k}|<1/n$. Обратно, если предположить, что правая часть равенства имеет место, то $y_{m_n}\in\overline{B}_n$ для любого n, откуда $\rho(y_{m_n}, F)\leqslant 1/n$, и так как $\rho(y, F)$ — непрерывная функция аргумента y (§ 21, IV (5)), то из равенства $y=\lim_{n\to\infty} y_{m_n}$ вытекает, что $\rho(y, F)=0$ и, следовательно, $y\in F$.

Итак,

$$f^{-1}(F)=\bigcap_n\bigcap_k f_{m_n+k}^{-1}(\overline{B}_n),$$

и поскольку $f_{m_n+k}^{-1}(\overline{B}_n)$ — множество мультипликативного класса α, то и $f^{-1}(F)$ — множество мультипликативного класса α. Следовательно, f — функция класса α.

В частности, предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция (см. § 21, X, теорема 2′). Предел равномерно сходящейся последовательности функций конечных (возрастающих) классов есть функция класса ω.

Замечание. Равномерная сходимость никоим образом не является необходимым условием того, чтобы функция $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ была функцией класса α. Имеется следующее необходимое и достаточное условие (пространство $\mathcal{Y}$ предполагается сепарабельным): *для любого* $\varepsilon>0$ *существует сколь угодно большой индекс* n, *такой, что множество* $\mathop{\mathrm{E}}\limits_x \{|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\}$ *принадлежит аддитивному классу* α[1]).

Это необходимое условие, ибо функция

$$\varphi_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$$

есть функция класса α, согласно VI, пример 1. Оно является также достаточным. В самом деле, из этого условия вытекает (при фиксированном ε) существование последовательности возрастающих целых чисел $k_1<k_2<\ldots$, таких, что множества $E_n=\mathop{\mathrm{E}}\limits_x \{|f(x)-f_{k_n}(x)|<\varepsilon\}$ принадлежат аддитивному классу α.

Но последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится, поэтому $\mathcal{X}=\bigcup\limits_i E_i$, и так как каждая из функций f_{k_n} есть функция класса α, то, согласно II, 3, существует двойная последовательность множеств Z_i^n аддитивного класса α, таких, что

$$\mathcal{X}=\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i^n=\bigcup_{n,\ i=1}^{\infty}(E_n\cap Z_i^n) \quad \text{и} \quad \delta\left[f_{k_n}(Z_i^n)\right]<\varepsilon.$$

Так как множества $E_n\cap Z_i^n$ принадлежат аддитивному классу α, то достаточно (в силу той же теоремы 3, п. II) показать, что $\delta\left[f\left(E_n\cap Z_i^n\right)\right]\leqslant 3\varepsilon$.

Пусть x_1 и $x_2\in E_n\cap Z_i^n$. Тогда

$$|f(x_1)-f_{k_n}(x_1)|<\varepsilon,\ |f(x_2)-f_{k_n}(x_2)|<\varepsilon \text{ и } |f_{k_n}(x_1)-f_{k_n}(x_2)|<\varepsilon,$$

откуда $|f(x_1)-f(x_2)|<3\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{Y}$ — сепарабельное пространство. Любая функция f класса $\alpha>0$ есть предел равномерно сходящейся*

---

[1]) Это условие принадлежит Шпильрайну-Марчевскому (см. Гагаев [1]). Что касается других необходимых и достаточных условий, см. цит. раб. и Хан [2], стр. 309.

последовательности функций f_n класса α, таких, что все множества $f_n(\mathscr{X})$ дискретны[1].

Более того, *можно предположить, что множества $f_n(\mathscr{X})$ конечны, если пространство $\mathscr{Y}$ вполне ограничено.*

Пусть пространство $\mathscr{Y}$ сепарабельно (соответственно вполне ограничено), тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует дискретное множество (соответственно конечное множество) I, такое, что любая точка этого пространства расположена на расстоянии $< \varepsilon$ от некоторой точки множества I (см. § 21, VIII, 1 и замечание 1).

Расположим множество I в последовательность (конечную или бесконечную) различных элементов: $y_1, y_2, \ldots$. Положим

$$A_k = \mathop{\mathsf{E}}_x \{|f(x) - y_k| \leqslant \varepsilon\}, \qquad B_k = \mathop{\mathsf{E}}_x \{|f(x) - y_k| \geqslant 2\varepsilon\}.$$

Так как A_k и B_k — непересекающиеся множества мультипликативного класса α, то существуют, согласно теореме отделимости (§ 30, VII, 2), двусторонние множества F_k класса α, такие, что $A_k \subset F_k$ и $F_k \cap B = 0$. Согласно определению множества I, имеем

$$\mathscr{X} = \bigcup_i A_i, \quad \text{откуда} \quad \mathscr{X} = \bigcup_i F_i.$$

Функция g, определенная следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} y_1 & \text{для} \quad x \in F_1, \\ y_k & \text{для} \quad x \in F_k - (F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1}), \end{cases}$$

есть функция класса α.

Это следует из того, что множество $g^{-1}(y_k)$, совпадающее с множеством $F_k - (F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1})$, принадлежит аддитивному классу α (даже является двусторонним множеством класса α); так как значения функции g образуют счетное множество, то $g^{-1}(G)$ есть множество аддитивного класса α, каково бы ни было G.

Более того, для любой точки x имеет место неравенство $|f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$, ибо из равенства $g(x) = y_k$ следует включение $x \in F_k \subset \mathscr{X} - B_k$.

Положим функции f_n равными функции g при ε, равном $1/n$.

Следующие две теоремы служат для доказательства теоремы 6 (частным случаем которой является первая теорема)[2].

Теорема 4. *Любая функция f класса $\alpha > 1$, принимающая только конечное число значений, есть предел последователь-*

[1]) Что касается случая действительных функций, см. Валле-Пуссен [1], Кемписти [1], Серпинский [19]. Общий случай см. в работе Банаха [7], стр. 287.

[2]) По поводу утверждений, которые сформулированы ниже, в п. VIII, см. Банах [7], стр. 283.

ности функций f_n классов $<\alpha$, принимающих только значения из области значений функции f.

Более того, *если $\alpha=\lambda+1$, где λ — предельное число, то f_n — функции классов $<\lambda$.*

В самом деле, пусть $\{y_1, \ldots, y_k\}$ — множество значений функции f. Следовательно, $A_i=f^{-1}(y_i)$ — двустороннее множество класса α. Согласно § 30, IX, 1 и 2,

$$A_i=\operatorname*{Limes}_{n\to\infty} A_{in}, \tag{1}$$

где A_{in} — двустороннее множество класса $<\alpha$, соответственно класса $<\lambda$. Положим

$$F_{1n}=A_{1n},\ F_{2n}=A_{2n}-A_{1n},\ \ldots,\ F_{kn}=A_{kn}-(A_{1n}\cup\ldots\cup A_{k-1,\,n}).$$

Так как при фиксированном n эти множества не пересекаются и являются множествами мультипликативных классов $<\alpha$ (соответственно $<\lambda$), то, согласно IV, 4, существует определенная на пространстве $\mathscr{X}$ функция f_n класса $<\alpha$ (соответственно $<\lambda$), принимающая только значения $y_1, \ldots, y_k$, такая, что $f_n(x)=y_i$ для $x\in F_{in}$.

Тогда имеет место соотношение $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Действительно, пусть x_0 — фиксированная точка. Так как $\mathscr{X}=\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, положим $x_0\in A_i$ для некоторого i, т. е. $f(x_0)=y_i$. Поскольку $x_0\notin A_l$ при $l\neq i$, из (1) следует, что при достаточно большом n

$$x_0\in A_{in} \quad \text{и} \quad x_0\notin A_{ln},$$

поэтому

$$x_0\in F_{in}, \quad \text{откуда} \quad f_n(x_0)=y_i=f(x_0).$$

Теорема 5. *Пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, $n=1, 2, \ldots,$ — две последовательности функций классов $<\alpha$, каждая из которых принимает только конечное число значений, и пусть*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x). \tag{2}$$

Тогда существует последовательность функций $\{h_n\}$ классов $<\alpha$, каждая из которых принимает только конечное число значений, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x)=g(x) \quad \text{и} \quad |h_n(x)-f_n(x)|\leqslant c, \tag{3}$$

где c удовлетворяет неравенству $\sup\limits_{x\in\mathscr{X}}|f(x)-g(x)|<c$ ($\mathscr{Y}$ — сепарабельное пространство).

Так как функция $|g_n(x)-f_n(x)|$ есть функция класса $<\alpha$ (п. VI, пример 1) и принимает при каждом фиксированном n только конечное число значений, то множество A_n точек x, таких, что $|g_n(x)-f_n(x)|\leqslant c$, есть двустороннее множество класса $<\alpha$ (см. II, 2). Положим

$$h_n(x)=\begin{cases} g_n(x) & \text{для} \quad x\in A_n, \\ f_n(x) & \text{для} \quad x\in \mathscr{X}-A_n. \end{cases}$$

Тогда h_n есть функция класса $<\alpha$ (согласно IV, 2). В силу определения функции h_n, выполняются соотношения (3). Действительно, пусть x_0 — фиксированная точка, тогда, в силу (2), для достаточно больших n имеем

$$|g_n(x_0)-f_n(x_0)|\leqslant c,$$

откуда

$$x_0\in A_n \quad \text{и} \quad h_n(x_0)=g_n(x_0).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_0)=g(x_0)$.

Теорема 6. *Пусть пространство $\mathscr{Y}$ сепарабельно; любая функция f класса $\alpha>1$ является пределом последовательности функций классов $<\alpha$.*

Более того, *если $\alpha=\lambda+1$, где λ — предельное число, то эти функции принадлежат классам $<\lambda$.*

Если $\mathscr{Y}$ — метрическое сепарабельное пространство, то можно считать, что оно вполне ограничено (см. § 22, II, следствие 1а). Поэтому, в силу теоремы 3, имеем

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x),$$

где $f_1, f_2, \ldots$ — функции класса α, принимающие только конечное число значений, и сходимость равномерная. Можно допустить, что

$$(4) \qquad |f_{m+1}(x)-f_m(x)|<\frac{1}{2^m},$$

заменяя в случае необходимости последовательность $\{f_m\}$ некоторой подпоследовательностью.

Согласно теореме 4,

$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty} f_{mn}(x),$$

где f_{mn} — функции класса $<\alpha$ (соответственно $<\lambda$), принимающие только конечное число значений. Определим по индукции (относительно m) двойную последовательность функций h_{mn} классов $<\alpha$ (соответственно $<\lambda$), каждая из которых принимает только конечное число значений, такую, что

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} h_{mn}(x) = f_m(x)$ и $|h_{m+1,n} - h_{mn}(x)| \leqslant \frac{1}{2^m}$.

Положим $h_{1n}(x) = f_{1n}(x)$. Предположим, что последовательность $h_{m1}, h_{m2}, \ldots$ определена; существование последовательности $h_{m+1,1}$, $h_{m+1,2}, \ldots$, удовлетворяющей требуемым условиям, вытекает из теоремы 5, если заменить в ней функции f на f_m, f_n на h_{mn}, g на f_{m+1}, g_n на $f_{m+1,n}$ и константу c на $1/2^m$. Покажем, что

(6) $$\lim_{n\to\infty} h_{nn}(x) = f(x);$$

это завершит доказательство теоремы 6.

Пусть заданы точка x_0 и $\varepsilon > 0$. Пусть m — целое число, такое, что $1/2^{m-1} < \varepsilon$ и

(7) $$|f_m(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть, наконец, $n_0 > m$ — целое число, такое, что

(8) $$|h_{mn}(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

Тогда при $n > n_0$, в силу (5), (8) и (7), имеем

$$|h_{nn}(x_0) - f(x_0)| \leqslant \{|h_{nn}(x_0) - h_{n-1,n}(x_0)| + \ldots$$
$$\ldots + |h_{m+1,n}(x_0) - h_{mn}(x_0)|\} + |h_{mn}(x_0) - f_m(x_0)| +$$
$$+ |f_m(x_0) - f(x_0)| < \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon,$$

откуда следует равенство (6).

Замечание. Теорема 6 при $\alpha = 1$, вообще говоря, неверна. Так, например, если пространство $\mathcal{Y}$ состоит из двух элементов 0 и 1, то характеристическая функция одной точки пространства $\mathcal{X}$ действительных чисел есть функция класса 1, хотя никакая последовательность непрерывных функций (значения которых принадлежат пространству $\mathcal{Y}$) не сходится к этой функции.

Между тем эта теорема остается в силе при $\alpha = 1$ в следующих двух важных частных случаях:

1° когда пространство (сепарабельное) $\mathcal{X}$ нульмерно;

2° когда $\mathcal{Y} = \mathcal{J}$, $\mathcal{E}$ или $\mathcal{Y} = \mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \leqslant \aleph_0$).

Действительно, в случае, когда $\dim \mathcal{X} = 0$, утверждение 3 верно для $\alpha = 0$, а утверждение 4 верно для $\alpha = 1$. Что касается случая 2°, то имеет место следующая

Теорема 7. *Если $\mathcal{Y} = \mathcal{J}$ (или даже $\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \leqslant \aleph_0$), то любая функция первого класса является пределом некоторой последовательности непрерывных функций.*

Достаточно (в силу § 20, IV, 1) ограничиться случаем, когда пространство $\mathcal{Y}$ представляет собой интервал. В этом предположении рассмотрим сначала случай, когда функция f принимает только *конечное* число значений: $y_1, \ldots, y_k$. Множество $f^{-1}(y_i)$ есть множество типа F_σ. Положим

$$(9)\qquad A_i = f^{-1}(y_i) = F_{i1} \cup F_{i2} \cup \ldots, \qquad F_{in} \subset F_{i,\, n+1}, \qquad F_{in} = \bar{F}_{in}.$$

В силу теоремы Титце (§ 14, IV), для каждого n существует непрерывная функция f_n, определенная на пространстве $\mathcal{X}$, такая, что $f_n(x) = y_i$ при $x \in F_{in}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и, кроме того, значения функций f_n не выходят за пределы нижней и верхней граней функции f.

Тогда имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. В самом деле, пусть x_0—фиксированная точка. Так как $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, то для некоторого i имеем $x_0 \in A_i$. Согласно (9), при достаточно больших n справедливо включение $x_0 \in F_{in}$, откуда $f_n(x_0) = y_i$, т. е. $f_n(x_0) = f(x_0)$.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть $\{f_m\}$ — некоторая последовательность функций класса 1, равномерно сходящаяся к функции f, каждая из которых принимает только конечное число значений (теорема 3). Без ограничения общности можно считать, что неравенство (4) имеет место и что $f_0(x) = 0$.

Так как разность $f_m(x) - f_{m-1}(x)$ является функцией первого класса (см. VI, пример 2), то, как мы только что доказали, существует двойная последовательность непрерывных функций g_{mn}, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} g_{mn}(x) = f_m(x) - f_{m-1}(x) \quad \text{и} \quad |g_{mn}(x)| \leqslant \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Положим $h_{mn}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{in}(x)$. Так как соотношения (5) выполняются, то равенство (6) доказывается так же, как в случае теоремы 6.

IX. Аналитическое представление. Семейство функций, *представимых аналитически*, есть, по определению (см. Бэр [1]), наименьшее семейство функций, содержащее

1) все непрерывные функции,

2) пределы сходящихся последовательностей принадлежащих ему функций.

Такое семейство функций распадается на классы Φ_α, где $\alpha < \Omega$, следующим образом:

1° класс Φ_0 состоит из непрерывных функций;

2° класс Φ_α $(\alpha > 0)$ состоит из функций, представляющих собой пределы сходящихся последовательностей функций классов Φ_ξ, $\xi < \alpha$.

Теорема Лебега — Хаусдорфа[1]). *Пусть* $\mathcal{Y}$ — *интервал* $\mathcal{J}$ (*или, более общим образом,* $\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$, *где* $\mathfrak{m} \leqslant \aleph_0$); *тогда класс* Φ_α *совпадает с семейством B-измеримых функций класса* α, *соответственно класса* $\alpha+1$, *в зависимости от того, конечно или бесконечно* α[2]).

Для доказательства теоремы применим индукцию. Утверждение очевидно при $\alpha=0$; допустим, что оно верно для любого $\xi<\alpha$.

Согласно VIII, 7 и 1, класс Φ_1 совпадает с множеством функций первого класса.

Согласно VIII, 6 и 1, множество функций (конечного) класса $n+1$ совпадает с множеством пределов сходящихся последовательностей функций класса n, следовательно (если положить $\alpha=n+1$), класса Φ_n; это множество совпадает с классом Φ_{n+1} (согласно 2°).

Теорема доказана для $\alpha<\omega$; допустим, что $\alpha=\lambda$, где λ — предельное число.

Любая функция $f \in \Phi_\lambda$ имеет вид

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x), \quad \text{где} \quad f_m \in \Phi_{\xi_m} \text{ и } \xi_m<\lambda.$$

По предположению, f_m есть B-измеримая функция класса ξ_m+1, следовательно, класса λ, откуда, в силу теоремы VIII, 1, f есть функция класса $\lambda+1$.

Обратно, если f — функция класса $\lambda+1$, то, согласно VIII, 6,

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x), \quad \text{где} \quad f_m \text{ — функция класса } \xi_m<\lambda.$$

Следовательно, $f_m \in \Phi_{\xi_m}$, откуда вытекает, что $f \in \Phi_\lambda$.

Таким образом, установлено совпадение класса Φ_λ с множеством B-измеримых функций класса $\lambda+1$. С помощью конечной индукции отсюда можно вывести, как и выше, совпадение класса $\Phi_{\lambda+n}$ с семейством B-измеримых функций класса $\lambda+n+1$.

Замечание. В произвольных (метрических сепарабельных) пространствах $\mathcal{Y}$ при определении аналитически представимых функций удобнее за исходную точку принимать функции *первого класса* вместо непрерывных функций. Таким образом, получается трансфинитная последовательность $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \ldots, \Phi_\alpha^*, \ldots$ $(\alpha<\Omega)$, где Φ_1^* — семейство B-измеримых функций класса 1, а классы Φ_α^* для $\alpha>1$ определены, как выше, условием 2°.

Доказательство, полностью аналогичное предыдущему, позволяет установить следующее предложение:

[1]) См. Лебег [1], Хаусдорф [5], гл. 9.

[2]) Обратно, класс α B-измеримых функций совпадает с классом $\Phi_{\alpha-1}$, если α бесконечно и не является предельным числом. См. Хаусдорф [5].

Теорема Банаха [7]. *Для каждого сепарабельного пространства $\mathcal{Y}$ класс Φ_α^*, $1 \leqslant \alpha < \Omega$, совпадает с семейством B-измеримых функций класса α, соответственно класса $\alpha+1$, в зависимости от того, конечно или бесконечно α.*

X. Теоремы Бэра о функциях первого класса[1]. Напомним сначала, что если $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, то множество D точек разрыва функции f представимо в виде

$$(1)\qquad D = \bigcup_G \left\{ f^{-1}(G) - \operatorname{Int}[f^{-1}(G)] \right\} = \bigcup_F \left\{ \overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F) \right\},$$

где G пробегает семейство открытых множеств, а F — семейство замкнутых множеств пространства $\mathcal{Y}$ (см. § 13, III (3)).

Если пространство $\mathcal{Y}$ *сепарабельно*, то формулу (1) можно заменить формулой с счетным суммированием (см. § 13, III (4)):

$$(2)\qquad D = \bigcup_n \left\{ f^{-1}(R_n) - \operatorname{Int}[f^{-1}(R_n)] \right\} = \bigcup_n \left\{ \overline{f^{-1}(S_n)} - f^{-1}(S_n) \right\},$$

где $S_n = \mathcal{Y} - R_n$ и $R_1, R_2, \ldots$ — открытая база пространства $\mathcal{Y}$.

Теорема 1. *Множество D точек разрыва B-измеримой функции первого класса есть множество первой категории (пространство $\mathcal{Y}$ предполагается сепарабельным).*

В самом деле, так как множество S_n в формуле (2) замкнуто, то по условию теоремы множество $f^{-1}(S_n)$ есть множество типа G_δ. Следовательно, множество $\overline{f^{-1}(S_n)} - f^{-1}(S_n)$ есть множество типа F_σ; как множество вида $\overline{X} - X$, оно является граничным множеством (§ 8, IV), следовательно, множеством первой категории (§ 10, II). Поэтому множество D, как объединение множеств первой категории, также является множеством первой категории.

Следствие 1a. *Пусть f — функция первого класса и A — произвольное подмножество пространства $\mathcal{X}$. Тогда множество точек разрыва сужения $f|A$ есть множество первой категории относительно A (пространство $\mathcal{Y}$ предполагается сепарабельным).*

Теорема 2. *Функция, точечно-разрывная на любом замкнутом множестве, является B-измеримой функцией первого класса.*

---

[1]) См. Бэр [1]. Функции первого класса играют большую роль в приложениях; таковы, например, полунепрерывные функции, монотонные функции (более общо — функции с ограниченной вариацией), производные функции. Эти функции будут применяться также при изучении компактных пространств в гл. 4, т. 2.

Действительно, пусть F — произвольное замкнутое подмножество пространства $\mathcal{Y}$. Докажем, что множество $f^{-1}(F)$ есть G_δ-множество. Положим

$$\mathcal{Y}-F=F_1\cup F_2\cup\ldots,\quad \text{где}\quad \bar{F}_n=F_n.$$

К паре множеств $f^{-1}(F)$ и $f^{-1}(F_n)$ (для фиксированного n) применим теорему 1° из § 12, III, согласно которой, если E и H — два множества, такие, что соотношение $X=\overline{(X\cap E)}\cap\overline{(X\cap H)}$ имеет место только при $X=0$, то существует разложимое множество D, которое (в силу теоремы 5, § 30, X) является G_δ-множеством, удовлетворяющим следующим условиям: $E\subset D$ и $H\cap D=0$.

Пусть теперь $X=\overline{X\cap f^{-1}(F)}\cap\overline{X\cap f^{-1}(F_n)}$. Допустим, от противного, что $X\neq 0$. Так как множество X замкнуто, то, по условию теоремы, существует точка p, в которой сужение $g=f|X$ непрерывно. Тогда (см. § 3, III (14))

$$p\in X\subset\overline{X\cap f^{-1}(F)}=\overline{g^{-1}(F)},$$

откуда $g(p)\in\overline{gg^{-1}(F)}$, в силу непрерывности функции g. Следовательно, $f(p)\in F$, поскольку

$$g(p)=f(p)\quad \text{и}\quad \overline{gg^{-1}(F)}\subset\bar{F}=F.$$

Аналогичным образом, из включения $X\subset\overline{X\cap f^{-1}(F_n)}$ следует, что $f(p)\in F_n$. Но это невозможно, ибо $F\cap F_n=0$. Итак, $X=0$. Следовательно, для любого n существует G_δ-множество D_n, такое, что

$$f^{-1}(F)\subset D_n\subset\mathcal{X}-f^{-1}(F_n).$$

Тогда

$$f^{-1}(F)\subset\bigcap_n D_n\subset\bigcap_n[\mathcal{X}-f^{-1}(F_n)]=\mathcal{X}-\bigcup_n f^{-1}(F_n)=$$

$$=\mathcal{X}-f^{-1}\left(\bigcup_n F_n\right)=\mathcal{X}-f^{-1}(\mathcal{Y}-F)=\mathcal{X}-[\mathcal{X}-f^{-1}(F)]=f^{-1}(F),$$

откуда $f^{-1}(F)=\bigcap_n D_n$, и поскольку каждое из множеств D_n есть G_δ-множество, то и множество $f^{-1}(F)$ является G_δ-множеством.

Замечания. 1. Точечная разрывность функции f на любом замкнутом множестве эквивалентна *существованию точки непрерывности сужения $f|A$ на любом замкнутом непустом множестве A*.

В самом деле, это есть не что иное, как последнее условие, использованное при доказательстве теоремы 2.

2. В теореме 2 вместо *замкнутых* множеств можно было рассматривать *совершенные*. Это возможно, так как каждая изолированная точка является точкой непрерывности.

Отсюда вытекает (см. § 9, V, 5), что если множество точек разрыва некоторой функции является *разреженным* (в частности, если оно *конечное*), то это функция первого класса.

3. Для полных пространств (см. § 34, VII) утверждение теоремы 1 *эквивалентно* условию теоремы 2, так что каждое из них *характеризует* функции первого класса. Между тем в неполных пространствах первое условие не является достаточным (если допустить гипотезу континуума $\aleph_1 = \mathfrak{c}$), а второе не является необходимым для того, чтобы функция была функцией первого класса.

В самом деле, с одной стороны, существует (см. § 40, IV) сепарабельное пространство E мощности $\aleph_1$, такое, что каждая функция, определенная на пространстве E, удовлетворяет условию следствия. Так как семейство действительных функций, определенных на пространстве E, имеет мощность $\mathfrak{c}^{\aleph_1}$, а семейство B-измеримых функций имеет мощность $\mathfrak{c}$ (см. п. I), то из неравенства $\mathfrak{c} < \mathfrak{c}^{\aleph_1}$ (которое следует из гипотезы континуума) вытекает существование не B-измеримых функций, удовлетворяющих условию следствия.

С другой стороны, характеристическая функция множества типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и $\boldsymbol{G}_\delta$, не разложимого в знакочередующийся ряд замкнутых убывающих множеств (таково, например, плотное и граничное множество в пространстве рациональных чисел, см. § 24, III, замечание 2), есть функция первого класса (п. I), но она не удовлетворяет условию теоремы 2 (см. § 13, VI, следствие).

4. Любая функция f первого класса является *эффективно* функцией первого класса (в смысле § 23, VIII).

В самом деле, доказательство теоремы 2 позволяет *определить* для любого замкнутого множества $F \subset \mathcal{Y}$ последовательность открытых множеств $G_n \subset \mathcal{X}$ таким образом, что $f^{-1}(F) = G_1 \cap G_2 \cap \ldots$ (ибо любое разложимое множество D *эффективно* является $\boldsymbol{G}_\delta$-множеством, см. § 24, III, замечание 1).

Оно позволяет также в случае, когда значения функции f действительные, *определить* последовательность непрерывных функций, сходящуюся к функции f (так что функция f является *эффективно* аналитически представимой функцией первого класса)[1]).

5. *В теореме* 1 *термин «B-измеримая функция» можно заменить термином «аналитически представимая функция», и тогда можно опустить предположение сепарабельности пространства* $\mathcal{Y}$ (см. Куратовский [8a]).

Видоизмененная таким образом теорема 1 является более общей, чем данная в тексте, потому что в сепарабельных пространствах $\mathcal{Y}$

[1]) Если воспользоваться, например, процессом, описанным Хаусдорфом [5], гл. 9. См. также Валле-Пуссен [1] и Куратовский [6], где дано решение этой задачи без использования трансфинитных чисел.

любая B-измеримая функция первого класса становится аналитически представимой функцией первого класса, если погрузить пространство $\mathcal{Y}$ в гильбертово пространство.

Чтобы доказать видоизмененную теорему 1, положим

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \tag{3}$$

где функции f_n непрерывны. Обозначим через D множество точек разрыва функции f и через $\omega(x)$ — колебание функции f в точке x. Пусть $E(\varepsilon)$ — множество точек x, таких, что $\omega(x) \geqslant \varepsilon$. Поскольку

$$D = E(1) \cup E\left(\frac{1}{2}\right) \cup E\left(\frac{1}{3}\right) \cup \ldots,$$

достаточно показать, что $E(\varepsilon)$ есть множество первой категории для любого $\varepsilon > 0$. Для фиксированного ε положим $E = E(\varepsilon)$. Пусть A_k — множество таких точек x, что

$$|f_m(x) - f_k(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{для любого } m > k. \tag{4}$$

Так как функции $f_1, f_2, \ldots$ непрерывны, то $A_k = \overline{A_k}$. Следовательно, множество $\mathrm{Fr}(A_k)$ нигде не плотно. С другой стороны, так как последовательность $f_1, f_2, \ldots$ сходится, то

$$\mathcal{X} = \bigcup_i A_i, \quad \text{откуда} \quad E = \bigcup_i (E \cap A_i).$$

Остается показать, что

$$E \cap A_k \subset \mathrm{Fr}(A_k), \quad \text{т. е. что} \quad E \cap \mathrm{Int}(A_k) = 0.$$

Пусть $x \in \mathrm{Int}(A_k)$. Так как функции f_k непрерывны, то существует открытое множество G, такое, что

$$x \in G \subset A_k \quad \text{и} \quad \delta[f_k(G)] < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Пусть $x', x'' \in G$. Согласно (3) — (5), имеем

$$|f(x') - f_k(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f(x'') - f_k(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|f_k(x') - f_k(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

откуда $|f(x') - f(x'')| \leqslant 3\varepsilon/4$, следовательно, $\delta[f(G)] < \varepsilon$. Поэтому $\omega(x) < \varepsilon$ и $x \notin E$.

6. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — два $\mathcal{T}_1$-пространства, f — функция, точечно-разрывная на любом замкнутом множестве*[1]), *и F* —

[1]) В полном пространстве $\mathcal{X}$ эти преобразования совпадают с преобразованиями первого класса (см. § 34, VII).

открыто-замкнутое множество в пространстве $\mathcal{Y}$. Тогда множество $f^{-1}(F)$ разложимо.

В соответствии с § 12, V, I, достаточно доказать, что для любого замкнутого множества X из равенства $X = \overline{X \cap f^{-1}(F)} \cap \overline{X - f^{-1}(F)}$ следует, что $X = 0$. Доказательство равенства $X = 0$ полностью аналогично соответствующей части доказательства теоремы 2 (если заменить F_n множеством $\mathcal{Y} - F$).

7. *Сепарабельность пространства инвариантна относительно отображений f, точечно-разрывных на всяком G_δ-множестве.*

Действительно, пусть пространство $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ несепарабельно. Тогда оно содержит (в силу § 21, VIII, замечания 1) замкнутое дискретное множество мощности $\aleph_1$:

$$\mathcal{Y}^* = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\xi,\ \ldots), \quad \text{где } \xi < \Omega.$$

Положим $\mathcal{X}^* = f^{-1}(\mathcal{Y}^*)$ и $F_\xi = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\xi)$. Так как f, в силу теоремы 2, является функцией первого класса, то $\mathcal{X}^*$ — множество типа G_δ. По условию теоремы, сужение $g = f | \mathcal{X}^*$ точечно-разрывно на любом замкнутом множестве (а также на любом G_δ-множестве) пространства $\mathcal{X}^*$.

Так как множество F_ξ открыто-замкнуто в пространстве $\mathcal{Y}^*$, то из замечания 6 вытекает, что множество $A_\xi = g^{-1}(F_\xi)$ разложимо в ряд замкнутых множеств в пространстве $\mathcal{X}^*$. Варьируя индекс ξ, мы получаем, таким образом, вполне упорядоченное несчетное семейство множеств A_ξ, разложимых и возрастающих.

Тогда, согласно теореме 2 из § 24, III, пространство $\mathcal{X}^*$ несепарабельно и, следовательно, пространство $\mathcal{X}$ несепарабельно.

8. Принимая гипотезу континуума, мы приходим к следующей более общей теореме:

Сепарабельность пространства инвариантна относительно В-измеримых отображений.

Предположим, что пространство $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ несепарабельно, рассмотрим изолированное множество $\mathcal{Y}^*$ из предыдущего доказательства и поставим в соответствие любому ξ точку x_ξ, такую, что $f(x_\xi) = y_\xi$. Так как множество $A = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\xi,\ \ldots)$ несчетно, то его мощность равна $\mathfrak{c}$, в силу гипотезы континуума. Так как пространство $\mathcal{X}$ сепарабельно, то множество A содержит подмножество E, неборелевское в A (см. § 30, III). Положим

$$E = \left(x_{\xi_1},\ x_{\xi_2},\ \ldots,\ x_{\xi_\gamma},\ \ldots\right) \quad \text{и} \quad F = \left(y_{\xi_1},\ y_{\xi_2},\ \ldots,\ y_{\xi_\gamma},\ \ldots\right).$$

Так как функция $g = f | A$ является В-измеримой, а множество F замкнуто в пространстве $\mathcal{Y}^*$ (поскольку оно дискретно), то множество

$E = g^{-1}(F)$ — борелевское. Итак, мы пришли к требуемому противоречию.

9. *Любая функция, определенная на счетном пространстве, есть функция первого класса.*

Это следует из того, что любое подмножество счетного пространства есть F_σ-множество.

*§ 32. Функции, обладающие свойством Бэра

I. Определение. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Говорят, что *отображение f обладает свойством Бэра, если, каково бы ни было замкнутое множество $F \subset \mathscr{Y}$, множество $f^{-1}(F)$ обладает свойством Бэра.*

Принимая во внимание то, что дополнение к множеству, обладающему свойством Бэра, также обладает этим свойством, можно в определении вместо *замкнутых* множеств рассматривать *открытые.* С другой стороны, так как объединение и пересечение счетной последовательности множеств, обладающих свойством Бэра, представляют собой множества, также обладающие этим свойством (§ 11, III), мы заключаем, что *если f — функция, обладающая свойством Бэра, и X — борелевское множество, то $f^{-1}(X)$ — множество, обладающее свойством Бэра.*

Так как любое борелевское множество обладает свойством Бэра, то непосредственно из определения вытекает, что *любая B-измеримая функция обладает свойством Бэра.* Это одно из наиболее важных свойств, общих для всех B-измеримых функций, следовательно, и для всех аналитически представимых функций (см. также п. II).

Замечание. Пусть $X (\subset \mathscr{X})$ — множество, обладающее свойством Бэра. Множество $f^{-1}(X)$ может не обладать свойством Бэра даже в том случае, когда отображение f непрерывно и множество X нигде не плотно. Таков следующий пример: $\mathscr{X} = \mathscr{C}$, $\mathscr{Y} = \mathscr{I}$, $f(x) = x$ и $X (\subset \mathscr{X})$ — множество, не обладающее свойством Бэра относительно $\mathscr{X}$.

II. Необходимые и достаточные условия [1]).

Теорема. *Для того чтобы функция f обладала свойством Бэра, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество P первой категории (в пространстве $\mathscr{X}$), такое, что сужение $f | (\mathscr{X} - P)$ непрерывно* (тогда говорят, что функция f непрерывна *с точностью до множества первой категории*). Пространство $\mathscr{Y}$ предполагается сепарабельным.

Необходимость. Построим множество P первой категории, такое, что функция $g = f | (\mathscr{X} - P)$ непрерывна, т. е. множество

[1]) См. Куратовский [14], Никодим [5].

$g^{-1}(H)$ открыто в множестве $\mathscr{X}-P$, где H — произвольное открытое множество (в пространстве $\mathscr{Y}$).

Пусть $S_1, S_2, \ldots$ — база пространства $\mathscr{Y}$. Тогда $H=S_{k_1} \cup S_{k_2} \cup$ $\cup \ldots$. По условию, $f^{-1}(S_n)$ — множество, обладающее свойством Бэра. В силу определения этого свойства (§ 11, I), имеем

$$f^{-1}(S_n)=G_n-P_n \cup R_n,$$

где G_n — открытое множество, а P_n и R_n — множества первой категории. Положим

$$P=(P_1 \cup R_1) \cup (P_2 \cup R_2) \cup \ldots .$$

Из формулы $g^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P$ (§ 3, III (14)) следует, что

$$g^{-1}(H)=\bigcup_n \left[f^{-1}(S_{k_n})\right]-P=\bigcup_n \left[(G_{k_n}-P_{k_n} \cup R_{k_n})-P\right],$$

и так как $P_{k_n} \cup R_{k_n} \subset P$, то

$$(G_{k_n}-P_{k_n} \cup R_{k_n})-P=G_{k_n}-P.$$

Следовательно, $g^{-1}(H)=\left(\bigcup\limits_n G_{k_n}\right)-P$, и, поскольку множество $\bigcup\limits_n G_{k_n}$ открыто, множество $g^{-1}(H)$ открыто в $\mathscr{X}-P$.

Достаточность. Пусть P — множество первой категории, такое, что функция $g=f\,|\,(\mathscr{X}-P)$ непрерывна. Пусть H — произвольное открытое множество. Непрерывность функции g означает (§ 13, IV (3)), что множество $g^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P$ открыто в $\mathscr{X}-P$, т. е. что оно имеет вид $G-P$, где G — открытое множество (в пространстве $\mathscr{X}$). Тогда

$$(1)\quad f^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P \cup \left(f^{-1}(H) \cap P\right)=G-P \cup \left(f^{-1}(H) \cap P\right).$$

Так как множество P и, следовательно, множество $f^{-1}(H) \cap P$ являются множествами первой категории, то разложение (1) показывает, что множество $f^{-1}(H)$ обладает свойством Бэра, что и требовалось доказать.

Замечание. Сопоставляя эту теорему с выводами п. I, мы видим, что *любая B-измеримая функция, и тем более любая аналитически представимая функция, непрерывна с точностью до множества первой категории (пространство $\mathscr{Y}$ предполагается сепарабельным)* [1]).

Отсюда вытекает также *эквивалентность свойства Бэра некоторого множества и его характеристической функции.*

---

[1]) Это утверждение было доказано Бэром [2]. См. также Куратовский [8a].

III. Операции над функциями, обладающими свойством Бэра.

Теорема 1 (суперпозиция отображений). *Пусть отображение $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ обладает свойством Бэра и отображение $g:\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$ является B-измеримым; тогда отображение $h=g\circ f$ обладает свойством Бэра.*

Действительно, так как множества $h^{-1}(F)=f^{-1}[g^{-1}(F)]$ и $g^{-1}(F)$ B-измеримы, то множество $f^{-1}[g^{-1}(F)]$ обладает свойством Бэра.

Замечание. В случае, когда отображение f B-измеримо, а отображение g обладает свойством Бэра, отображение $g\circ f$ может не обладать свойством Бэра. В самом деле, рассмотрим пример п. I и обозначим через g характеристическую функцию множества X (считая его подмножеством пространства $\mathcal{Y}$).

Теорема 2. *Предел сходящейся последовательности функций, обладающих свойством Бэра, также обладает этим свойством.*

Это утверждение вытекает непосредственно из формулы (см. § 31, VIII, 1):

$$f^{-1}(F)=\bigcap_n\bigcup_k\left[f_{n+k}^{-1}(B_n)\right],$$

где B_n — шар радиуса $1/n$, имеющий в качестве центра замкнутое множество F. В самом деле, так как множество $f_{n+k}^{-1}(B_n)$ обладает свойством Бэра, то любое множество, получающееся из него с помощью счетного объединения и пересечения, обладает этим свойством.

Замечание. Пусть $\mathcal{Y}$ — сепарабельное пространство; можно доказать, что предел последовательности функций, „непрерывных с точностью до множеств первой категории", есть функция того же вида. Пусть P_n — множество первой категории, такое, что сужение $f_n|(\mathcal{X}-P_n)$ непрерывно. Положим $P=P_1\cup P_2\cup\ldots$. Тогда функция $f_n|(\mathcal{X}-P)$ непрерывна, каково бы ни было n; пусть функция f является пределом функций f_n; тогда отсюда следует, что $f|(\mathcal{X}-P)$ есть функция первого класса (на $\mathcal{X}-P$).

Так как точки разрыва функции первого класса образуют множество первой категории (§ 31, X, следствие 1a), то множество R точек разрыва функции $f|(\mathcal{X}-P)$ есть множество первой категории в $\mathcal{X}-P$ и, следовательно, во всем пространстве $\mathcal{X}$. Таким образом, функция $f|(\mathcal{X}-P-R)$ непрерывна и множество $P\cup R$ является множеством первой категории.

Теорема 3 (функции многих переменных). *Пусть функция $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ обладает свойством Бэра, положим $g(x, y)=f(x)$.*

Тогда функция g обладает свойством Бэра относительно произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Это вытекает из того, что $g^{-1}(G) = f^{-1}(G) \times \mathscr{Y}$ и свойство Бэра инвариантно относительно умножения на ось (§ 15, VII, 2a).

Замечание. Принимая во внимание эту инвариантность, мы выводим из формулы § 31, V (ii) в случае сепарабельного пространства $\mathscr{X}$ следующее утверждение:

Пусть отображение $f: \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ непрерывно относительно переменной x и обладает свойством Бэра относительно переменной y; тогда оно обладает свойством Бэра (на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$).

Если пространство несепарабельно, к тому же выводу можно прийти, опираясь, как в § 31, V, на инвариантность свойства Бэра относительно $\mathscr{M}$-операции (определенной в § 30, X).

Чтобы установить эту инвариантность, докажем сначала инвариантность свойства быть множеством первой категории.

В обозначениях § 30, X, допустим, что множества X_ξ — первой категории, и рассмотрим множества X_ξ^n, определенные формулой § 30, X (8). Так как множества X_ξ^n открыты в их объединении $S_n = \bigcup_\xi X_\xi^n$ (§ 30, X (11)), то S_n есть множество первой категории (согласно § 10, III). Следовательно, и множество $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ является множеством первой категории, что означает инвариантность свойства быть множеством первой категории относительно $\mathscr{M}$-операции.

Из этой инвариантности, а также из инвариантности свойства быть множеством типа G_δ (§ 30, X, 3) и из аддитивности $\mathscr{M}$-операции (§ 30, X, 2) непосредственно следует инвариантность свойства Бэра (так как это свойство означает, что рассматриваемое множество есть объединение множества типа G_δ и множества первой категории).

Рассуждая, как в § 31, VI, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $f: \mathscr{T} \to \prod_i \mathscr{X}_i$, где $\mathscr{X}_i$ — сепарабельное пространство. Для того чтобы отображение f обладало свойством Бэра, необходимо и достаточно, чтобы каждая из координат отображения f обладала этим свойством.*

Комбинируя теоремы 1, 3 и 4, получаем следующую теорему, аналогичную теореме 2 из § 31, VI.

Теорема 5. *Пусть каждая из функций $f_i: \mathscr{X}_i \to \mathscr{Y}_i$ обладает свойством Бэра и функция $g: \prod_i \mathscr{Y}_i \to \mathscr{Z}$ B-измерима. Тогда функция $g \circ \mathfrak{y}$ также обладает этим свойством.* Пространства $\mathscr{Y}_i$ предполагаются сепарабельными.

Следуя способу рассуждений § 31, VII, можно доказать следующую теорему:

Теорема 6. *Если f обладает свойством Бэра, то множество*

$$I = \underset{x,y}{\mathsf{E}} [y = f(x)]$$

обладает свойством Бэра.

Замечания. 1. Обратная теорема, вообще говоря, неверна график отображения f может обладать свойством Бэра, в то время как отображение f не обладает этим свойством. Мы вернемся к этому вопросу в § 40, IV.

2. Согласно § 22, VI, 3, *если $\mathcal{Y}$ — сепарабельное полтное в себе пространство, то множество I является множеством первой категории.*

IV. Функции, обладающие свойством Бэра в узком смысле. Функция f *обладает свойством Бэра в узком смысле*, если, каково бы ни было замкнутое множество F, *множество $f^{-1}(F)$ обладает свойством Бэра в узком смысле.*

Это означает, что, *каково бы ни было множество E, сужение $f|E$ обладает свойством Бэра относительно множества E*, или (в силу теоремы п. II), *что это сужение непрерывно с точностью до множеств первой категории относительно E.* Пространство $\mathcal{Y}$ предполагается сепарабельным.

Действительно, рассматриваемое условие необходимо, ибо если положить $g = f|E$, то (§ 3, III (14)) $g^{-1}(F) = E \cap f^{-1}(F)$, и так как, по предположению, множество $f^{-1}(F)$ обладает свойством Бэра в узком смысле, то множество $g^{-1}(F)$ обладает свойством Бэра относительно E. Это означает, что функция g обладает свойством Бэра (относительно множества E).

Обратно, пусть E — произвольное множество, и пусть множество $g^{-1}(F)$ обладает свойством Бэра относительно E; тогда множество $f^{-1}(F)$ обладает свойством Бэра в узком смысле. Следовательно, так как замкнутое множество $f^{-1}(F)$ произвольно, функция f также обладает этим свойством.

Разумеется, в качестве множеств E можно брать совершенные множества или замкнутые множества (см. § 11, VI).

Так как любое борелевское множество обладает свойством Бэра в узком смысле (§ 11, VI), то *любая B-измеримая функция также обладает этим свойством.* Однако существуют функции, обладающие свойством Бэра в узком смысле и не являющиеся B-измеримыми (см. § 39, II).

Теоремы 1, 2, 4 п. III можно доказать аналогичным образом для свойства Бэра в узком смысле.

Добавим еще, что свойство Бэра в узком смысле произвольного множества и его характеристической функции эквивалентны.

Замечание. Из гипотезы континуума следует, что утверждения 3, 5 и 6, в которых свойство Бэра заменено свойством Бэра в узком смысле, не верны (см. § 40, VIII).

V. Связь с мерой Лебега [1]).

Теорема. *Пусть f — действительная функция, определенная на сепарабельном пространстве $\mathscr{X}$ и обладающая свойством Бэра; тогда существует множество Z, такое, что $\mathscr{X} - Z$ есть множество первой категории и множество $f(Z)$ имеет меру нуль*: $m\{f(Z)\} = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда f — непрерывная функция. Пусть $R = (r_1, r_2, \ldots)$ — счетное множество, плотное в пространстве $\mathscr{X}$. Если f — непрерывная функция, то для любых k и n существует шар $S_{k,n}$, такой, что

$$r_k \in S_{k,n} \quad \text{и} \quad \delta[f(S_{k,n})] < \frac{1}{2^k n}, \quad \text{откуда} \quad m_e\{f(S_{k,n})\} < \frac{1}{2^k n},$$

где m_e — внешняя мера.

Положим

$$Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k,n}.$$

Тогда для любого n имеем

$$Z \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k,n}, \quad \text{откуда} \quad f(Z) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f(S_{k,n}),$$

и, следовательно,

$$m_e\{f(Z)\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_e\{f(S_{k,n})\} \leqslant \frac{1}{n}, \quad \text{откуда} \quad m\{f(Z)\} = 0.$$

С другой стороны,

$$\mathscr{X} - Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \mathscr{X} - \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k,n} \right\} \quad \text{и} \quad R \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k,n}.$$

Следовательно, при фиксированном n множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k,n}$ открыто и всюду плотно. Тогда множество $\mathscr{X} - \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{k,n}$ нигде не плотно и множество $\mathscr{X} - Z$ является множеством первой категории.

---

[1]) См. Серпинский [33]. Одно приложение этой теоремы можно найти гл . 3, § 40.

Случай, когда f — функция, обладающая свойством Бэра, сводится к предыдущему, ибо, согласно теореме п. II, $\mathscr{X} = P \cup (\mathscr{X} - P)$, функция f непрерывна на множестве $\mathscr{X} - P$, а P — множество первой категории. Но, как мы только что доказали, существует множество Z, такое, что $m\{f(Z)\} = 0$ и $\mathscr{X} - P - Z$ есть множество первой категории. Следовательно, множество

$$\mathscr{X} - Z \subset (\mathscr{X} - P - Z) \cup P$$

является множеством первой категории.

ГЛАВА 3

ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 33. Определения. Общие свойства

I. Определения. Пусть $\mathscr{X}$ — метрическое пространство. Последовательность точек $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ в пространстве $\mathscr{X}$ мы будем называть *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует индекс n, такой, что $|p_n - p_k| < \varepsilon$ при $k > n$, иначе говоря, если $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(E_n) = 0$, где E_n обозначает множество $(p_n, p_{n+1}, \ldots)$.

Метрическое пространство $\mathscr{X}$ назовем *полным* [1]), если любая его фундаментальная последовательность является сходящейся, т. е. если существует точка $p \in \mathscr{X}$, такая, что $p = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

Замечание. Понятие полного пространства не является топологическим понятием: открытый интервал $0 < x < 1$ не является полным пространством, тогда как множество всех действительных чисел, гомеоморфное этому интервалу, полно (в силу классической теоремы об эквивалентности условия Коши сходимости последовательности действительных чисел).

Мы будем различать понятия полного пространства *в метрическом смысле* (которое было только что определено) и полного пространства в *топологическом смысле*, а именно, пространства, гомеоморфного некоторому полному пространству в метрическом смысле.

II. Сходимость и фундаментальные последовательности

Теорема 1. *Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Пусть $p = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс n, что $|p_k - p| < \varepsilon/2$ при $k \geqslant n$. Следовательно, $|p_n - p_k| < \varepsilon$.

---

[1]) Понятие полноты пространства было введено М. Фреше в его диссертации. См. также Хаусдорф [1], стр. 315. Следует заметить, что метрические пространства, удовлетворяющие аксиоме 1 Мура Р. [2], стр. 464, являются полными; см. Робертс [1], а также Серпинский [18], стр. 106.

Обратная теорема неверна в неполных пространствах. Однако имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Фундаментальная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится* (к пределу данной подпоследовательности).

В самом деле, пусть $p = \lim\limits_{j \to \infty} p_{i_j}$. Пусть ε и n имеют тот же смысл, что и в определении фундаментальности; выберем $m > n$ таким, что $|p_{i_m} - p| < \varepsilon$. Так как $i_m \geqslant m > n$, то $|p_{i_m} - p_k| < 2\varepsilon$ при $k > n$. Тогда $|p_k - p| < 3\varepsilon$, откуда $\lim\limits_{k \to \infty} p_k = p$.

Теорема 3. *Любое компактное метрическое пространство является полным пространством.*

Это следует из теоремы 2, § 21, IX.

III. Прямое произведение.

Теорема 1. *Прямое произведение $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ двух полных пространств, метризованное при помощи формулы*

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1| = \sqrt{|x - x_1|^2 + |y - y_1|^2},$$

где $\mathfrak{z} = (x, y)$ *и* $\mathfrak{z}_1 = (x_1, y_1)$ (см. § 21, VI (1)), *является полным пространством.*

В самом деле, пусть $\{\mathfrak{z}_n\}$ — фундаментальная последовательность точек прямого произведения; тогда последовательности абсцисс $x_1, x_2, \ldots$ и ординат $y_1, y_2, \ldots$ также фундаментальны, ибо

$$|x_n - x_k| \leqslant |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k| \quad \text{и} \quad |y_n - y_k| \leqslant |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k|.$$

Так как пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ полные, существуют такие точки x и y, что

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \text{и} \quad y = \lim_{n \to \infty} y_n, \quad \text{откуда} \quad (x, y) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{z}_n.$$

Предыдущую теорему, справедливую для любого конечного числа сомножителей, можно распространить на счетное произведение пространств.

Теорема 2. *Произведение $\prod\limits_i \mathscr{X}_i$ последовательности полных пространств, метризованное при помощи формулы*

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|}{1 + |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|},$$

где $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}^1, \ldots, \mathfrak{z}^n, \ldots)$ *и* $\mathfrak{y} = (\mathfrak{y}^1, \ldots, \mathfrak{y}^n, \ldots)$, *является полным пространством* (см. § 21, VI, замечание 2).

В самом деле, предположим, что последовательность $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ фундаментальна. Пусть i — произвольный фиксированный индекс. Для любого $\varepsilon > 0$ (такого, что $1 - 2^i\varepsilon > 0$) существует такой индекс n, что $|\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k| < \varepsilon$, каково бы ни было $k > n$. Тогда

$$\frac{|\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_k^i|}{1 + |\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_k^i|} < 2^i\varepsilon, \quad \text{откуда} \quad |\mathfrak{z}_n^i - \mathfrak{z}_k^i| < \frac{2^i\varepsilon}{1 - 2^i\varepsilon} = \frac{1}{\dfrac{1}{2^i\varepsilon} - 1}.$$

Так как последняя величина стремится к нулю вместе с ε, то отсюда вытекает, что последовательность $\mathfrak{z}_1^i, \mathfrak{z}_2^i, \ldots, \mathfrak{z}_n^i, \ldots$ фундаментальна. Так как пространство $\mathcal{X}_i$ полное, то существует предел $\mathfrak{z}^i = \lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{z}_n^i$, откуда $\mathfrak{z} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{z}_n$.

В частности, *евклидово пространство* $\mathcal{E}^n$, *пространство* $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ *всех последовательностей действительных чисел, n-мерный куб* $\mathcal{J}^n$, *гильбертов куб* $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, *пространство* $\mathcal{N}$ *иррациональных чисел интервала* $\mathcal{J}$ ($\aleph_0$ — мощность множества натуральных чисел) *представляют собой топологически полные пространства* (т. е. гомеоморфны полным пространствам)[1]).

IV. Пространство $(2^{\mathcal{X}})_m$.

Теорема. *Если $\mathcal{X}$ — полное пространство, то пространство $(2^{\mathcal{X}})_m$ также является полным*[2]).

В самом деле, пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность Коши элементов пространства $(2^{\mathcal{X}})_m$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс $n(\varepsilon)$, что

$$(1) \qquad (n > n(\varepsilon)) \Rightarrow (\operatorname{dist}(A_n, A_{n(\varepsilon)}) < \varepsilon).$$

Положим $L = \operatorname*{Ls}\limits_{n \to \infty} A_n$. Покажем, что

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}(L, A_n) = 0.$$

Достаточно доказать, что $\operatorname{dist}(L, A_{n(\varepsilon)}) \leqslant 2\varepsilon$, ибо отсюда, в силу (1), вытекает, что $\operatorname{dist}(L, A_n) \leqslant 3\varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$. Итак, остается доказать, что

1° $\rho(p, A_{n(\varepsilon)}) \leqslant 2\varepsilon$ для любой точки $p \in L$;

2° $\rho(q, L) \leqslant 2\varepsilon$ для любой точки $q \in A_{n(\varepsilon)}$.

Пусть R — обобщенный замкнутый шар с центром $A_{n(\varepsilon)}$ радиуса ε; тогда, согласно (1), имеем $A_n \subset R$ при $n > n(\varepsilon)$ (см. § 21, VII (2)). Как верхний предел последовательности $\{A_n\}$, множество L удовлет-

---

[1]) Пространство $\mathcal{N}$, метризованное так, что оно становится полным пространством, называется также „нульмерным пространством Бэра“.

[2]) Теорема Хана [2], стр. 124.

воряет включению $L\subset\overline{A_n\cup A_{n+1}\cup\ldots}$ (см. § 29, IV, 8); поэтому $L\subset R$, откуда следует утверждение 1°.

Чтобы доказать 2°, положим $n(\varepsilon/2^k)=n_k$ (можно допустить, что $n_k>n_{k-1}$) и рассмотрим последовательность $q_{n_0}, q_{n_1}, \ldots, q_{n_k}, \ldots$, определенную по индукции следующим образом: в множестве A_{n_k} выбираем точку q_{n_k} таким образом, что $q_{n_0}=q$ и $|q_{n_k}-q_{n_{k-1}}|<$ $<\varepsilon/2^{k-1}$, что всегда возможно, в силу (1). Последовательность $q_{n_0}, q_{n_1}, \ldots$ фундаментальная, ибо $|q_{n_m}-q_{n_k}|<\varepsilon/2^{k-1}$ при $m>k$. Так как пространство $\mathscr{X}$ полное, эта последовательность сходится к некоторой точке l этого пространства. По определению верхнего предела, точка l принадлежит множеству L. Так как, кроме того, $|q_{n_k}-q_{n_0}|<2\varepsilon$, каково бы ни было k, то $|q-l|\leqslant 2\varepsilon$, откуда следует утверждение 2°.

V. Функциональное пространство. В § 21, X, 1 мы отмечали, что семейство $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ограниченных отображений $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ можно рассматривать как метрическое пространство, если расстояние положить равным

$$(0)\qquad |f_1-f_2|=\sup_{x\in\mathscr{X}}|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Теорема 1. *Если пространство $\mathscr{Y}$ полное, то и пространство $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ полное.*

В самом деле, предположим, что $|f_n-f_k|<\varepsilon$ при $k>n$. Следовательно, при фиксированном x имеем $|f_n(x)-f_k(x)|<\varepsilon$, и последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... фундаментальная. Положим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Так как последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится, то функции f_n сходятся к функции f в смысле расстояния (0), и легко видеть, что $f\in\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

Теорема 2. *Если пространство $\mathscr{Y}$ полное, то и пространство ограниченных непрерывных функций полное.*

Действительно, предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций представляет собой непрерывную функцию (§ 21, X, 2).

Эта теорема верна также для пространства функций класса α (см. § 31, VIII, 2), пространства B-измеримых функций, пространства функций, обладающих свойством Бэра (см. § 32, III, 2).

VI. Полная метризация G_δ-множеств. Непосредственно из определения полного пространства вытекает следующее утверждение:

Любое замкнутое подмножество полного пространства само является полным пространством (относительно индуцированной метрики).

В силу следствия из § 21, XIII, любое G_δ-подмножество метрического пространства $\mathcal{X}$ гомеоморфно некоторому замкнутому подмножеству прямого произведения $\mathcal{X} \times \mathcal{E}^{\aleph_0}$, где $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ — пространство бесконечных последовательностей действительных чисел. Пусть $\mathcal{X}$ — полное пространство, тогда пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{E}^{\aleph_0}$, как произведение двух полных пространств, является полным пространством, так же как и каждое его замкнутое подмножество. Итак, мы приходим к следующему результату:

Теорема Александрова[1]). *Любое G_δ-подмножество полного пространства гомеоморфно полному пространству, т. е. является полным пространством в топологическом смысле.*

Замечания. 1. Процесс, служивший нам для доказательства следствия в § 21, XIII, позволяет непосредственно определить „новое расстояние" в G_δ-множестве таким образом, чтобы это множество стало полным пространством. В самом деле, пусть дано множество $Q = G_1 \cap G_2 \cap \ldots$, где G_i — открытые множества; положим

$$f_i(x) = \frac{1}{\rho(x, \mathcal{X} - G_i)}.$$

Тогда новое расстояние между двумя точками x и y множества Q определим следующим образом:

$$(1) \qquad \| x - y \| = | x - y | + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|f_i(x) - f_i(y)|}{1 + |f_i(x) - f_i(y)|}.$$

2. Предыдущая теорема является частным случаем следующей теоремы о полной метризации (см. Куратовский [43], [44]):

Пусть $\mathcal{X}$ — метрическое пространство и $f_m : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ — непрерывные отображения, $m = 1, 2, \ldots$. Допустим, что

(2) *если $x_1, x_2, \ldots$ — такая фундаментальная последовательность, что последовательность $f_i(x_1), f_i(x_2), \ldots$ ограничена (для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots$), то последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится.*

При этом предположении пространство $\mathcal{X}$ становится полным пространством относительно нового расстояния $\| x - y \|$, определенного формулой (1), *причем его топология не меняется, т. е.*

$$(3) \qquad \left(\lim_{i \to \infty} \| x_i - x \| = 0\right) \equiv \left(\lim_{i \to \infty} | x_i - x | = 0\right).$$

---

[1]) См. Александров [3]. Простое доказательство этой теоремы было дано Хаусдорфом [4]. Что касается обратной теоремы, см. § 35, III.

Из предыдущей теоремы можно получить еще более общие теоремы, имеющие важные приложения, если предположить, что в пространстве $\mathcal{X}$ определено понятие сходимости $x_i \to x$, такое, что

$$(x_i \to x) \Rightarrow \left(\lim_{i\to\infty} |x_i - x| = 0\right),$$

причем непрерывность отображений f_m, так же как и сходимость, рассматриваемую в условии (2), следует понимать в смысле сходимости $x_i \to x$. При этих предположениях наша теорема остается верной, если в соотношение (3) подставить $x_i \to x$ вместо $\lim\limits_{i\to\infty} |x_i - x| = 0$.

VII. Пополнение метрического пространства. Мы доказали (§ 21, X, 9), что любое метрическое пространство $\mathcal{X}$ изометрично некоторому подмножеству пространства действительных непрерывных и ограниченных функций, определенных на пространстве $\mathcal{X}$. Так как пространство действительных чисел полно, то это функциональное пространство полно, согласно V, 2. Итак, имеет место

Теорема Хаусдорфа. *Всякое метрическое пространство изометрично подмножеству полного пространства.*

Эту теорему можно также доказать следующим образом[1]).

Рассмотрим пространство $\tilde{\mathcal{X}}$, элементами которого являются фундаментальные последовательности $a = [a^1, a^2, \ldots, a^i, \ldots]$ точек пространства $\mathcal{X}$. Определим расстояние между двумя точками a и b в пространстве $\tilde{\mathcal{X}}$ следующим образом:

$$(0) \qquad |a - b| = \lim_{i\to\infty} |a^i - b^i|.$$

Две последовательности, расстояние между которыми равно нулю, отождествляются (см. § 21, I, замечание). Пространство $\tilde{\mathcal{X}}$, как мы докажем, *полное и содержит множество, изометричное пространству $\mathcal{X}$.*

Прежде всего $\tilde{\mathcal{X}}$ — метрическое пространство, ибо, с одной стороны, из неравенства

$$|a^i - b^i| \leqslant |a^i - a^j| + |a^j - b^j| + |b^j - b^i|$$

вытекает, что

$$|a^i - b^i| - |a^j - b^j| \leqslant |a^i - a^j| + |b^j - b^i|,$$

[1]) См. Хаусдорф [1], стр. 315. Доказательство Хаусдорфа, которое мы приведем здесь, представляет собой обобщение хорошо известного процесса Кантора — Мере определения иррациональных чисел.

и, следовательно, если последовательности a и b фундаментальные, то и последовательность чисел $|a^1-b^1|$, $|a^2-b^2|$, ... фундаментальная. Отсюда вытекает существование предела

$$\lim_{i\to\infty}|a^i-b^i|.$$

Итак, для любой пары элементов пространства $\tilde{\mathscr{X}}$ определено расстояние. С другой стороны, выполняется аксиома треугольника, ибо если в неравенстве $|a^i-b^i|+|a^i-c^i|\geqslant|b^i-c^i|$ перейти к пределу, то мы получим $|a-b|+|a-c|\geqslant|b-c|$.

В случае, когда для любого i имеют место равенства $a^i=x$ и и $b^i=y$, очевидно, что $|x-y|=|a-b|$. Пространство $\mathscr{X}$ изометрично, следовательно, подмножеству пространства $\tilde{\mathscr{X}}$, состоящему из последовательностей вида $\{x, x, x, \ldots\}$.

Остается доказать, что пространство $\tilde{\mathscr{X}}$ полное. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ — последовательность точек пространства $\tilde{\mathscr{X}}$. Тогда существует последовательность целых положительных чисел m_1, $m_2, \ldots, m_n, \ldots$, такая, что

$$(1)\qquad \left|a_n^{m_n}-a_n^i\right|<\frac{1}{n}\quad \text{при}\quad i>m_n.$$

Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots$ фундаментальная. Докажем, что последовательность $a=\left[a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, \ldots\right]$ также фундаментальная, т. е. что $a\in\tilde{\mathscr{X}}$ и, кроме того, $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Пусть $\varepsilon>0$. Так как последовательность $a_1, a_2, \ldots$ фундаментальная, существует индекс $q=q(\varepsilon)>1/\varepsilon$, такой, что $|a_q-q_{q+k}|<\varepsilon$, каково бы ни было k. Тогда, в силу (0), существует последовательность целых чисел j_k, такая, что

$$(2)\qquad \left|a_q^i-a_{q+k}^i\right|<\varepsilon\quad \text{при}\quad i>j_k.$$

Из неравенства

$$\left|a_q^{m_q}-a_{q+k}^{m_{q+k}}\right|\leqslant\left|a_q^{m_q}-a_q^i\right|+\left|a_q^i-a_{q+k}^i\right|+\left|a_{q+k}^i-a_{q+k}^{m_{q+k}}\right|,$$

согласно (1) и (2), следует, что для индексов i, бо́льших m_q, j_k и m_{q+k} одновременно, имеет место соотношение

$$(3)\qquad \left|a_q^{m_q}-a_{q+k}^{m_{q+k}}\right|<\frac{1}{q}+\varepsilon+\frac{1}{q+k}<3\varepsilon,$$

откуда вытекает, что последовательность a фундаментальная.

Из неравенства

$$\left|a_n^i-a_i^{m_i}\right|\leqslant\left|a_n^i-a_n^{m_n}\right|+\left|a_n^{m_n}-a_i^{m_i}\right|,$$

в силу (1) и (3), следует, что при $i > m_n$, $n > q$ и $i > q$ имеем

$$(4) \qquad \left| a_n^i - a_i^{m_i} \right| < \frac{1}{n} + 6\varepsilon < 7\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс q, что при $n > q$ имеет место неравенство (4), как только индекс i достаточно большой. Пусть $i \to \infty$; тогда, в силу соотношения (0), имеем $|a_n - a| \leqslant 7\varepsilon$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Замечание. Если отождествить точки x пространства $\mathscr{X}$ с последовательностями $[x, x, x, \ldots]$, то $\mathscr{X}$, рассматриваемое как подмножество пространства $\tilde{\mathscr{X}}$, *плотно в* $\tilde{\mathscr{X}}$. В самом деле, пусть $a = [a^1, a^2, \ldots] \in \tilde{\mathscr{X}}$, тогда $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = [a^n, a^n, a^n, \ldots]$, поскольку, согласно (0), $|a_n - a| = \lim\limits_{i\to\infty} |a^n - a^{n+i}|$; так как последовательность a фундаментальная, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

В частности, *если пространство $\mathscr{X}$ сепарабельно, то и пространство $\tilde{\mathscr{X}}$ сепарабельно.*

§ 34. Последовательности множеств. Теорема Бэра

Пространство, рассматриваемое в этом параграфе, предполагается полным (сепарабельным или несепарабельным).

I. Коэффициент $\alpha(A)$. Обозначим через $\alpha(A)$ нижнюю грань чисел ε, таких, что множество A допускает разложение в конечное число множеств диаметра $< \varepsilon$. Таким образом, равенство $\alpha(A) = 0$ означает, что множество A вполне ограничено (§ 21, VIII).

Теорема[1]). *Любая последовательность $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(A_n) = 0$, сходится в пространстве $(2^{\mathscr{X}})_m$ к непустому множеству $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$.*

Предположим сначала, что последовательность $\{A_n\}$ не является фундаментальной. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность целых чисел $\{k_n\}$, такие, что $\operatorname{dist}(A_n, A_{k_n}) > \varepsilon$. Отсюда вытекает, что существует последовательность точек $\{p_n\}$, такая, что $p_n \in A_n$ и $\rho(p_n, A_{k_n}) > \varepsilon$, ибо из включения $A_n \supset A_{k_n}$ следует, что $\rho(A_n, x) = 0$ для любого $x \in A_{k_n}$.

---

[1]) См. Куратовский [13]. Согласно одной теореме из гл. 4 (том 2), множество $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ компактно.

Пусть m — целое число, такое, что $\alpha(A_m) < \varepsilon$. Положим

$$A_m = Z_1 \cup \ldots \cup Z_l \quad \text{и} \quad \delta(Z_i) < \varepsilon.$$

Так как точки $p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots$ принадлежат множеству A_m, то одно из множеств $Z_1, \ldots, Z_l$ (можно допустить, что это множество Z_1) содержит бесконечную подпоследовательность $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots$. Пусть j — такой индекс, что $i_j > k_{i_1}$. Следовательно, $A_{k_{i_1}} \supset A_{i_j}$ и $p_{i_j} \in A_{k_{i_1}}$. Из соотношений $p_{i_1} \in Z_1$, $p_{i_j} \in Z_1$ и $\delta(Z_1) < \varepsilon$ следует, что $|p_{i_1} - p_{i_j}| < \varepsilon$, откуда $\rho(p_{i_1}, A_{k_{i_1}}) < \varepsilon$, вопреки определению последовательности $\{p_n\}$.

Это противоречие показывает, что последовательность $\{A_n\}$ фундаментальная, а так как пространство $(2^{\mathscr{X}})_m$ полное, то она сходится. На основании § 33, IV (2) последовательность $\{A_n\}$ сходится к множеству $\mathrm{Ls}\, A_n$, которое совпадает с пересечением $\bigcap\limits_i A_i$, так как рассматриваемая последовательность — убывающая (§ 29, VI, 8).

Следствие. *Пусть $\{F_\iota\}$ — семейство (счетное или несчетное) замкнутых множеств, такое, что:*

1° *пересечение любой конечной системы множеств F_ι непусто,*

2° *существуют множества F_ι со сколь угодно малым коэффициентом $\alpha(F_\iota)$.*

Тогда пересечение всех множеств F_ι непусто.

Пусть $\varkappa_n$ — такой индекс, что $\alpha(F_{\varkappa_n}) < 1/n$. Положим $P = F_{\varkappa_1} \cap F_{\varkappa_2} \cap \ldots$. Отсюда $\alpha(P) = 0$, т. е. множество P вполне ограничено, и, следовательно, сепарабельно (§ 21, VIII, 3). В силу теоремы Линделёфа (§ 5, XI), примененной к множеству P, рассматриваемому как пространство (см. § 21, II, теорема 2), существует последовательность индексов $\iota_1, \iota_2, \ldots$, такая, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (P - F_{\iota_n}) = \bigcup_{\iota} (P - F_\iota),$$

следовательно,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (P \cap F_{\iota_n}) = \bigcap_{\iota} (P \cap F_\iota) = \bigcap_{\iota} F_\iota.$$

Положим $A_n = F_{\varkappa_1} \cap \ldots \cap F_{\varkappa_n} \cap F_{\iota_1} \cap \ldots \cap F_{\iota_n}$. Из предыдущей теоремы вытекает, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (P \cap F_{\iota_n}) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$, следовательно, $\bigcap\limits_{\iota} F_\iota \neq 0$.

II. Теорема Кантора[1]**).** *Для любой последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ непустых замкнутых множеств, таких, что $\lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$, множество $\bigcap_i A_i$ состоит из одной точки.*

Эта теорема является прямым следствием теоремы п. I и неравенства $\alpha(A_n) \leqslant \delta(A_n)$.

Замечание 1. Теорема Кантора может быть доказана более прямым способом. А именно, выбирая по точке p_n из каждого множества A_n, мы получим фундаментальную последовательность. Предел этой последовательности принадлежит каждому из множеств A_n (поскольку множества A_n замкнуты) и, следовательно, принадлежит множеству $\bigcap_i A_i$.

Замечание 2. Эта теорема *характеризует* полные пространства (среди метрических пространств). В самом деле, пусть $p_1, p_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность, положим $E_n = (p_n, p_{n+1}, \ldots)$, тогда $\lim_{n\to\infty} \delta(E_n) = 0$. В силу теоремы Кантора, существует точка

$$p \in \bigcap_n \overline{E}_n, \quad \text{откуда} \quad |p - p_n| \leqslant \delta(\overline{E}_n) = \delta(E_n),$$

следовательно, $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

III. Приложение к непрерывным функциям.

Теорема. *Пусть f — непрерывная функция, определенная на пространстве $\mathscr{X}$, и пусть $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ — последовательность непустых замкнутых множеств, таких, что $\lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) = 0$* $\left(\text{в частности, таких, что } \lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0\right)$. *Тогда*

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n).$$

В самом деле, имеет место включение (см. § 3, III (2a))

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n).$$

Обратно, пусть

$$y \in \bigcap_n f(F_n) \quad \text{и} \quad A_n = F_n \cap f^{-1}(y).$$

[1]) См. Кантор [4] и Хаусдорф [1], стр. 318, где эта теорема приводится в той же форме, что и здесь.

Согласно теореме п. I,

$$\bigcap_n A_n \neq 0, \quad \text{откуда} \quad f^{-1}(y) \cap F_1 \cap F_2 \cap \ldots \neq 0,$$

следовательно, $y \in f\left(\bigcap_n F_n\right)$.

IV. Теорема Бэра [1]. *Любое множество первой категории является граничным множеством.*

В самом деле, пусть $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, где N_i — нигде не плотные множества, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть S_0 — произвольный замкнутый шар. Докажем, что $S_0 - E \neq 0$. Рассмотрим последовательность $S_0 \supset S_1 \supset \ldots$ $\ldots \supset S_n \supset \ldots$ замкнутых шаров, определенных (по индукции) следующим образом: если множество N_n нигде не плотно, то существует замкнутый шар S_n, такой, что

$$S_n \subset S_{n-1} - N_n \quad \text{и} \quad \delta(S_n) < \frac{1}{n}.$$

Согласно теореме Кантора, существует точка $p \in \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$. Так как

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (-N_n) = -\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n,$$

то $p \in S_0 - E$.

Следствие 1. *Дополнение к множеству первой категории не является множеством первой категории (если только пространство не пусто).*

Следствие 2. *Все пространство не является множеством первой категории ни в одной точке.*

Это вытекает из того, что в противном случае существовало бы непустое открытое множество первой категории.

Следствие 3. *Любая точка полного пространства, плотного в себе, есть точка конденсации.*

В противном случае существовало бы открытое счетное множество, и так как любая отдельная точка является нигде не плотным множеством, то это открытое множество было бы множеством первой категории.

Следствие 4. *Любое полное счетное пространство является разреженным*[1]).

Действительно, любое неразреженное пространство содержит совершенное непустое подмножество (§ 9, VI, 3). Это совершенное

[1]) См. об этом в § 36, V.

множество, рассматриваемое как пространство, является полным и плотным в себе и, следовательно, несчетным, согласно следствию 3.

Следствие 5. *Пусть дано разложение полного пространства в ряд замкнутых множеств:* $\mathscr{X}=\bigcup_n Z_n$, *и пусть множество* $E\cap Z_n$ *является разреженным при каждом* n, *тогда множество* E *также разрежено.*

Пусть D — плотное в себе подмножество множества E. Как разреженное множество, $D\cap Z_n$ является граничным множеством в D (§ 9, VI, 1). Тогда

$$\overline{D-Z_n}=\overline{D}, \quad \text{откуда} \quad \overline{D}\cap Z_n\subset\overline{D}=\overline{D-Z_n}\subset\overline{\overline{D}-Z_n},$$

следовательно, множество $\overline{D}\cap Z_n$ является граничным в $\overline{D}$ (см. § 8, VI) и, как замкнутое множество, оно нигде не плотно в $\overline{D}$.

Из тождества $\overline{D}=(\overline{D}\cap Z_1)\cup(\overline{D}\cap Z_2)\cup\ \ldots$ вытекает, что $\overline{D}$ является множеством первой категории относительно самого себя, поэтому оно пусто (согласно следствию 2; множество $\overline{D}$ рассматривается как пространство). Следовательно, $D=0$.

Следствие 6. *Пусть* E — *плотное в себе (непустое) подмножество полного пространства* $\mathscr{X}$, *и* f — *непрерывная функция, определенная на этом пространстве, такая, что сужение* $f|E$ *взаимно однозначно; тогда множество* $f(\mathscr{X})$ *несчетно.*

Предположим, напротив, что $f(\mathscr{X})=(y_1, y_2, \ldots)$. Положим $Z_n=f^{-1}(y_n)$. Тогда $\mathscr{X}=Z_1\cup Z_2\cup\ldots$ и $Z_n=\overline{Z}_n$. Кроме того, множество $E\cap Z_n$ содержит самое большее одну точку, так как из условий $x\in E\cap Z_n$ и $x'\in E\cap Z_n$ следует, что $f(x)=y_n=f(x')$, откуда $x=x'$ (функция $f|E$ взаимно однозначна). Согласно следствию 5, тогда множество E разреженное, вопреки предположению.

Следствие 7. *Пусть в полном сепарабельном несчетном пространстве задана система множеств* $E_{\alpha,\beta}$, *где* $\alpha<\Omega$ *и* $\beta<\Omega$, *обладающих свойством Бэра, такая, что* $E_{\alpha,\beta}\cap E_{\alpha,\beta'}=0$ *при* $\beta\neq\beta'$; *тогда существует трансфинитная последовательность* $\{\gamma_\alpha\}$, $\alpha<\Omega$, *такая, что*

$$(1) \qquad \overline{\overline{\mathscr{X}-\bigcup_{\alpha<\Omega}E_{\alpha,\gamma_\alpha}}}>\aleph_0.$$

Без ограничения общности можно допустить, что пространство совершенно (отбрасывая, если необходимо, его разреженную часть). Определим с помощью трансфинитной индукции последовательность $\{\gamma_\alpha\}$, а также последовательность точек $\{p_\alpha\}$. Согласно § 24, I, 3, $E_{\alpha,\beta}$ является множеством первой категории при фиксированном α и достаточно большом β.

Так как множества $E_{\alpha,\beta}$ не пересекаются (при фиксированном α), то среди чисел β существует одно, обозначим его через γ_α, такое, что $p_\xi \in \mathscr{X} - E_{\alpha,\gamma_\alpha}$, каково бы ни было $\xi < \alpha$. Так как множества E_{1,γ_1}, E_{2,γ_2}, ..., E_{α,γ_α} являются множествами первой категории, а p_ξ — точки накопления пространства, то, в силу теоремы Бэра,

$$\mathscr{X} - \left[\left(\bigcup_{\xi \leqslant \alpha} E_{\xi,\gamma_\xi}\right) \cup \left(\bigcup_{\xi < \alpha} p_\xi\right)\right] \neq 0.$$

Пусть p_α — точка, принадлежащая этой разности, и P — множество точек p_α, где $\alpha < \Omega$. Так как $p_\alpha \neq p_\xi$ при $\xi < \alpha$, то $\overline{\overline{P}} = \aleph_1$. Поскольку $P \cap E_{\alpha,\gamma_\alpha} = 0$, отсюда вытекает формула (1).

Замечания. 1. Доказательство теоремы Бэра можно сделать *эффективным* в следующем смысле (см. § 23, VIII): пусть заданы 1° база пространства $R_1, R_2, \ldots$, 2° последовательность нигде не плотных множеств $N_1, N_2, \ldots$ и 3° шар S_0; тогда можно *определить* точку p, принадлежащую множеству $S_0 - (N_1 \cup N_2 \cup \ldots)$.

Действительно, положим $S_n = \overline{R}_{k_n}$ при $n > 0$, где k_n — наименьший индекс, такой, что

$$\overline{R}_{k_n} \subset R_{k_{n-1}} - N_n \quad \text{и} \quad \delta(R_{k_n}) < \frac{1}{n}.$$

Тогда пересечение $\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ состоит из одной точки, которую мы обозначим через p.

2. *Теорема Бэра эквивалентна предположению, что любая последовательность произвольных множеств X_n удовлетворяет равенству*

$$\overline{\mathscr{X} - \bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n \cap \overline{(\mathscr{X} - \overline{X}_n)}]} = \mathscr{X}.$$

Это следует из того, что нигде не плотные множества можно определить как множества вида $X \cap \overline{(\mathscr{X} - \overline{X})}$ (см. § 8, II).

3. Если допустить, что множества $E_{\alpha,\beta}$ не обладают свойством Бэра, то следствие 7 становится неверным. В самом деле, с помощью гипотезы континуума можно доказать, что в интервале $\mathscr{J}$ существует система множеств $E_{n,\beta}$, где $n = 1, 2, \ldots$ и $\beta < \Omega$, такая,

что $E_{n,\beta} \cap E_{n,\beta'} = 0$ при $\beta \neq \beta'$, и что для любой бесконечной последовательности $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\overline{\overline{\mathcal{J} - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,\gamma_n}}} \leqslant \aleph_0$$

(см. Браун и Серпинский [1]).

V. Приложения к множествам типа G_δ.

Теорема 1. *Пусть $Q_1, Q_2, \ldots$ — всюду плотные G_δ-множества, тогда $\bigcap_i Q_i$ также является всюду плотным G_δ-множеством.*

Каждое из множеств $\mathcal{X} - Q_n$, как граничное множество типа F_σ, является множеством первой категории. Следовательно, их объединение $\bigcup_i (\mathcal{X} - Q_i)$ есть множество первой категории. Поэтому дополнение к этому объединению, т. е. множество $\bigcap_i Q_i$, всюду плотно.

Теорема 2. *Любое G_δ-множество первой категории нигде не плотно.*

В самом деле, если множество Q не является нигде не плотным, то существует открытое множество $G \neq 0$, такое, что множество $Q \cap G$ плотно в G. Следовательно, если Q есть G_δ-множество, то $G - Q$ есть граничное F_σ-множество и, следовательно, множество первой категории. Если предположить, что Q — множество первой категории, то открытое множество G, как объединение двух множеств первой категории, также было бы множеством первой категории, вопреки следствию IV, 2.

Так как любое G_δ-множество полного пространства гомеоморфно полному пространству (§ 33, VI), то все теоремы п. IV можно сформулировать *относительно* G_δ-множеств.

В частности, справедлива

Теорема 3. *Пусть Q есть G_δ-множество, тогда любое подмножество, являющееся множеством первой категории в Q, есть граничное множество в Q.*

Любое счетное G_δ-множество является разреженным.

VI. Приложения к множествам типа F_σ и G_δ.

Теорема[1]). *Любое F_σ- и G_δ-множество*[2]) *разложимо в знакочередующийся (трансфинитный) ряд замкнутых убывающих множеств.*

---

[1]) См. Хаусдорф [1], стр. 462.

[2]) Для краткости F_σ- и G_δ-множеством называется множество, являющееся одновременно множеством типа F_σ и типа G_δ. — *Прим. перев.*

Действительно, пусть E есть F_σ- и G_δ-множество, а X — произвольное непустое замкнутое множество. Докажем (см. § 12, V, 1°), что либо множество $X \cap E$, либо множество $X - E$ не является граничным в X. В самом деле, в противном случае множества $X \cap E$ и $X - E$, как граничные F_σ-множества, были бы множествами первой категории в X (см. § 10, II), а их объединение $X = (X \cap E) \cup (X - E)$ было бы множеством первой категории относительно самого себя, вопреки следствию 1 из п. IV (множество X рассматривается как пространство).

Принимая во внимание обратную теорему (§ 30, X, 5), получим, что *в полных пространствах F_σ- и G_δ-множества совпадают с разложимыми множествами.*

Замечания. 1. Отсюда вытекает (см. § 12, V и VII), что подмножество E полного пространства является F_σ- и G_δ-множеством тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого множества F:

1° граница множества $F \cap E$ относительно F нигде не плотна в F (т. е. отличается от F);

2° множество $F \cap E$ есть объединение открытого множества и нигде не плотного множества в F (или разностью замкнутого множества и нигде не плотного множества в F);

3° множество $F \cap E$ локально замкнуто в одной из своих точек (или пусто).

2. Из 3° следует, что *любое F_σ- и G_δ-множество, однородное в пространстве, есть разность двух замкнутых множеств* (как множество, локально замкнутое в каждой из своих точек, см. § 7, V, следствие).

3. В полных сепарабельных пространствах *любое вполне упорядоченное семейство возрастающих (или убывающих) F_σ- и G_δ-множеств счетно* (см. § 24, III, 2).

Это утверждение не распространяется на множества типа G_δ. Нельзя также отбросить предположение о полноте пространства (см. § 40, III).

Проблемы эффективности.

1. Любое F_σ- и G_δ-множество эффективно является F_σ-множеством и G_δ-множеством (см. § 24, III, замечание 1°).

2. В совокупности множеств, которые одновременно являются F_σ- и G_δ-множествами, можно эффективно реализовать аксиому выбора, т. е. можно указать функцию f, определенную на любом множестве X, представляющем собой непустое F_σ- и G_δ-множество, такую, что $f(X) \in X$.

В силу предыдущего утверждения, достаточно доказать это для эффективных G_σ-множеств. Иначе говоря, любой последовательности открытых множеств $G_1, G_2, \ldots$, таких, что $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \neq 0$, поставим в соответствие точку p, принадлежащую каждому множеству G_n, $n=1, 2, \ldots$.

Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства, а k_1 — наименьший индекс, такой, что

$$\overline{R}_{k_1} \subset G_1, \quad R_{k_1} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \neq 0 \quad \text{и} \quad \delta(R_{k_1}) < 1;$$

вообще пусть k_m — наименьший индекс, такой, что

$$\overline{R}_{k_m} \subset G_m \cap R_{k_{m-1}}, \quad R_{k_m} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \neq 0 \quad \text{и} \quad \delta(R_{k_m}) < \frac{1}{m}.$$

В силу теоремы Кантора, пересечение $\overline{R}_{k_1} \cap \overline{R}_{k_2} \cap \ldots$ сводится к одной точке; это и есть та точка p, которую следует выбрать.

3. Любое счетное семейство непересекающихся множеств типа F_σ, покрывающее все пространство, эффективным образом счетно.

В самом деле, так как дополнение к каждому из этих множеств есть F_σ-множество, то каждое из них является одновременно F_σ- и G_δ-множеством. В силу предыдущего утверждения, этим множествам можно поставить в соответствие выбранные точки; так как множество E этих точек — разреженное (п. IV, следствие 5), то оно эффективным образом счетно (§ 24, IV). Отсюда следует требуемое заключение.

VII. Приложения к функциям первого класса. Пусть f есть B-измеримое отображение первого класса метрического пространства $\mathscr{X}$ в сепарабельное пространство $\mathscr{Y}$; тогда, в силу теоремы 1, § 31, X, множество точек разрыва отображения f есть множество первой категории. Если $\mathscr{X}$ полно, то это множество является граничным; иначе говоря, *отображение f точечно-разрывно*. Применяя это утверждение к теореме 2, § 31, X, мы приходим к следующей теореме.

Теорема (Бэр [1]). *Пусть пространство $\mathscr{X}$ полно, а $\mathscr{Y}$ — сепарабельно; для того чтобы отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ было B-измеримым отображением первого класса, необходимо и достаточно, чтобы оно было точечно-разрывным на любом замкнутом множестве.*

Замечания. Непосредственно видно, что условие точечной разрывности может быть заменено условием существования точки непрерывности на любом замкнутом непустом подмножестве и что вместо замкнутых можно рассматривать совершенные множества (см. § 31, X, замечания 1 и 2).

Можно рассматривать также G_δ-множества, так как если A есть G_δ-подмножество в $\mathscr{X}$, то A топологически полно (§ 33, VI); поскольку f — отображение первого класса, сужение $f \mid A$ также первого класса и, следовательно, точечно-разрывно.

Следствие 1. *При тех же условиях, наложенных на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, если множество точек разрыва функции f счетно, то f — функция первого класса.*

Действительно, всякое непустое совершенное множество, будучи несчетным (см. п. IV, следствие 3), содержит точку непрерывности функции f.

Следствие 2. *Любое вполне упорядоченное семейство функций первого класса (с действительными значениями), определенных на полном пространстве и таких, что*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_\xi(x) \leqslant f_{\xi+1}(x) \leqslant \ldots,$$

является счетным.

Это — прямое следствие теоремы 2′ из § 24, III.

VIII. Приложения к теоремам существования. Важность теоремы Бэра состоит также в том, что она часто позволяет доказать *существование* элементов, обладающих данным свойством P: в самом деле, если в полном пространстве множество элементов, не обладающих свойством P, разлагается в ряд нигде не плотных множеств, то это множество, будучи множеством первой категории, не совпадает со всем пространством, т. е. существует элемент, обладающий свойством P (и даже всюду плотное множество таких элементов).

Таким образом, например, теорема Понтрягина—Нёбелинга, в силу которой любое метрическое сепарабельное n-мерное пространство $\mathcal{X}$ гомеоморфно некоторому подмножеству куба $\mathcal{I}^{2n+1}$, легко доказывается, если показать, что *в* пространстве $(\mathcal{I}^{2n+1})^{\mathcal{X}}$ функции, которые *не являются* гомеоморфизмами, образуют множество первой категории [1]).

Показано, что этот процесс приводит к успеху в проблемах существования функций (действительного переменного), обладающих некоторыми особенностями [2]).

В качестве примера рассмотрим доказательство существования непрерывной функции, не имеющей производной (Банах [5]).

В действительности мы установим существование функции, еще более сингулярной, а именно непрерывной функции, которая не имеет ни в одной точке двух правых конечных производных чисел. Это последнее свойство непрерывных функций мы и обозначим через P. Рассмотрим для этого пространство Φ непрерывных периодических действительных функций $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ с периодом 1 (см. § 33, V). Условие, что функция f не обладает свойством P, т. е. что она

---

[1]) См. Гуревич [11] и Куратовский [35а], стр. 334.

О других приложениях к теории размерностей см. Борсук [4], а также том 2 настоящей книги.

[2]) См. многочисленные работы Ауэрбаха, Банаха, Качмажа, Мазуркевича в *Studia Math.*, **3** (1931), а также Штейнгауз [1], Сакс [2], [4], Орлич [1].

обладает по крайней мере в одной точке двумя конечными правыми производными числами, эквивалентно существованию целого положительного n и точки $x \in \mathcal{J}$, таких, что

$$(1) \qquad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant n, \quad \text{каково бы ни было } h>0.$$

Множество функций f, не обладающих свойством P, равно, следовательно, объединению $\bigcup\limits_n N_n$, где N_n — множество функций f, для которых существует точка x, удовлетворяющая соотношению (1).

Так как пространство Φ полное (см. § 33, V, 2), остается только доказать, что множество N_n нигде не плотно (в Φ). Множество N_n замкнуто, ибо если $\{f_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ — последовательность функций, а $\{x_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ — последовательность точек, удовлетворяющих условию (1), то легко доказать, что, когда последовательность $\{f_k\}$ равномерно сходится, ее предел принадлежит N_n.

Замкнутость множества N_n устанавливается непосредственно, если воспользоваться логическими обозначениями. В самом деле, имеем

$$(2) \qquad N_n = \mathop{\mathsf{E}}_{f} \bigvee_{x} \bigwedge_{h>0} \left\{ \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant n \right\}.$$

Соотношение (2) означает, что множество N_n есть проекция (параллельно оси $\mathcal{J}$) замкнутого множества

$$\mathop{\mathsf{E}}_{f,x} \bigwedge_{h>0} \left\{ \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant n \right\} = \bigcap_{h>0} \mathop{\mathsf{E}}_{f,x} \left\{ \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant n \right\}.$$

Так как ось $\mathcal{J}$ компактна, то проекция замкнутого множества замкнута (см. § 20, V, теорема 7).

Докажем теперь, что множество N_n нигде не плотно; поскольку оно замкнуто, достаточно доказать, что оно является граничным множеством; так как множество кусочно линейных функций плотно в Φ, то достаточно доказать, что если f — кусочно линейная функция, то в $\Phi - N_n$ существует функция, отличающаяся от f сколь угодно мало. Но это очевидно.

Таким образом установлено существование непрерывных функций, не имеющих конечной производной; более того, функции, которые не обладают этой особенностью, образуют множество первой категории (и представляют, следовательно, „исключение" в совокупности непрерывных функций).

§ 35. Продолжение функций

I. Продолжение непрерывных функций.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — метрическое пространство, $A \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — полное метрическое пространство, и пусть $f: A \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение. Тогда отображение f можно* *непрерывным образом продолжить на G_δ-множество, содержащее A, а именно на множество A^* таких точек $p \in \bar{A}$, что* $\omega(p)=0$, *т. е. колебание отображения f в точке p обращается в* 0 (см. § 21, III).

Каждой точке $p \in A^*$ поставим в соответствие последовательность $\{p_n\}$, такую, что $p_n \in A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. Обозначим через E_n множество $(p_n, p_{n+1}, \ldots)$; тогда из равенства $\omega(p)=0$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta[f(E_n)] = 0$, следовательно, последовательность $f(p_1), f(p_2), \ldots$ фундаментальная. Так как пространство $\mathscr{Y}$ полное, положим

$$f^*(p) = \lim_{n\to\infty} f(p_n), \quad \text{т. е.} \quad f^*(p) = \bigcap_G \overline{f(G)},$$

где G пробегает множество всех окрестностей точки p (см. § 34, I, следствие).

Таким образом, отображение f^* определено на множестве A^* (типа G_δ, согласно § 21, III). Для $x \in A$ имеем $f(x) = f^*(x)$. Остается доказать, что отображение f^* непрерывно для $p \in A^*$, т. е. что $\omega^*(p)=0$, где ω^* — колебание f^*.

Так как G — открытое подмножество в $\mathscr{X}$, имеем

$$f^*(G) \subset \overline{f(G)}, \quad \text{откуда} \quad \delta[f^*(G)] \leqslant \delta[\overline{f(G)}] = \delta[f(G)].$$

Следовательно (см. § 21, III),

$$\omega^*(p) = \inf \delta[f^*(G)] \leqslant \inf \delta[f(G)] = \omega(p) = 0,$$

где G пробегает открытые множества, содержащие p.

Замечания. 1. Полнота пространства $\mathscr{Y}$ существенна. Действительно, пусть $\mathscr{X} = \mathscr{J}$, $A = \mathscr{Y}$ — множество рациональных чисел из $\mathscr{X}$ и $f(x) = x$ для $x \in A$. Тогда утверждение теоремы не имеет места.

2. Из предыдущей теоремы вытекает следующее предложение: *Пусть $\mathscr{X}$ — сепарабельное метрическое пространство мощности* $\mathfrak{c}$; *тогда существует отображение $g: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, разрывное на каждом множестве мощности* $\mathfrak{c}$. (Теорема Серпинского и Зигмунда [1].)

Доказательство этого предложения опирается на следующую лемму общей теории множеств:

Пусть Φ — семейство отображений подмножеств данного множества $\mathscr{X}$ в множество $\mathscr{Y}$. Если $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и Φ имеют мощность $\mathfrak{m}$, то существует отображение $g: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, которое не совпадает ни на каком подмножестве мощности $\mathfrak{m}$ ни с каким отображением, принадлежащим Φ.

Для доказательства расположим элементы множеств $\mathscr{X}$ и Φ в трансфинитные последовательности $\{x_\alpha\}$ и $\{f_\alpha\}$, обладающие наименьшим возможным порядковым типом, и определим отображение g при помощи трансфинитной индукции, условившись, что $g(x_\alpha) \neq f_\xi(x_\alpha)$, каково бы ни было $\xi < \alpha$.

Пусть теперь Φ — семейство всех действительных непрерывных функций, определенных на G_δ-подмножествах пространства $\mathscr{X}$. Согласно § 30, III и § 24, VI, семейство Φ имеет мощность $\mathfrak{c}$. Функция g и есть искомая функция. В самом деле, если бы функция g была непрерывна на некотором множестве E мощности $\mathfrak{c}$, то существовала бы непрерывная функция f, определенная на G_δ-множестве, содержащем E, такая, что $f(x) = g(x)$ для $x \in E$. Но это невозможно, потому что $f \in \Phi$.

3. Сформулируем без доказательства следующую теорему (см. Мазуркевич [7]; для замкнутых отображений см. Вайнштейн [1]).

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — полные сепарабельные пространства, $A \subset \mathscr{X}$ и отображение $f: A \to f(A)$ открыто. Тогда отображение f имеет непрерывное открытое продолжение $f^*: A^* \to f^*(A^*)$, где A^* — некоторое G_δ-множество.

Приложения к проблемам мощности. Утверждения 2—4 носят вспомогательный характер; они послужат нам для доказательства теоремы 5[1]).

Теорема 2. *Пусть задана функция, которая любому $\xi < \omega_\delta$ ставит в соответствие множество F_ξ мощности $\aleph_\delta$; тогда существует функция G_ξ, где $\xi < \omega_\delta$, такая, что*

$$(1) \qquad G_\xi \cap G_{\xi'} = 0 \quad \text{для} \quad \xi \neq \xi', \qquad G_\xi \subset F_\xi, \qquad \overline{\overline{G}}_\xi = \aleph_\delta.$$

В самом деле, расположим все $\xi < \omega_\delta$ в трансфинитную последовательность $\{a_\eta\}$ типа ω_δ, каждый член которой повторяется $\aleph_\delta$ раз. Любому $\eta < \omega_\delta$ поставим в соответствие элемент $p_\eta \in F_{\alpha_\eta}$ таким образом, что

$$(2) \qquad p_\eta \neq p_{\eta'} \quad \text{при} \quad \eta' < \eta.$$

Обозначим через G_ξ множество элементов p_η, таких, что $\alpha_\eta = \xi$. Пусть теперь $p_\eta \in G_\xi \cap G_{\xi'}$; тогда $\alpha_\eta = \xi$ и $\alpha_\eta = \xi'$, откуда $\xi = \xi'$, и, следовательно, первое из соотношений (1) выполнено.

Чтобы установить второе соотношение, допустим, что $p_\eta \in G_\xi$. Следовательно, $\alpha_\eta = \xi$. С другой стороны, согласно определению последовательности $\{p_\eta\}$, имеем $p_\eta \in F_{\alpha_\eta}$. Следовательно, $p_\eta \in F_\xi$, и поэтому $G_\xi \subset F_\xi$.

---

[1]) Эта теорема была сформулирована Линденбаумом [2], [3] и доказана Серпинским [63].

См. также Варашкевич [2].

Множество всех таких η, что $\alpha_\eta = \xi$, имеет при фиксированном ξ мощность $\aleph_\delta$. Согласно (2), такую же мощность имеет множество всех $\acute{p}_\eta$, удовлетворяющих этому равенству, т. е. множество G_ξ.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X}$ — некоторое (бесконечное) множество мощности $\mathfrak{m}$; тогда существует семейство $\boldsymbol{F}$ подмножеств множества $\mathscr{X}$ мощности $2^{\mathfrak{m}}$, такое, что из соотношений $X \in \boldsymbol{F}$, $Y \in \boldsymbol{F}$ и $X \neq Y$ вытекает, что $\overline{\overline{X - Y}} = \mathfrak{m}$.*

Более того, *пусть задано отображение, которое каждому $x \in \mathscr{X}$ ставит в соответствие подмножество $A_x \subset \mathscr{X}$ мощности $\mathfrak{m}$; тогда семейство $\boldsymbol{F}$ можно подчинить следующему более точному условию: из соотношений $X \in \boldsymbol{F}$, $Y \in \boldsymbol{F}$ и $X \neq Y$ следует, что $\overline{\overline{(A_x \cap X) - Y}} = \mathfrak{m}$, каково бы ни было $x \in \mathscr{X}$.*

В силу равенства $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, множество $\mathscr{X}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathscr{X} = \bigcup_{x \in \mathscr{X}} M_x, \qquad \overline{\overline{M}}_x = \mathfrak{m} \quad \text{и} \quad M_x \cap M_{x'} = 0 \quad \text{при} \quad x \neq x'.$$

Так как $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m}$, имеем

$$M_x = P_x \cup Q_x, \qquad \overline{\overline{P}}_x = \mathfrak{m} = \overline{\overline{Q}}_x \quad \text{и} \quad P_x \cap Q_x = 0.$$

Для $X \subset \mathscr{X}$ положим

$$F(X) = \Bigl(\bigcup_{x \in X} P_x\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{x \in X^c} Q_x\Bigr), \quad \text{где} \quad X^c = \mathscr{X} - X,$$

и обозначим через $\boldsymbol{F}$ семейство множеств $F(X)$, где X пробегает семейство всех подмножеств пространства $\mathscr{X}$.

Отметим, что если $x_0 \in X - Y$, то

$$P_{x_0} \subset F(X) - F(Y), \quad \text{откуда} \quad \overline{\overline{F(X) - F(Y)}} = \mathfrak{m},$$

и

$$Q_{x_0} \subset F(Y) - F(X), \quad \text{откуда} \quad \overline{\overline{F(Y) - F(X)}} = \mathfrak{m}.$$

Таким образом, первая часть утверждения 3 доказана. Для доказательства второй части в соответствии с теоремой 2 положим $\overset{*}{A}_x \cap \overset{*}{A}_{x'} = 0$ для $x \neq x'$, $\overset{*}{A}_x \subset A_x$ и $\overline{\overline{\overset{*}{A}}}_x = \mathfrak{m}$.

Определим семейство $\boldsymbol{F}^*$ подмножеств пространства $\mathscr{X}$ мощности $2^{\mathfrak{m}}$, такое, что из соотношений $X \in \boldsymbol{F}^*$, $Y \in \boldsymbol{F}^*$, $X \neq Y$ и $x \in \mathscr{X}$ вытекает равенство $\overline{\overline{(\overset{*}{A}_x \cap X) - Y}} = \mathfrak{m}$.

Так как множества $\mathscr{X}$ и $\overset{*}{A}_x$ имеют мощность $\mathfrak{m}$, то для каждого $x \in \mathscr{X}$ существует взаимно однозначное отображение $f_x : \mathscr{X} \to \overset{*}{A}_x$. Каждому $X \in \boldsymbol{F}$ поставим в соответствие множество $S(X) = \bigcup_{x \in \mathscr{X}} f_x(X)$ и обозначим через $\boldsymbol{F}^*$ семейство всех множеств $S(X)$, где X пробегает семейство $\boldsymbol{F}$. Так как $f_x(X) \subset A_x^*$ и $A_x^* \cap A_{x'}^* = 0$ при $x \neq x'$, мы имеем

$$A_{x_0}^* \cap S(X) = A_{x_0}^* \cap \Big(\bigcup_x f_x(X)\Big) = A_{x_0}^* \cap f_{x_0}(X) = f_{x_0}(X),$$

откуда

$$(3) \qquad \big(A_{x_0}^* \cap S(X)\big) - S(Y) = f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y).$$

Так как отображение f_{x_0} взаимно однозначно, имеем

$$f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y) = f_{x_0}(X - Y),$$

откуда

$$(4) \qquad \overline{\overline{f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y)}} = \overline{\overline{f_{x_0}(X - Y)}} = \overline{\overline{X - Y}}.$$

Пусть теперь $S(X) \neq S(Y)$, тогда $X \neq Y$, откуда $\overline{\overline{X - Y}} = \mathfrak{m}$ и, в силу (3) и (4),

$$\overline{\overline{\big(A_{x_0}^* \cap S(X)\big) - S(Y)}} = \mathfrak{m}, \quad \text{откуда} \quad \overline{\overline{(A_{x_0} \cap S(X)) - S(Y)}} = \mathfrak{m}.$$

То же равенство показывает, что из неравенства $X \neq Y$ следует неравенство $S(X) \neq S(Y)$, откуда $\overline{\overline{F^*}} = \overline{\overline{F}} = 2^{\mathfrak{m}}$.

Теорема 4[1]). *Пусть $\mathscr{X}$ — бесконечное множество мощности $\mathfrak{m}$ и Φ — семейство мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ отображений подмножеств множества $\mathscr{X}$ в подмножества множества $\mathscr{X}$, имеющие мощность $\mathfrak{m}$; тогда существует семейство $\boldsymbol{F}$ мощности $2^{\mathfrak{m}}$ подмножеств из $\mathscr{X}$, такое, что из соотношений $X \in \boldsymbol{F}$, $Y \in \boldsymbol{F}$ и $X \neq Y$ следует, что $\overline{\overline{f(X) - Y}} = \mathfrak{m}$, какова бы ни была функция $f \in \Phi$.*

Положим $\mathfrak{m} = \aleph_\delta$ и расположим элементы семейства Φ в трансфинитную последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \omega_\delta)$ таким образом, что любой элемент множества Φ повторяется $\mathfrak{m}$ раз.

Для каждого фиксированного f любому значению y функции f поставим в соответствие элемент x, такой, что $f(x) = y$, и для $f = f_\alpha$ обозначим через A_α множество элементов x, выбранных таким образом. Тогда $\overline{\overline{A_\alpha}} = \mathfrak{m}$ и сужение $g_\alpha = f_\alpha | A_\alpha$ взаимно однозначно.

Существует трансфинитная последовательность $p_0, p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \omega_\delta)$, такая, что $p_\alpha \in A_\alpha$ и

1° $p_\alpha \neq p_\xi$ при $\xi < \alpha$;

2° $p_\alpha \neq g_\eta(p_\xi)$ при $\xi < \alpha$ и $\eta < \alpha$;

3° $g_\eta(p_\alpha) \neq p_\xi$ при $\xi < \alpha$ и $\eta < \alpha$.

---

[1]) См. Куратовский [40], а также цит. раб. Линденбаума и Серпинского.

В самом деле, множество тех p_ξ, для которых $\xi<\alpha$, тех $g_\eta(p_\xi)$, для которых $\xi<\alpha$ и $\eta<\alpha$, и $g_\eta^{-1}(p_\xi)$ имеют при фиксированном α мощность $<\aleph_\delta$, тогда как $\overline{\overline{A}}_\alpha=\aleph_\delta$.

Так как элементы последовательности $\{p_\alpha\}$, $\alpha<\omega_\delta$, отличны друг от друга (согласно 1°), то множество $P=\{p_\alpha\}$ имеет мощность $\mathfrak{m}$. Более того, положим $\overset{*}{A}_\alpha=P\cap A_\alpha$; тогда $\overline{\overline{\overset{*}{A}}}_\alpha=\mathfrak{m}$, так как каждое A_α повторяется $\mathfrak{m}$ раз в последовательности $\{A_\xi\}$, $\xi<\omega_\delta$. Следовательно, в предложении 3 можно заменить пространство $\mathscr{X}$ множеством P и множество A_x множеством $\overset{*}{A}_\alpha$. Отсюда вытекает существование семейства F подмножеств множества P мощности $2^{\mathfrak{m}}$, такого, что из соотношений $X\in F$, $Y\in F$ и $X\neq Y$ вытекает равенство $\overline{\overline{\overset{*}{A}_\alpha\cap X-Y}}=\mathfrak{m}$, каково бы ни было $\alpha<\omega_\delta$. Покажем теперь, что из этого равенства следует равенство $\overline{\overline{f_\alpha(X)-Y}}=\mathfrak{m}$ (чем и завершается доказательство).

Так как множество $(\overset{*}{A}_\alpha\cap X)-Y$ имеет мощность $\aleph_\delta$, выберем последовательность $\{p_{\beta_\eta}\}$ элементов этого множества, где $\alpha<\eta<\omega_\delta$ и $\eta\leqslant\beta_\eta$. Поскольку $p_{\beta_\eta}\in A_\alpha$, функция g_α определена на элементах p_{β_η} и $g_\alpha(p_{\beta_\eta})\in f_\alpha(X)$.

Так как эта функция взаимно однозначна, множество всех элементов $g_\alpha(p_{\beta_\eta})$ с переменным η имеет мощность $\mathfrak{m}$. Остается доказать, что $g_\alpha(p_{\beta_\eta})\notin Y$.

Допустим противное. Так как $Y\subset P$, то, в силу допущения, существует $\zeta<\omega_\delta$, такое, что $g_\alpha(p_{\beta_\eta})=p_\zeta$. Следовательно, $p_\zeta\in Y$ и, так как, по предположению, $p_{\beta_\eta}\notin Y$, то $\zeta\neq\beta_\eta$.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $\beta_\eta<\zeta$, тогда $\alpha<\zeta$. Итак, условия

$$p_\zeta=g_\alpha(p_{\beta_\eta}),\qquad \beta_\eta<\zeta \quad\text{и}\quad \alpha<\zeta$$

несовместимы, согласно 2°.

2) Пусть $\zeta<\beta_\eta$, тогда, согласно 3°, несовместимы следующие условия:

$$g_\alpha(p_{\beta_\eta})=p_\zeta,\qquad \zeta<\beta_\eta \quad\text{и}\quad \alpha<\beta_\eta.$$

Таким образом, в обоих случаях мы приходим к противоречию.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ — полное сепарабельное пространство мощности $\mathfrak{c}$; тогда существует семейство F мощности $2^{\mathfrak{c}}$ множеств, ни одно из которых не является непрерывным образом другого.*

Более того, *из соотношений $X\in F$, $Y\in F$ и $X\neq Y$ следует, что $\overline{\overline{f(X)-Y}}=\mathfrak{c}$, какова бы ни была непрерывная функция f,* *определенная на множестве $\mathscr{X}$ и допускающая множество значений мощности* $\mathfrak{c}$.

Пусть Φ — семейство непрерывных отображений G_δ-множеств в подмножества множества $\mathscr{X}$, имеющие мощность $\mathfrak{c}$. Тогда, согласно § 30, III и § 24, VI, имеем $\overline{\overline{\Phi}}=\mathfrak{c}$. Семейство $\boldsymbol{F}$ из теоремы 4 и есть искомое семейство.

В самом деле, соотношение $\overline{\overline{f(X)-Y}}=\mathfrak{c}$ означает, что $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{c}$; следовательно, никакое множество, являющееся элементом семейства $\boldsymbol{F}$, нельзя отобразить ни в какое другое множество при помощи отображения, принимающего менее чем $\mathfrak{c}$ значений. С другой стороны, если f — непрерывное отображение, определенное на множестве X и принимающее $\mathfrak{c}$ значений, то существуют, в силу 1, G_δ-множество, содержащее множество X, и непрерывное продолжение f^* отображения f на это множество. Поэтому $f^*\in\Phi$ и, следовательно, $\overline{\overline{f^*(X)-Y}}=\mathfrak{c}$ для $X\in\boldsymbol{F}$, $Y\in\boldsymbol{F}$ и $X\neq Y$. Так как $f^*(X)=f(X)$, мы приходим к требуемому заключению.

Теорема 6. *В интервале $\mathscr{J}$ существует несчетное множество, для которого $\mathscr{J}$ не является непрерывным образом.*

Мы выведем эту теорему из следующего утверждения, которое будет установлено с помощью гипотезы континуума.

Теорема 7 (Серпинский [45]). *Пусть $\mathscr{X}$ — полное сепарабельное (несчетное) пространство, и пусть $\boldsymbol{F}$ — некоторое семейство мощности $\leqslant\aleph_1$ несчетных подмножеств пространства $\mathscr{X}$; тогда в пространстве $\mathscr{X}$ существует несчетное множество P, такое, что никакой элемент семейства $\boldsymbol{F}$ не является непрерывным образом множества P.*

Более точно: *если $Y\in\boldsymbol{F}$, то $Y-f(P)\neq 0$, какова бы ни была непрерывная функция f, определенная на множестве P.*

Все пары (f, Y), где $Y\in\boldsymbol{F}$ и f — непрерывная функция, определенная на некотором G_δ-множестве, множество значений которой содержит множество Y, расположим в трансфинитную последовательность типа $\Omega:\{f_\alpha, Y_\alpha\}$, $\alpha<\Omega$ (существование такой последовательности вытекает из того, что семейство G_δ-множеств, так же как и семейство непрерывных функций, определенных на G_δ-множествах, имеют мощность $\mathfrak{c}$, следовательно, в силу гипотезы континуума, мощность $\aleph_1$).

При фиксированном α расположим множество Y_α в некоторую трансфинитную последовательность $\{y_{\alpha,\beta}\}$, где $\beta<\Omega$, и положим $E_{\alpha,\beta}=\overset{-1}{f_\alpha}(y_{\alpha,\beta})$. Так как функция f_α непрерывна, то множество $E_{\alpha,\beta}$, будучи замкнутым в множестве определения функции f_α, обладает свойством Бэра. Так как, кроме того, из неравенства $\beta\neq\beta'$ следует, что $E_{\alpha,\beta}\cap E_{\alpha,\beta'}=0$, то применимо следствие 7 из § 34, IV. Отсюда вытекает существование последовательности $\{\gamma_\alpha\}$, где $\alpha<\Omega$, и несчетного множества P, такого, что $P \cap E_{\alpha, \gamma_\alpha}=0$, каково бы ни было α.

Пусть теперь $Y \in \boldsymbol{F}$ и f — непрерывная функция. Допустим, что $Y \subset f(P)$. Пусть в соответствии с теоремой 1 f^* — непрерывное продолжение сужения $f|P$ на некоторое G_δ-множество. Тогда имеем $Y \subset f(P) \subset f^*(P)$. Следовательно, пара (f^*, Y) принадлежит последовательности $\{f_\alpha, Y_\alpha\}$, и поэтому при некотором α имеем $f^*=f_\alpha$ и $Y=Y_\alpha$.

Так как $P \cap E_{\alpha, \gamma_\alpha}=0$, т. е. $P \cap f_\alpha^{-1}(y_{\alpha, \gamma_\alpha})=0$, то $y_{\alpha, \gamma_\alpha} \notin f_\alpha(P)$, следовательно, $y_{\alpha, \gamma_\alpha} \in Y_\alpha - f_\alpha(P) \subset Y - f(P)$.

Замечания. 1. Теорема 6 следует из теоремы 7, если положить $\mathscr{X}=\mathscr{J}$ и $\boldsymbol{F}=(\mathscr{J})$. Доказательство теоремы 6 не опирается на гипотезу континуума, ибо если предположить, что $\mathfrak{c}>\aleph_1$, то теорема 6 очевидна. Тем не менее без гипотезы континуума нельзя доказать существование множества мощности $\mathfrak{c}$, для которого интервал не является непрерывным образом.

2. Неравенство $Y-f(P) \neq 0$ в теореме 7 может быть заменено равенством $\overline{\overline{Y-f(P)}}=\aleph_1$. В самом деле, любое множество $Y \in \boldsymbol{F}$ разложим на $\aleph_1$ непересекающихся подмножеств мощности $\aleph_1$ и обозначим через $\boldsymbol{F}^*$ семейство, которое получается из семейства $\boldsymbol{F}$ заменой каждого множества Y его подмножествами. Применяя теорему 7 к семейству $\boldsymbol{F}^*$, получим требуемый результат.

3. Если семейство непрерывных функций заменить семейством произвольных функций, имеющим мощность $\leqslant \aleph_1$ (или даже $\leqslant \aleph_0$), то теорема 6 становится неверной. В самом деле, имеет место следующая теорема (эквивалентная гипотезе континуума): *существует счетное семейство* Φ *отображений* $f: \mathscr{J} \to \mathscr{J}$, *такое, что любому несчетному подмножеству* $P \subset \mathscr{J}$ *соответствует отображение* $f \in \Phi$, *при котором* $f(P)=\mathscr{J}$ (см. Браун и Серпинский [1]).

4. Понятие *типа непрерывности* аналогично понятию топологического типа. Два множества имеют один и тот же тип непрерывности, если каждое из них является непрерывным образом другого (см. Серпинский [39]). Согласно теореме 5, *в любом полном сепарабельном пространстве мощности* $\mathfrak{c}$ *существует* $2^{\mathfrak{c}}$ *различных типов непрерывности*[1]).

II. Продолжение гомеоморфизмов.

Теорема Лаврентьева [1], [2]. *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — *полные метрические пространства, пусть* $A \subset \mathscr{X}$, $B \subset \mathscr{Y}$, *и пусть* $f: A \to B$ — *гомеоморфизм; тогда существует продолжение*

---

[1]) О других проблемах, касающихся типов непрерывности, см. Варашкевич [1], цит. раб. Серпинского, а также Аронщайн [1].

отображения f до гомеоморфизма двух G_δ-множеств, расположенных в этих пространствах.

В самом деле, пусть f — гомеоморфизм, определенный на множестве A, такой, что $f(A)=B$. Положим $g=f^{-1}$. Пусть теперь f^* — непрерывное продолжение отображения f на некоторое G_δ-множество A^* (см. п. I, 1). Аналогичный смысл придадим символам g^* и B^* по отношению к функции g. Положим

$$I=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[y=f^*(x)] \quad \text{и} \quad J=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[x=g^*(y)].$$

Обозначим через A_1 и B_1 проекции множества $I\cap J$ соответственно на ось $\mathscr{X}$ и на ось $\mathscr{Y}$. Очевидно, что отображение $f^*: A_1 \to B_1$ есть гомеоморфизм.

Остается доказать, что A_1 и B_1 — множества типа G_δ. Положим $h(x)=[x, f^*(x)]$; тогда $A_1=h^{-1}(J)$. Так как отображение h непрерывно и множество J замкнуто в $\mathscr{X}\times B^*$ (§ 15, V, 2) и, следовательно, является G_δ-множеством в пространстве $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, то множество $h^{-1}(J)$ есть G_δ-множество в A^* (§ 13, IV (5)) и, следовательно, в $\mathscr{X}$. Точно так же докажем, что B_1 есть G_δ-множество в пространстве $\mathscr{Y}$.

Докажем теперь такое следствие теоремы 1 из п. I.

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — метрические пространства (причем пространство $\mathscr{Y}$ полное), и пусть $A\subset\mathscr{X}$, а отображение $f: A\to\mathscr{Y}$ является гомеоморфизмом; тогда его можно продолжить до гомеоморфизма, определенного на G_δ-множестве.*

В самом деле, обозначим через $\mathscr{X}^*$ полное пространство, которое топологически содержит пространство $\mathscr{X}$ (см. § 33, VII). Гомеоморфизм f допускает продолжение на множество A_1, которое является G_δ-множеством относительно пространства $\mathscr{X}^*$. Имеет место включение $A\subset A_1\subset\mathscr{X}^*$. Множество $A_2=A_1\cap\mathscr{X}$ — искомое множество: оно является G_δ-множеством (в $\mathscr{X}$), содержит множество A и продолженное отображение является гомеоморфизмом на A_2.

Замечания. 1. Множество $f(A_2)$ может не быть типа G_δ. В самом деле, пусть $\mathscr{X}=A$ — множество рациональных чисел интервала $\mathscr{J}$, $\mathscr{Y}=\mathscr{J}$ и $f(x)=x$.

2. Теорема Лаврентьева позволяет установить следующую теорему, которая другим путем доказана в § 27, IV (теорема 1): *любое n-мерное множество (расположенное в метрическом сепарабельном пространстве) содержится в некотором n-мерном G_δ-множестве; следовательно, оно топологически содержится в полном n-мерном пространстве*[1]).

[1]) Как будет показано в томе 2, термин *полное* можно заменить термином *компактное*.

Доказательство (см. Тумаркин [3]) сводится к случаю, когда $n=0$ (см. § 27, IV, теорема 1). Итак, пусть A — нульмерное множество; тогда существует гомеоморфизм между множеством A и некоторым подмножеством канторовского множества $\mathscr{C}$ (§ 26, IV, теорема 2). Этот гомеоморфизм допускает продолжение, в силу предыдущего следствия, на некоторое G_δ-множество; это последнее множество является нульмерным, так как оно гомеоморфно подмножеству нульмерного множества $\mathscr{C}$.

III. Топологическая характеризация полных пространств.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное метрическое пространство. Любое его подмножество, гомеоморфное полному пространству $\mathscr{Y}$, является G_δ-множеством* [1]).

Действительно, пусть в предыдущем следствии f — отображение *на* пространство $\mathscr{Y}$; тогда продолжение f^* отображения f совпадает с f (потому что отображение f^* взаимно однозначно); итак, область задания отображения f (т. е. множество A) совпадает с областью задания отображения f^*, являющейся G_δ-множеством [2]).

Замечание. Из этой теоремы и теоремы из § 33, VI, мы заключаем, что *подмножество полного пространства гомеоморфно полному пространству* (т. е. топологически полно) *тогда и только тогда, когда оно является G_δ-множеством.* Отсюда вытекает, что *любое множество, гомеоморфное G_δ-множеству, содержащемуся в полном пространстве, есть G_δ-множество* [3]).

С топологической точки зрения *полные сепарабельные пространства — это не что иное, как G_δ-множества, расположенные в гильбертовом кубе $\mathscr{J}^{\aleph_0}$.*

Действительно, в силу теоремы Урысона, любое сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно подмножеству куба $\mathscr{J}^{\aleph_0}$ (§ 22, II); если это пространство, кроме того, полно, то это подмножество, как мы показали, есть некоторое G_δ-множество.

IV. Внутренняя инвариантность различных семейств множеств.

Согласно § 13, IX, свойство P множеств называется внутренне инвариантным относительно полных пространств, если всякое подмножество полного пространства, гомеоморфное множеству, обладаю-

[1]) Это утверждение представляет собой частный случай инвариантности борелевского класса (см. п. IV).

[2]) Более прямое доказательство см. в работе Серпинского [32].

[3]) Теорема Мазуркевича [1]. См. также Серпинский [25]. Эта теорема может быть получена также непосредственно из теоремы Лаврентьева без использования теоремы § 33, VI, см. цит. раб. Лаврентьева.

щему свойством P и расположенному в том же или в другом полном пространстве, также обладает свойством P.

Теорема (Лаврентьев [1]). *Пусть* P — *внутренне инвариантное свойство, такое, что если* X *обладает свойством* P, *то любое множество типа* G_δ *в* X *также обладает этим свойством. При этих предположениях следующие свойства являются внутренне инвариантными:*

1° *свойство* P_σ *быть объединением счетного семейства множеств, обладающих свойством* P;

2° *свойство* P_δ *быть пересечением счетного семейства множеств, обладающих свойством* P;

3° *свойство* P_ρ *быть разностью двух множеств, обладающих свойством* P;

4° *свойство* P_c *быть дополнением к множеству, обладающему свойством* P, *при дополнительном предположении, что множество, обладающее свойством* P, *сохраняет это свойство, если к нему добавить* F_σ*-множество.*

Инвариантность свойства P_σ очевидна (она не зависит от предположения, что относительные G_δ-множества обладают свойством P).

Чтобы доказать 2°, положим $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n обладают свойством P; пусть отображение $f: A \to B$ — гомеоморфизм. В силу теоремы Лаврентьева, гомеоморфное отображение $f: A \to B$ может быть продолжено на G_δ-множество, которое мы обозначим через A^*. Следовательно, $A = A \cap A^*$, откуда $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A^*)$ и $B = f(A) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(A_n \cap A^*)$, поскольку отображение f взаимно однозначно. Так как A^* есть G_δ-множество, то множества $A_n \cap A^*$ и $f(A_n \cap A^*)$ обладают свойством P, поэтому множество B обладает свойством P_δ.

Доказательство утверждений 3° и 4° аналогично. Пусть $A = A_1 - A_2$, и пусть символы B, f и A^* имеют тот же смысл, что и выше. Тогда

$$A = A \cap A^* = (A_1 \cap A^*) - (A_2 \cap A^*),$$

откуда $B = f(A) = f(A_1 \cap A^*) - f(A_2 \cap A^*)$,

что доказывает 3°.

Пусть, наконец, $A = -A_1$ (дополнение к A_1). Тогда

$$A = A^* \cap (-A_1) = A^* - (A_1 \cap A^*)$$

и

$$B = f(A) = f(A^*) - f(A_1 \cap A^*) = -\{[-f(A^*)] \cup f(A_1 \cap A^*)\}.$$

Так как $f(A^*)$ есть G_δ-множество, то $-f(A^*)$ есть F_σ-множество. Следовательно, множество в фигурных скобках обладает свойством P, а множество B обладает свойством P_c.

Из 1°, 2°, 4° и внутренней инвариантности G_δ-множеств (установленной в п. III) вытекает

Следствие 1 [1]. *Свойства быть борелевским множеством класса G_α, $\alpha > 0$ (G_δ, $G_{\delta\sigma}$ и т. д.), и борелевским множеством класса F_α, $\alpha > 1$ ($F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$ и т. д.), являются внутренне инвариантными.*

Замечание 1. Достаточно предположить, что A—подмножество полного пространства, тогда как множество B (гомеоморфное A) можно считать подмножеством произвольного метрического пространства $\mathscr{X}$. В самом деле, если $\mathscr{X}^*$ — пополнение пространства $\mathscr{X}$ (см. § 33, VII), то множество B является, в силу следствия 1, множеством класса G_δ (класса F_α) относительно пространства $\mathscr{X}^*$, а следовательно, и относительно пространства $\mathscr{X}$, которое содержит множество B.

Следствие 2. *Свойство Бэра в узком смысле является внутренне инвариантным.*

Действительно, для того чтобы множество A обладало этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы любое замкнутое подмножество Z в A было объединением борелевского множества и множества первой категории в Z (§ 11, VI).

Замечание 2. Инвариантность свойства P_ρ может служить для доказательства внутренней инвариантности *разложимости в знакочередующиеся ряды* (конечные или трансфинитные) множеств класса G_α (или класса F_α) [2]. Например, свойство быть разностью двух G_δ-множеств является внутренне инвариантным (см. Серпинский [15]).

V. Приложения к топологическим рангам.

Теорема 1. *Во всяком полном сепарабельном пространстве мощности $\mathfrak{c}$ существует семейство, состоящее из $2^{\mathfrak{c}}$ множеств, топологические ранги которых попарно несравнимы* [3].

Эта теорема легко следует из теоремы I, 5. Более непосредственным образом ее можно вывести из следующей теоремы общей теории множеств.

---

[1]) Это следствие было установлено без применения теоремы Лаврентьева для некоторых частных случаев (впрочем, при дополнительных предположениях на пространства); кроме вышеупомянутых работ Мазуркевича и Серпинского, см. Серпинский [20] (случай множеств $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ...) и Мазуркевич [4]. Дальнейшие обобщения см. в работах: Хаусдорф [5a], Тайманов [1], [2], Келдыш [1], Вайнштейн [3].

[2]) Ср. с „малыми классами" Бореля, § 37.

[3]) См. Куратовский [10], Серпинский [44], Банах [9].

Пусть Φ — некоторое семейство отображений подмножеств данного множества $\mathscr{X}$ в подмножества множества $\mathscr{X}$. Пусть X и Y — подмножества множества $\mathscr{X}$; назовем их *несравнимыми* (по отношению к семейству Φ), если в Φ не существует никакого отображения одного из этих множеств в подмножество другого. Имеет место

Теорема 2. Пусть Φ — *некоторое семейство взаимно однозначных отображений и* $\overline{\overline{\mathscr{X}}}=\overline{\overline{\Phi}}=\mathfrak{m}$; *тогда существует семейство* $\boldsymbol{F}$, *состоящее из* $2^{\mathfrak{m}}$ *попарно несравнимых подмножеств множества* $\mathscr{X}$.

Множество $\mathscr{X}$, а также семейство Φ, пополненное всеми функциями, обратными к содержащимся в Φ, расположим в две трансфинитные последовательности $\{x_\alpha\}$ и $\{f_\alpha\}$ наименьшего возможного порядкового типа.

Пусть $P=\{p_\alpha\}$ — трансфинитная последовательность, определенная по индукции таким образом, что p_α отлично от всех p_ξ и от всех $f_\xi(p_\eta)$, если $\xi<\alpha$ и $\eta<\alpha$. Пусть $\boldsymbol{F}$ — семейство подмножеств множества P, такое, что $\overline{\overline{\boldsymbol{F}}}=2^{\mathfrak{m}}$ и $\overline{\overline{X-Y}}=\mathfrak{m}$ для любой пары различных множеств, принадлежащих семейству $\boldsymbol{F}$ (см. I, 3).

Допустим, что существует функция $f_\gamma\in\Phi$, такая, что $f_\gamma: X\xrightarrow{\text{на}}Y_1$, где $X\in\boldsymbol{F}$ и $Y_1\subset Y\in\boldsymbol{F}$. Пусть $f_\gamma^{-1}=f_\xi$. Покажем, что из соотношений $p_\alpha\in X-Y$ и $\xi<\alpha$ следует неравенство $\alpha<\gamma$, откуда получим, что $\overline{\overline{X-Y}}<\mathfrak{m}$, вопреки предположению. Положим $f_\gamma(p_\alpha)=p_\eta$, следовательно, $p_\alpha=f_\xi(p_\eta)$. Тогда $\eta\geqslant\alpha$, согласно определению p_α. С другой стороны, $\eta\neq\alpha$, ибо $p_\eta\in Y$ и $p_\alpha\notin Y$. Соотношения $\alpha<\eta$ и $p_\eta=f_\gamma(p_\alpha)$ влекут за собой неравенство $\eta\leqslant\gamma$, откуда $\alpha<\gamma$.

Теорема 2 установлена. Чтобы получить отсюда теорему 1, возьмем в качестве Φ семейство всех гомеоморфизмов, определенных на $\boldsymbol{G}_\delta$-подмножествах пространства $\mathscr{X}$. Допустим, что $X\in\boldsymbol{F}$, $X\neq Y\in\boldsymbol{F}$ и что X топологически содержится в Y; тогда, согласно теореме Лаврентьева, существует гомеоморфизм f, определенный на $\boldsymbol{G}_\delta$-множестве, содержащем X, такой, что $f(X)\subset Y$. Но это невозможно, так как $f\in\Phi$ и X и Y несравнимы по отношению к Φ.

Замечания. Аналогичным образом устанавливается *существование трансфинитной последовательности мощности* $>\mathfrak{c}$ *множеств, топологический ранг которых возрастает, а также трансфинитной последовательности мощности* $\mathfrak{c}$ *множеств, топологический ранг которых убывает* (см. Серпинский [44], Серпинский и Куратовский [3]).

VI. Продолжение B-измеримых функций.

Теорема (Куратовский [20]). *Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное метрическое пространство, $\mathscr{Y}$ — полное сепарабельное пространство и $A \subset \mathscr{X}$. Пусть далее $f: A \to \mathscr{Y}$ — отображение класса α; тогда его можно продолжить (без изменения класса) на некоторое множество A^* мультипликативного класса $\alpha+1$.*

В частности, *если множество A принадлежит мультипликативному классу $\alpha > 0$, то функция f может быть продолжена на все пространство $\mathscr{X}$* [1]).

Так как для $\alpha = 0$ теорема установлена в п. I, положим $\alpha > 0$. Согласно § 31, VIII, 3, существует последовательность функций f_n класса α, определенных на множестве A, равномерно сходящаяся к функции f, причем множества $f_n(A)$ дискретны. Тогда можно положить

$$(1) \qquad |f_n(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2^k}, \text{ каково бы ни было } n \geqslant k,$$

и $f_n(A) = [y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^i, \ldots]$, где $\{y_n^i\}$ — конечная или бесконечная последовательность различных элементов.

Пусть $B_{i_1 \ldots i_n} = [f_1^{-1}(y_1^{i_1})] \cap \ldots \cap [f_n^{-1}(y_n^{i_n})]$. Так как каждое из множеств $f_k^{-1}(y_k^i)$ является двусторонним множеством класса α относительно A (поскольку точка y_k^i, как изолированная точка множества $f_k(A)$, является открыто-замкнутым множеством в этом множестве), то условия теоремы 2, § 30, VIII, выполнены.

Следовательно, для любого n существует множество A_n мультипликативного класса $\alpha+1$ и система $\{C_{i_1 \ldots i_n}\}$ двусторонних множеств класса α относительно множества A_n, такая, что:

1° $C_{i_1 \ldots i_n} \cap C_{j_1 \ldots j_k} = 0$ при $(i_1 \ldots i_k) \neq (j_1 \ldots j_k)$ и $k \leqslant n$;

2° $A_n = \bigcup C_{i_1 \ldots i_n}$;

3° $A \cap C_{i_1 \ldots i_n} = B_{i_1 \ldots i_n}$;

4° если $B_{i_1 \ldots i_n} = 0$, то $C_{i_1 \ldots i_n} = 0$.

Более того (согласно второй части предыдущей теоремы), если множество A принадлежит мультипликативному классу α, то $A_n = \mathscr{X}$, так как равенство

$$A = f_k^{-1} f_k(A) = f_k^{-1}(y_k^1) \cup f_k^{-1}(y_k^2) \cup \ldots$$

имеет место для любого k, и поэтому $A = \bigcup B_{i_1 \ldots i_n}$, каково бы ни было n. Следовательно, множество $A^* = \bigcap\limits_n A_n$ принадлежит

[1]) По поводу второй части теоремы, если она относится к функциям с действительными значениями, см. Хаусдорф [5].

мультипликативному классу $\alpha+1$; с другой стороны, в случае, когда множество A принадлежит мультипликативному классу α (следовательно, когда $A_n=\mathcal{X}$), имеем $A^*=\mathcal{X}$.

Продолжим каждую функцию f_n на множество A_n, полагая $f_n(x)=y_n^{i_n}$, если $x\in C_{i_1\ldots i_n}$. Множество значений функции f_n, определенной таким образом, счетно, поэтому чтобы доказать, что эта функция принадлежит классу α (на A_n), достаточно доказать, что множество $f_n^{-1}(y_n^i)$ принадлежит аддитивному классу α относительно A_n при фиксированных n и i. Но это следует непосредственно из равенства $f_n^{-1}(y_n^i)=\bigcup C_{i_1\ldots i_{n-1}i}$, где объединение берется по всем системам из $n-1$ индексов.

Установив это, мы покажем, что (продолженные) функции f_n равномерно сходятся на множестве A^*, а именно что неравенство (1) имеет место для любого $x_0\in A^*$.

В самом деле, пусть $x_0\in C_{i_1\ldots i_n}$ и $x_0\in C_{j_1\ldots j_k}$ при $k\leqslant n$. Согласно 1°, $i_1=j_1, \ldots, i_k=j_k$. Пусть $x\in B_{i_1\ldots i_n}$, тогда

$$x\in f_n^{-1}(y_n^{i_n}), \quad \text{откуда} \quad f_n(x)=y_n^{i_n}=f_n(x_0).$$

Из равенства $i_k=j_k$ вытекает, что

$$x\in f_k^{-1}(y_k^{j_k}), \quad \text{откуда} \quad f_k(x)=y_k^{j_k}=f_k(x_0).$$

Так как $x\in A$, то для x справедливо неравенство (1). Это же верно для точки x_0, поскольку $f_n(x)=f_n(x_0)$ и $f_k(x)=f_k(x_0)$. Так как пространство $\mathcal{Y}$ полно, положим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Таким образом, функция f определена для любого $x\in A^*$ и, как предел равномерно сходящейся последовательности функций класса α, она также принадлежит классу α (§ 31, VIII, 2).

Следствие [1]). *При тех же предположениях о пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ любая функция f класса α, определенная на A, может быть продолжена на все пространство таким образом, что она становится функцией класса* $\alpha+1$.

В самом деле, согласно первой части предшествующей теоремы, существует множество E мультипликативного класса $\alpha+1$, на которое функция f может быть продолжена без изменения своего класса (для $\alpha=0$ см. п. I), а согласно второй части той же теоремы,

[1]) В случае, когда $\mathcal{Y}$ — пространство действительных чисел, см. Серпинский [42], Алексич [1].

функция f, продолженная таким образом, может быть продолжена на все пространство, как функция класса $\alpha+1$.

VII. Продолжение гомеоморфизма класса (α, β). Следующие утверждения позволяют обобщить утверждения п. II — IV для сепарабельных пространств.

Теорема (Куратовский [21]). *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — полные сепарабельные пространства, и пусть $A \subset \mathscr{X}$, $B \subset \mathscr{Y}$ и $f: A \to B$ — гомеоморфизм класса* (α, β). *Тогда существует гомеоморфизм $f^*: A^* \to B^*$, являющийся продолжением гомеоморфизма f, причем множества A^* и B^* принадлежат соответственно классам $\alpha+\beta+1$ и $\beta+\alpha+1$.*

Возвратимся к доказательству теоремы Лаврентьева. Пусть $f: A \to B$ — гомеоморфизм класса (α, β), A^* — множество мультипликативного класса $\alpha+1$, $A \subset A^*$, f^* — отображение класса α, определенное на множестве A^*, которое совпадает с f на A (см. п. VI), $I = \underset{x,\, y}{\mathrm{E}}\, [y = f^*(x)]$. Аналогичный смысл придадим символам B^*, g^* и J по отношению к отображению $g = f^{-1}$. Пусть, наконец, A_1 и B_1 — проекции множества $I \cap J$ на оси $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. Так как множество J принадлежит мультипликативному классу $\beta+1$ (см. § 31, VII, 1), то множество A_1 принадлежит мультипликативному классу $\alpha+\beta+1$ относительно A^* (см. § 31, VII, 2) и, следовательно, относительно пространства $\mathscr{X}$.

Таким образом, теорема доказана. Рассмотрим частный случай, когда A — множество мультипликативного класса α. Положим $A^* = A$ и $f^* = f$. Тогда $A_1 = A$ и $B_1 = B$. Так как множество I принадлежит мультипликативному классу α, то B_1 принадлежит мультипликативному классу $\beta+\alpha$ относительно множества B^* и поэтому относительно пространства $\mathscr{Y}$. Таким образом, мы приходим к следующим предложениям:

Следствие 1. *Свойство быть множеством мультипликативного класса $\alpha > 0$ инвариантно по отношению к гомеоморфизмам класса* (α, 0).

Следствие 2. *Пусть множество A принадлежит мультипликативному классу $\alpha > 0$ и f — гомеоморфизм класса* (α, β); *тогда множество $f(A)$ принадлежит мультипликативному классу $\beta+\alpha$.*

Следствие 3. *Любой гомеоморфизм класса* (1, β), *определенный на полном сепарабельном пространстве, преобразует это пространство в множество мультипликативного класса $\beta+1$.*

*§ 36. Связь полных сепарабельных пространств с пространством $\mathcal{N}$ иррациональных чисел

I. ($\mathcal{A}$)-операция. Допустим, что любой системе $n_1, \ldots, n_k$ целых положительных чисел соответствует замкнутое подмножество (пустое или нет) $F_{n_1 \ldots n_k}$ некоторого полного пространства $\mathcal{X}$. Обозначим через a последовательность $[a^1, a^2, \ldots]$ целых положительных чисел. Отождествляя эту последовательность с иррациональным числом $\frac{1|}{|a^1} + \frac{1|}{|a^2} + \ldots$, можно допустить, что a пробегает пространство $\mathcal{N}$ (см. § 3, IX, XIV).

Мы будем предполагать в дальнейшем, что

$$F_{a^1 \ldots a^k a^{k+1}} \subset F_{a^1 \ldots a^k}; \tag{1}$$

$$\lim_{k \to \infty} \delta\left(F_{a^1 \ldots a^k}\right) = 0. \tag{2}$$

Пусть Z — множество таких a, что $F_{a^1 \ldots a^k} \neq 0$, каково бы ни было k. Множество $F_{a^1} \cap F_{a^1 a^2} \cap F_{a^1 a^2 a^3} \cap \ldots$ сводится тогда (§ 34, II) к одной точке, которую мы обозначим через $f(a)$. Следовательно,

$$f(Z) = \bigcup_{a} \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{a^1 \ldots a^k}; \tag{3}$$

таким образом, $f(Z)$ есть результат ($\mathcal{A}$)-операции, примененной к системе $\{F_{n_1 \ldots n_k}\}$.

Обозначим через $\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}$ множество таких a, что $a^1 = n_1, \ldots, a^k = n_k$. Множества $\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}$ открыто-замкнуты в $\mathcal{N}$ и образуют базис пространства $\mathcal{N}$ (см. § 5, XI, пример 4). Имеет место следующее включение:

$$f\left(Z \cap \mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}\right) \subset F_{n_1 \ldots n_k}. \tag{4}$$

В самом деле, если $a \in Z$, то $f(a) \in F_{a^1 \ldots a^k}$, каково бы ни было k. Предположим, что $a \in \mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}$; тогда $a^1 = n_1, \ldots, a^k = n_k$. Следовательно, $f(a) \in F_{n_1 \ldots n_k}$, откуда вытекает включение (4).

Т е о р е м а (а). *Множество Z замкнуто в пространстве $\mathcal{N}$.*

В самом деле, пусть $a \in \mathcal{N} - Z$. Тогда существует k, такое, что $F_{a^1 \ldots a^k} = 0$. В силу (4), имеем $f\left(Z \cap \mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}\right) = 0$, откуда $Z \cap \mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k} = 0$. Так как множество $\mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}$ открыто и содержит точку a, то любая точка множества $\mathcal{N} - Z$ принадлежит открытому множеству, не пересекающемуся с множеством Z. Следовательно, множество Z замкнуто (в пространстве $\mathcal{N}$).

Теорема (б). *Функция f непрерывна (на множестве Z).*

В самом деле, пусть $a \in Z$, $\varepsilon > 0$, и пусть в соответствии с соотношением (2) k — такой индекс, что $\delta\left(F_{a^1 \ldots a^k}\right) < \varepsilon$. Согласно (4), имеем $\delta\left[f\left(Z \cap \mathscr{N}_{a^1 \ldots a^k}\right)\right] < \varepsilon$. Так как $\mathscr{N}_{a^1 \ldots a^k}$ — окрестность элемента a, то функция f непрерывна в точке a.

Следующее утверждение очевидно:

Теорема (в). *Пусть $F_{a^1 \ldots a^k} \neq 0$ при любых a и k; тогда $Z = \mathscr{N}$.*

Теорема (г). *Пусть система $\left\{F_{a^1 \ldots a^k}\right\}$ является диадической, т. е. множество $F_{a^1 \ldots a^k}$ пусто всегда, за исключением тех случаев, когда система $a^1, \ldots, a^k$ состоит из цифр 1 и 2; тогда множество Z гомеоморфно канторову множеству $\mathscr{C}$.*

Действительно, при этих предположениях Z является множеством последовательностей, состоящих из цифр 1 и 2.

Теорема (д). *Если $F_{a^1 \ldots a^k} \cap F_{b^1 \ldots b^k} = 0$, всегда когда $(a^1 \ldots a^k) \neq (b^1 \ldots b^k)$, то функция f взаимно однозначна.*

Кроме того,

$$f(Z) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{a} F_{a^1 \ldots a^k} \tag{5}$$

(так что в этом случае $f(Z)$ является $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$-множеством) и

$$f\left(Z \cap \mathscr{N}_{n_1 \ldots n_k}\right) = f(Z) \cap F_{n_1 \ldots n_k}. \tag{6}$$

В самом деле, если $a \neq b$, то существует индекс k, такой, что $a^k \neq b^k$. Так как $f(b) \in F_{b^1 \ldots b^k}$, то $f(b) \notin F_{a^1 \ldots a^k}$, откуда $f(a) \neq f(b)$.

Равенство (5) следует непосредственно из теоремы 2, § 3, XIV, если принять во внимание равенство (3).

Доказательство равенства (6) сводится, в силу включения (4), к доказательству того, что его правая часть содержится в левой части. Пусть $p \in f(Z) \cap F_{n_1 \ldots n_k}$. Тогда имеем

$$p = f(a) \in F_{a^1 \ldots a^k}, \quad a \in Z \quad \text{и} \quad p \in F_{n_1 \ldots n_k}.$$

Включение $p \in F_{a^1 \ldots a^k} \cap F_{n_1 \ldots n_k}$ означает, что $a^1 = n_1, \ldots, a^k = n_k$. Следовательно, $a \in \mathscr{N}_{n_1 \ldots n_k}$, откуда вытекает включение $p \in f\left(Z \cap \mathscr{N}_{n_1 \ldots n_k}\right)$.

Теорема (е). *Добавим к условию предложения (д) следующее условие: множества $F_{a^1 \ldots a^k}$ все открыты (или замкнуты). Тогда отображение $f: Z \to f(Z)$ является гомеоморфизмом.*

В самом деле, пусть $\lim_{m\to\infty} f(a_m) = f(a)$. Докажем, что $\lim_{m\to\infty} a_m = a$, т. е. $\lim_{m\to\infty} a_m^k = a^k$, каково бы ни было k, или что при фиксированном k имеем $a_m^k = a^k$ для достаточно больших m.

Так как множество $F_{a^1 \ldots a^k}$ открыто, из соотношения $\lim_{m\to\infty} f(a_m) = f(a) \in F_{a^1 \ldots a^k}$ следует, что $f(a_m) \in F_{a^1 \ldots a^k}$ для достаточно больших m. С другой стороны, $f(a_m) \in F_{a_m^1 \ldots a_m^k}$. Тогда из условия утверждения (д) вытекает, что $a_m^1 = a^1, \ldots, a_m^k = a^k$.

Теорема (ж). *Пусть* $\mathscr{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ *и* $F_{a^1 \ldots a^k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{a^1 \ldots a^k i}$ *при любых* a *и* k; *тогда* $f(Z) = \mathscr{X}$.

В самом деле, пусть $p \in \mathscr{X}$; тогда существует индекс n_1, такой, что $p \in F_{n_1}$. Доказательство проведем по индукции. Допустим, что $p \in F_{n_1 \ldots n_k}$. По условию теоремы, существует индекс n_{k+1}, такой, что $p \in F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$. Обозначим через a последовательность $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$; тогда $p = f(a)$.

Имея в виду последующие приложения, мы установим следующие три предложения.

Теорема (з). *Пусть* $\mathscr{X} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i}$ *и* $F_{a^1 \ldots a^k} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{a^1 \ldots a^k i}}$ *для любых* a *и* k; *тогда*

$$\overline{f(Z)} = \mathscr{X} \quad и \quad \overline{f(Z) \cap F_{a^1 \ldots a^k}} = F_{a^1 \ldots a^k}. \tag{7}$$

Пусть $p \in F_{n_1 \ldots n_k}$ и $\varepsilon > 0$. Докажем, что существует точка $a \in Z$, такая, что $f(a) \in F_{n_1 \ldots n_k}$ и $|f(a) - p| \leqslant \varepsilon$.

По условию теоремы, существуют индекс n_{k+1} и точка p_1, такие, что

$$p_1 \in F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} \quad и \quad |p_1 - p| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и более того, существуют последовательность целых чисел n_{k+1}, $n_{k+2}, \ldots$ и последовательность точек $p_1, p_2, \ldots$, такие, что

$$p_j \in F_{n_1 \ldots n_k \ldots n_{k+j}} \quad и \quad |p_j - p_{j-1}| < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Обозначим через a бесконечную последовательность $n_1, n_2, \ldots$; тогда $a^m = n_m$ для любого m. Поэтому

$$f(a) \in F_{a^1 \ldots a^m} = F_{n_1 \ldots n_m} \quad и \quad \lim_{j\to\infty} |f(a) - p_j| = 0,$$

согласно (2). Отсюда $f(a)=\lim\limits_{j\to\infty} p_j$, и так как $|p_j-p|<\varepsilon$, то $|f(a)-p|\leqslant\varepsilon$.

Второе равенство в (7), таким образом, установлено. Но первое есть частный случай второго, если считать, что при $k=0$ имеем $F=\mathscr{X}$.

Теорема (и). *Пусть выполнены условия утверждений* (в) (д) *и* (з), *пусть, кроме того, множество* $F_{n_1\ldots n_k}$ *нигде не плотно в множестве* $F_{n_1\ldots n_{k-1}}$ *(какова бы ни была система индексов* $n_1\ldots n_{k-1}$*); тогда образ любого открытого множества пространства* $\mathscr{N}$ *при отображении* f *является множеством первой категории относительно самого себя.*

Так как множества $\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k}$ образуют базис пространства $\mathscr{N}$, то достаточно доказать, что множество $f(\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k})$ является множеством первой категории относительно самого себя.

В силу предложения (в), имеем $Z=\mathscr{N}$, поэтому, согласно включению (4), $f(\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k})\subset F_{n_1\ldots n_k}$, откуда

$$f(\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k})=\bigcup_{i=1}^{\infty} f(\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k i})\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{n_1\ldots n_k i}.$$

Так как любое из множеств $F_{n_1\ldots n_k i}$ нигде не плотно в множестве $F_{n_1\ldots n_k}$ (по предположению), то их объединение является множеством первой категории в $F_{n_1\ldots n_k}$. Следовательно, множество $f(\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k})$ является множеством первой категории в $F_{n_1\ldots n_k}$. С другой стороны, в силу (7), (6) и (в), имеем

$$F_{n_1\ldots n_k}=\overline{f(Z)\cap F_{n_1\ldots n_k}}=\overline{f(Z\cap\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k})}=\overline{f(\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k})}.$$

Множество $f(\mathscr{N}_{n_1\ldots n_k})$, как множество первой категории относительно своего замыкания, является множеством первой категории относительно самого себя (см. § 10, IV, 2).

Мы дополним утверждение (и) следующим предложением:

Теорема (к). *В канторовом множестве* $\mathscr{C}$ *существует система* $\{F_{n_1\ldots n_k}\}$ *совершенных множеств, удовлетворяющая условиям теоремы* (и).

Заметим сначала, что каждой точке p прямого произведения $\mathscr{C}\times\mathscr{C}$ можно поставить в соответствие совершенное множество $P_p\subset\mathscr{C}\times\mathscr{C}$, содержащее точку p и нигде не плотное в пространстве $\mathscr{C}\times\mathscr{C}$ (гомеоморфное множеству $\mathscr{C}$).

Так как пространство $\mathscr{C}\times\mathscr{C}$ гомеоморфно $\mathscr{C}$ (§ 16, II, теорема 6), то аналогичным образом любой точке множества $\mathscr{C}$ можно поставить в соответствие совершенное множество, содержащее эту точку и нигде не плотное в $\mathscr{C}$. Следовательно, если $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность точек, плотная в $\mathscr{C}$, существует последовательность $F_1, F_2, \ldots$ непустых совершенных множеств, нигде не плотных в $\mathscr{C}$, такая, что

$$F_n \cap F_m = 0 \quad \text{для} \quad n \neq m \quad \text{и} \quad p_n \in \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

Тогда мы имеем $\mathscr{C} = \overline{\bigcup_i F_i}$. Заменяя в этом рассуждении множество $\mathscr{C}$ множеством F_n, мы определим множества $F_{n_1 n_2}$, затем множества $F_{n_1 n_2 n_3}$ и т. д. Кроме того, можно допустить, что $\delta(F_{n_1 \ldots n_k}) < 1/k$. Тогда система $\{F_{n_1 \ldots n_k}\}$ удовлетворяет условиям теоремы (и).

II. Отображения множества $\mathscr{N}$ в полные пространства.

Теорема 1[1]. *Всякое полное сепарабельное пространство является (эффективно[2])) непрерывным образом пространства $\mathscr{N}$.*

В самом деле, пусть $R_1, R_2, \ldots$ — базис пространства $\mathscr{X}$, такой, что $R_i \neq 0$ и $\delta(R_i) < 1$ (см. § 21, II). Положим $F_i = \overline{R}_i$. Тогда

$$\mathscr{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{и} \quad \delta(F_i) \leqslant 1. \tag{1}$$

Применим индукцию. Предположим, что множество $F_{n_1 \ldots n_k}$ определено, непусто и замкнуто. Рассмотрим это множество в качестве пространства; тогда существует бесконечная последовательность непустых замкнутых множеств $F_{n_1 \ldots n_k i}$, где $i = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$F_{n_1 \ldots n_k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{n_1 \ldots n_k i} \quad \text{и} \quad \delta(F_{n_1 \ldots n_k i}) \leqslant \frac{1}{k+1}. \tag{2}$$

Тогда, в силу предложений (б), (в) и (ж), множество $\mathscr{X}$ является непрерывным образом множества $\mathscr{N}$.

Теорема 2. *Любое полное сепарабельное пространство размерности 0 гомеоморфно некоторому замкнутому подмножеству пространства $\mathscr{N}$.*

В самом деле, так как пространство $\mathscr{X}$ нульмерно, любое его открытое подмножество есть объединение бесконечной последовательности попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств (пустых или нет), диаметр которых может быть сделан сколь угодно малым (§ 26, I, следствие 1а). Следовательно, как и в предыдущем доказательстве, формулы (1) и (2) имеют место, поскольку множества

---

[1]) Эта теорема будет распространена в § 37 на борелевские множества.

[2]) То есть доказательство позволяет определить непрерывное отображение $f: \mathscr{N} \to \mathscr{X}$ (см. § 23, VIII).

$F_{n_1 \ldots n_k}$ замкнуты, открыты и попарно не пересекаются при фиксированном k.

Согласно предложениям (а), (е) и (ж), пространство $\mathscr{X}$ гомеоморфно множеству Z, замкнутому в $\mathscr{N}$.

Следствие 2а. *В пространстве $\mathscr{N}$ любое G_δ-множество гомеоморфно некоторому замкнутому множеству.*

Действительно, в силу § 33, VII, любое G_δ-множество, содержащееся в пространстве $\mathscr{N}$, гомеоморфно полному пространству размерности нуль.

Теорема 3 (теорема Мазуркевича[1]). *Всякое G_δ-множество, плотное и граничное в полном сепарабельном нульмерном пространстве, гомеоморфно пространству $\mathscr{N}$.*

В самом деле, согласно теореме 1′, § 26, I, рассматриваемое G_δ-множество является результатом ($\mathscr{A}$)-операции, примененной к системе $\{F_{n_1 \ldots n_k}\}$ непустых открыто-замкнутых попарно не пересекающихся при фиксированном k множеств, удовлетворяющих условиям (1) и (2) п. I. Согласно равенству (3) и предложениям (в) и (е), это множество гомеоморфно множеству $\mathscr{N}$.

Следствие 3а. *Любое G_δ-множество, плотное и граничное в пространстве $\mathscr{E}$ действительных чисел, гомеоморфно пространству $\mathscr{N}$.*

Пусть Q есть G_δ-множество и D — счетное подмножество из $\mathscr{E} - Q$, плотное и такое, что множество $\mathscr{E} - Q - D$ плотно (множество D такого вида существует, ибо множество $\mathscr{E} - Q$ плотно и плотно в себе). Следовательно, множество Q является плотным и граничным в $\mathscr{E} - D$. Более того, $\mathscr{E} - D$ как G_δ-множество является топологически полным пространством размерности 0 (§ 33, VI). Поэтому множество Q гомеоморфно пространству $\mathscr{N}$, в силу теоремы 3.

III. Взаимно однозначные отображения.

Теорема. *Интервал $\mathscr{J}$, а также n-мерный куб $\mathscr{J}^n$ (n конечно или равно $\aleph_0$) являются гомеоморфными образами (при гомеоморфизме класса (0, 1)) пространства $\mathscr{N}$.*

Пусть N — канторово множество $\mathscr{C}$, лишенное левых концов смежных интервалов. Каждому числу

$$x = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_m}{3^m} + \ldots \qquad (c_m = 0 \text{ или } 2)$$

---

[1]) См. Мазуркевич [2], Брауэр [2], Александров и Урысон [3].

поставим в соответствие число

$$t(x)=\frac{c_1}{2^2}+\frac{c_2}{2^3}+\ldots+\frac{c_m}{2^{m+1}}+\ldots;$$

тогда отображение $t:N\to\mathcal{J}$ непрерывно и взаимно однозначно (см. § 16, II, следствие 6а).

Обратное отображение t^{-1} имеет только счетное множество точек разрыва (это точки, которые представляются конечными двоичными дробями); следовательно, оно принадлежит первому классу (§ 34, VII, следствие 1).

Так как N — плотное и граничное множество в $\mathcal{C}$, то множества N и $\mathcal{N}$ гомеоморфны (теорема 3, п. II); пусть s — гомеоморфизм, такой, что $s(\mathcal{N})=N$. Функция $f=t\circ s$ удовлетворяет теореме для $n=1$.

Поставив в соответствие последовательности (конечной или бесконечной), составленной из иррациональных чисел $x_1, x_2, \ldots$, последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots$, мы определим непрерывное отображение $g:\mathcal{N}^n\to\mathcal{J}^n$.

Обратное преобразование g^{-1} ставит в соответствие любой точке $y_1, y_2, \ldots$ пространства $\mathcal{J}^n$ точку $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), \ldots$ пространства $\mathcal{N}^n$. Следовательно, отображение g^{-1} принадлежит первому классу, так как отображение f^{-1} принадлежит первому классу (§ 31, VI, 3). Поскольку пространство $\mathcal{N}^n$ гомеоморфно пространству $\mathcal{N}$ (§ 16, II, 6), обозначим через h гомеоморфизм, такой, что $h(\mathcal{N})=\mathcal{N}^n$. Суперпозиция $g\circ h$ и есть искомое отображение.

Замечание. Предыдущую теорему можно обобщить, если заменить n-мерный куб $\mathcal{J}^n$ произвольным $F_{\sigma\delta}$-множеством, состоящим только из точек конденсации (и лежащим в полном сепарабельном пространстве). (См. Хаусдорф [7].)

Следствие[1]. *Всякое метрическое сепарабельное пространство $\mathcal{X}$ является гомеоморфным образом (при гомеоморфизме класса* (0, 1)) *некоторого подмножества $E\subset\mathcal{N}$.*

Кроме того, *если пространство $\mathcal{X}$ — полное, то множество E замкнуто (следовательно, топологически полно, сепарабельно и 0-мерно).*

В самом деле, пространство $\mathcal{X}$ можно рассматривать как подмножество $Q\subset\mathcal{J}^{\aleph_0}$ (§ 22, II).

Если же пространство $\mathcal{X}$ полно, то Q есть G_δ-множество (см. § 35, III). Итак, пусть f — отображение, рассмотренное в предыдущей теореме (для $n=\aleph_0$); тогда $f^{-1}(Q)$ есть G_δ-множество в пространстве $\mathcal{N}$; следовательно, оно гомеоморфно некоторому замкнутому подмножеству пространства $\mathcal{N}$ (следствие 2а, п. II).

[1]) В § 37 это следствие будет распространено на борелевские множества.

IV. Теоремы разложения.

Теорема 1. *Любое полное сепарабельное 0-мерное несчетное пространство является объединением некоторого счетного множества и множества, гомеоморфного пространству $\mathcal{N}$.*

В самом деле, согласно теореме Кантора — Бендиксона (§ 23, V), это пространство является объединением счетного множества и непустого совершенного множества P. Пусть D — счетное множество, плотное в P. Множество P, рассматриваемое как пространство, является полным, сепарабельным и 0-мерным. Кроме того, каждая его точка есть точка конденсации (§ 34, IV, следствие 3); следовательно, множество $P-D$ плотно в P. Будучи плотным и граничным G_δ-множеством в P, оно гомеоморфно пространству $\mathcal{N}$ (согласно теореме 3, п. II).

Замечание. Отсюда следует, что *несчетное G_δ-множество, расположенное в $\mathcal{E}$, становится гомеоморфным множеству $\mathcal{N}$, когда в нем вычеркивается некоторое подходящим образом выбранное счетное множество* (теорема Мазуркевича, см. цит. раб.).

Действительно, удаляя рациональные точки, мы получим G_δ-множество размерности 0, которое становится, как мы показали, гомеоморфным множеству $\mathcal{N}$ после удаления счетного множества точек.

Теорема 2. *Всякое полное сепарабельное несчетное пространство является объединением счетного множества и множества, которое получается из $\mathcal{N}$ при гомеоморфизме класса* (0, 1).

В самом деле, пусть $\mathcal{Y}$ — рассматриваемое пространство и $\mathcal{X}$ — полное сепарабельное 0-мерное пространство, такое, что $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$, где f — гомеоморфизм класса (0, 1) (следствие, п. III).

Согласно предыдущей теореме, мы имеем $\mathcal{X}=D\cup N$, где D — счетное множество, а N гомеоморфно пространству $\mathcal{N}$. Равенство $\mathcal{Y}=f(D)\cup f(N)$ является искомым разложением.

V. Связь с канторовским множеством $\mathcal{C}$.

Теорема. *Любое непрерывное отображение f полного сепарабельного пространства $\mathcal{X}$, принимающее несчетное множество различных значений, является гомеоморфизмом на некотором множестве A, гомеоморфном канторовскому множеству $\mathcal{C}$.*

Кроме того, *любое полное, плотное в себе непустое пространство (которое может и не быть сепарабельным) топологически содержит канторовское множество $\mathcal{C}$* (см. Юнг [4]).

Поставим в соответствие каждому значению y рассматриваемой функции f точку x_y, такую, что $y = f(x_y)$. Пространство $\mathscr{X}$ сепарабельно и множество различных точек x_y несчетно; пусть D — некоторое плотное в себе (непустое) подмножество этого множества (см. § 23, V).

Пусть $p_0 \neq p_2$ — две точки множества D, и пусть F_0 и F_2 — два (замкнутых) шара с центрами p_0 и p_2, такие, что

$$1^\circ \qquad \delta(F_0) < 1, \qquad \delta(F_2) < 1,$$

$$2^\circ \qquad f(F_0) \cap f(F_2) = 0.$$

Существование шаров F_0 и F_2 вытекает из непрерывности функции f: если бы такие шары не существовали, то можно было бы определить (рассматривая стягивающиеся шары) две последовательности $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n = p_0, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = p_2 \quad \text{и} \quad f(r_n) = f(s_n);$$

но тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} f(s_n), \quad \text{откуда} \quad f(p_0) = f(p_2) \quad \text{и} \quad p_0 = p_2,$$

ибо функция f взаимно однозначна на множестве D.

Так как множество D плотно в себе, внутри шара F_0 существуют две точки $p_{00} \in D$ и $p_{02} \in D$ и два шара F_{00} и F_{02}, такие, что

$$\delta(F_{00}) < \frac{1}{2}, \qquad \delta(F_{02}) < \frac{1}{2}, \qquad f(F_{00}) \cap f(F_{02}) = 0$$

и

$$F_{00} \cup F_{02} \subset F_0.$$

Придавая аналогичный смысл символам F_{20} и F_{22} и продолжая этот процесс, мы придем к диадической системе непустых замкнутых множеств $\left\{F_{c_1 \dots c_k}\right\}$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), п. I. Кроме того, имеем

$$\text{(i)} \qquad f\left(F_{c_1 \dots c_k}\right) \cap f\left(F_{d_1 \dots d_k}\right) = 0,$$

если

$$(c_1 \dots c_k) \neq (d_1 \dots d_k),$$

а это означает, что $F_{c_1 \dots c_k} \cap F_{d_1 \dots d_k} = 0$.

Отсюда, в силу п. I, (г) и (д), вытекает, что множество $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup F_{c_1 \dots c_k}$, где объединение берется по всем системам из k

цифр $c_1 \ldots c_k$, является взаимно однозначным и непрерывным образом множества $\mathscr{C}$: $A = g(\mathscr{C})$[1]).

В силу § 20, V, 6a, множество A гомеоморфно множеству $\mathscr{C}$.

Для доказательства гомеоморфности сужения $f \mid A$ достаточно доказать, что оно взаимно однозначно. Итак, пусть $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$; тогда существуют две различные системы индексов $(c_1 \ldots c_k)$ и $(d_1 \ldots d_k)$, такие, что $x_1 \in F_{c_1 \ldots c_k}$ и $x_2 \in F_{d_1 \ldots d_k}$. В силу (i), $f(x_1) \neq f(x_2)$, что и требовалось доказать. Чтобы установить вторую часть теоремы, достаточно положить в предшествующем рассуждении $D = \mathscr{X}$ и $f(x) = x$.

Следствие 1. *Любой непрерывный несчетный образ полного сепарабельного пространства топологически содержит множество $\mathscr{C}$. Следовательно, он имеет мощность континуума.*

Следствие 2. *Всякое полное сепарабельное несчетное пространство содержит множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$, гомеоморфное множеству $\mathscr{N}$.*

Это следствие вытекает из следствия 1, теоремы II, 1 и того факта, что множество $\mathscr{C}$ после удаления концов смежных интервалов гомеоморфно множеству $\mathscr{N}$.

Следствие 3. *Пусть f — некоторая непрерывная функция, заданная на полном сепарабельном пространстве $\mathscr{X}$. Тогда необходимым и достаточным условием несчетности множества значений этой функции является существование плотного в себе множества $E \subset \mathscr{X}$, такого, что сужение $f \mid E$ взаимно однозначно.*

В силу теоремы этого пункта, условие необходимо. Оно является достаточным, согласно следствию 6 из § 34, IV.

Замечание (см. Гуревич [12]). Последнюю теорему можно доказать для произвольных метрических пространств следующим образом. Говорят, что функция f является *локально постоянной в точке* x_0, если существует окрестность E точки x_0, такая, что сужение $f \mid E$ постоянно. Имеет место следующая теорема:

Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства $\mathscr{X}$ в себя, и пусть в пространстве $\mathscr{X}$ существует несчетное множество A, такое, что сужение $f \mid A$ не является постоянным ни в какой точке. Тогда пространство $\mathscr{X}$ содержит совершенное множество P, такое, что функция $f \mid P$ есть гомеоморфизм.

Отсюда вытекает, что

Любое непрерывное отображение метрического сепарабельного пространства, допускающее несчетное множество значений, является гомеоморфизмом на некотором совершенном подмножестве.

---

[1]) Функция g может быть определена непосредственно, а именно положим

$$g(c) = F_{c_1} \cap F_{c_1 c_2} \cap F_{c_1 c_2 c_3} \cap \ldots \quad \text{для} \quad c = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} + \frac{c_3}{27} + \ldots .$$

См. Хаусдорф [5].

*§ 37. Борелевские множества в полных сепарабельных пространствах[1])

I. Связь борелевских множеств с пространством $\mathcal{N}$.

Теорема 1. *Любое борелевское множество является непрерывным образом пространства* $\mathcal{N}$.

Всякое замкнутое подмножество полного пространства полно, и поэтому, в силу § 36, II, 1, является непрерывным образом пространства $\mathcal{N}$. Поэтому нужно доказать (см. § 30, I), что если $\{f_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, — последовательность непрерывных отображений $f_i : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, то множества

$$S = \bigcup_i f_i(\mathcal{N}) \quad \text{и} \quad P = \bigcap_i f_i(\mathcal{N})$$

являются непрерывными образами пространства $\mathcal{N}$.

Обозначим через N_n множество иррациональных чисел интервала $(n-1, n)$ и положим $f(x) = f_n(x - n + 1)$ для $x \in N_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Функция f, следовательно, непрерывна на множестве $\mathcal{N}^* = \bigcup_i N_i$ и $f(\mathcal{N}^*) = S$. Кроме того, множество $\mathcal{N}^*$, очевидно, гомеоморфно множеству $\mathcal{N}$.

Для доказательства того, что множество P является непрерывным образом множества $\mathcal{N}$, рассмотрим в пространстве $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ последовательностей $a = [a^1, a^2, \ldots]$, где $a^n \in \mathcal{N}$, множество A таких a, что $f_1(a^1) = f_2(a^2) = \ldots$, и для $a \in A$ положим $f^*(a) = f_1(a^1)$. Согласно § 16, IV, 5, A — замкнутое подмножество пространства $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ и, следовательно, непрерывный образ пространства $\mathcal{N}$. Согласно § 16, IV, теореме 3, отображение $f^* : A \to P$ непрерывно.

Теорема 2. *Всякое борелевское множество есть взаимно однозначный и непрерывный образ полного сепарабельного* 0-*мерного пространства*[2]).

Действительно, так как любое открытое множество топологически полно (§ 33, VI) и, следовательно, для него утверждение теоремы справедливо (в силу следствия из § 36, III), то остается доказать (см. § 30, V, 3), что если $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ — последовательность полных сепарабельных 0-мерных пространств и $f_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2, \ldots$, — последовательность взаимно однозначных и непрерывных отображений, то

---

[1]) См. Лузин [8], гл. II, а также Куратовский [25]. См., кроме того, § 39, IV и V. По поводу полных не обязательно сепарабельных пространств см. А. Стоун [4].

[2]) Добавим, что если борелевское множество состоит только из точек конденсации, то оно является взаимно однозначным и непрерывным образом множества $\mathcal{N}$. См. Серпинский [22].

1° для множества $P = \bigcap\limits_i f_i(\mathscr{X}_i)$ теорема справедлива;

2° для множества $S = \bigcup\limits_i f_i(\mathscr{X}_i)$ также теорема справедлива при дополнительном предположении, что множества $f_1(\mathscr{X}_1)$, $f_2(\mathscr{X}_2)$, ... попарно не пересекаются.

Чтобы установить 1°, рассмотрим в прямом произведении $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{X}_i$ множество A таких элементов $a = [a^1, a^2, \ldots]$, что $f_1(a^1) = f_2(a^2) = \ldots$ и для $a \in A$ положим $f^*(a) = f_1(a^1)$. Так как пространство $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{X}_i$ полно (§ 33, III), сепарабельно (§ 16, V, 6) и 0-мерно (§ 26, IV, следствие 2б), то и множество A полно, сепарабельно и 0-мерно (ибо A — замкнутое подмножество этого пространства, см. § 16, IV, 5). Более того, отображение $f^* : A \xrightarrow{\text{на}} P$ взаимно однозначно и непрерывно (§ 16, IV, 3, 4).

Наконец, чтобы установить 2°, рассмотрим, в соответствии с § 36, II, 2, пространство $\mathscr{X}_n$ как замкнутое подмножество множества N_n (иррациональных чисел интервала $(n-1, n)$). Функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, определяют тогда взаимно однозначное непрерывное отображение объединения $\bigcup\limits_i \mathscr{X}_i$ на множество S. Так как множество $\bigcup\limits_i \mathscr{X}_i$ замкнуто в пространстве положительных иррациональных чисел, оно является топологически полным сепарабельным 0-мерным пространством.

Из теорем 1 и 2 вытекает (из каждой в отдельности) следующее важное утверждение.

Теорема 3. (Теорема Александрова [1] — Хаусдорфа [2].) *Любое несчетное борелевское множество топологически содержит канторовское множество $\mathscr{C}$ и, следовательно, имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Эта теорема вытекает из теоремы 1, если принять во внимание следствие 1 из § 36, V, а также из теоремы 2, если сопоставить ее с теоремой 1 из § 36, IV.

II. Характеризация борелевских классов множеств с помощью обобщенных гомеоморфизмов. Теорему 2 из п. I можно уточнить следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}$ — полное сепарабельное пространство и A — его произвольное подмножество мультипликативного (соответственно двустороннего) класса $\alpha + 1 > 0$. Тогда существует полное сепарабельное пространство $\mathscr{T}$ и гомеоморфизм $f : \mathscr{T} \to \mathscr{X}$ класса $(0, \alpha)$, такой, что $f^{-1}(A)$ является $\boldsymbol{G}_\delta$-множеством (соответственно множеством типа $\boldsymbol{F}_\sigma$ и $\boldsymbol{G}_\delta$).*

Более того, *если $\alpha + 1 > 1$, то пространство $\mathscr{T}$ можно считать 0-мерным.*

Мы докажем эту теорему сначала для двусторонних классов. Допустим, что теорема верна для любого двустороннего множества класса $<\beta$ $(\beta>1)$. Покажем, что тогда она верна также для двустороннего множества A класса β. В силу § 30, IX, 1, множество A имеет вид

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A_{n+1}\cap\ \ldots)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup A_{n+1}\cup\ \ldots),$$

где A_n — двустороннее множество класса α_n и $0<\alpha_n<\beta$.

Если $\beta>2$, то, по предположению индукции, существует множество C_n, замкнутое в $\mathscr{N}$, и гомеоморфизм f_n класса $(0, \alpha_n)$, определенный на C_n, такой, что $f_n(C_n)=A_n$. Если $\beta=2$, то к тому же заключению можно прийти в силу следствия из § 36, III (где пространство $\mathscr{X}$ может быть заменено множеством A_n, ибо последнее есть $\boldsymbol{G}_\delta$-множество).

Так как множество $\mathscr{X}-A_n$ также является двусторонним класса α_n, то существует множество D_n, замкнутое в множестве иррациональных чисел интервала (1, 2), которое связано с множеством $\mathscr{X}-A_n$ таким же образом, каким связаны множества C_n с A_n. Положим $\mathscr{X}_n=C_n\cup D_n$; тогда отображение f_n, определенное на всем множестве $\mathscr{X}_n$, непрерывно, взаимно однозначно и удовлетворяет соотношениям $f_n(C_n)=A_n$ и $f_n(D_n)=\mathscr{X}-A_n$. Отображение f_n^{-1} принадлежит классу α_n, ибо сужения $f_n^{-1}\,|\,A_n$ и $f_n^{-1}\,|\,(\mathscr{X}-A_n)$, по предположению, принадлежат классу α_n и A_n — двустороннее множество класса α_n (см. § 31, IV, 2).

Заметим, что $\mathscr{X}_n$ — топологически полное сепарабельное 0-мерное пространство и что C_n и D_n — открыто-замкнутые подмножества этого пространства. Пусть $E=\prod\limits_i \mathscr{X}_i$ — прямое произведение пространств $\mathscr{X}_n$, т. е. пространство последовательностей $a=[a^1, a^2, \ldots]$, где $a^n\in\mathscr{X}_n$. Пусть далее $\mathscr{T}$ — множество таких $a\in E$, что $f_1(a^1)=f_2(a^2)=\ \ldots$. Положим $f(a)=f_1(a^1)$ для $a\in\mathscr{T}$ (см. § 16, IV). Так как множество $\mathscr{T}$ замкнуто в E и E — топологически полно, сепарабельно и 0-мерно (§ 33, III, § 16, V, 6, § 25, IV, следствие 2б), то и множество $\mathscr{T}$ обладает этими свойствами. В силу § 16, IV, $f(\mathscr{T})=\mathscr{X}$ и, согласно § 31, VI, 3, f — гомеоморфизм класса $(0, \beta)$, если β — предельное число, и класса $(0, \alpha)$, если $\beta=\alpha+1$.

Множество $f^{-1}(A)$ является $\boldsymbol{F}_\sigma$- и $\boldsymbol{G}_\delta$-множеством. Действительно, мы имеем

$$f^{-1}(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f^{-1}(A_n)\cap f^{-1}(A_{n+1})\cap\ \ldots]=$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}[f^{-1}(A_n)\cup f^{-1}(A_{n+1})\cup\ \ldots].$$

Так как функция f непрерывна, то достаточно доказать, что множество $f^{-1}(A_n)$ открыто-замкнуто в $\mathcal{J}$. Итак, для $a \in \mathcal{J}$ имеем

$$\{f(a) \in A_n\} \equiv \{f_n(a^n) \in A_n\} \equiv \{a^n \in C_n\},$$

и поскольку множество C_n открыто-замкнуто в $\mathcal{X}_n$, то множество

$$f^{-1}(A_n) = \mathcal{J} \cap \underset{a}{\mathsf{E}} \{a^n \in C_n\}$$

открыто-замкнуто в $\mathcal{J}$, так как

$$\underset{a}{\mathsf{E}} \{a^n \in C_n\} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{X}_i \times C_n \times \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{n+j}.$$

Случай двусторонних множеств рассмотрен; выведем отсюда теорему для случая мультипликативных классов.

Пусть A — множество мультипликативного класса $\alpha + 1 \ (> 0)$; тогда $A = \bigcap_n A_n$, где A_n — двустороннее множество класса $\alpha + 1$. Следовательно, согласно только что доказанному, существуют полное сепарабельное пространство $\mathcal{X}_n$, $\boldsymbol{G}_\delta$-множество (и даже $\boldsymbol{F}_\sigma$- и $\boldsymbol{G}_\delta$-множество) C_n и гомеоморфизм f_n класса $(0, \alpha)$, такие, что

$$f_n(\mathcal{X}_n) = \mathcal{X} \quad \text{и} \quad f_n^{-1}(A_n) = C_n.$$

Пусть пространство $\mathcal{J}$ и отображение f определены, как выше; тогда

$$f(\mathcal{J}) = f_1(\mathcal{X}_1) \cap f_2(\mathcal{X}_2) \cap \ldots = \mathcal{X},$$

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \cap \ldots,$$

$$f^{-1}(A_n) = \mathcal{J} \cap (\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_{n-1} \times C_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \ldots).$$

Эти соотношения показывают, что $f^{-1}(A_n)$ является $\boldsymbol{G}_\delta$-множеством в $\mathcal{J}$. Следовательно, и множество $f^{-1}(A)$ обладает этим свойством.

З а м е ч а н и я. 1. Класс отображения f^{-1} не может быть *понижен*. Действительно, пусть отображение f^{-1} принадлежит классу ξ, тогда множество $A = ff^{-1}(A)$ — двустороннее класса $\xi + 1$, так как $f^{-1}(A)$ — двустороннее множество класса 1 (§ 31, III, 1).

Следовательно, если множество A принадлежит классу $\alpha + 1$, но не принадлежит классу α, то $\xi \geqslant \alpha$.

2. Теорему можно обобщить, если заменить $\alpha + 1$ на $\alpha + \beta$ и класс $\boldsymbol{G}_\delta$ (соответственно $\boldsymbol{F}_\sigma$ и $\boldsymbol{G}_\delta$) на мультипликативный (соответственно двусторонний) класс β (см. Куратовский [25]).

С л е д с т в и е 1а. *Любое множество A мультипликативного класса $\alpha + 1 > 0$ является гомеоморфным образом (при гомеоморфизме класса* $(0, \alpha)$) *некоторого полного сепарабельного пространства.*

Если $\alpha + 1 > 1$, то можно считать, что это пространство 0-мерно.

Действительно, множество $f^{-1}(A)$, рассмотренное в теореме 1, есть G_δ-множество и, следовательно, топологически полное пространство.

Следствие 1а и следствие 3 из § 35, VII дают

Следствие 1б. *Для того чтобы некоторое множество принадлежало мультипликативному классу $\alpha+1>0$, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфным образом (при гомеоморфизме класса $(0, \alpha)$) некоторого полного сепарабельного пространства.*

Следствие 1в. *В любом несчетном борелевском множестве A мультипликативного класса $\alpha+1>1$ существует счетное подмножество D, такое, что множество $A-D$ является гомеоморфным образом (при гомеоморфизме класса $(0, \alpha)$) пространства $\mathcal{N}$.*

Пусть, в соответствии со следствием 1а, $\mathcal{J}$ — полное сепарабельное 0-мерное пространство и f — гомеоморфизм класса $(0, \alpha)$, такой, что $f(\mathcal{J})=A$. Если E — счетное подмножество пространства $\mathcal{J}$, такое, что множество $\mathcal{J}-E$ гомеоморфно множеству $\mathcal{N}$ (см. § 36, IV, 1), то положим $D=f(E)$.

Теорема 2. *Пусть A и B — несчетные множества соответственно мультипликативных классов $\alpha+1>2$ и $\beta+1>2$; тогда существует гомеоморфизм $f: A \to B$ класса (α, β)* [1].

Пусть, в соответствии со следствием 1в, D и E — два счетных множества и f_1 и f_2 — гомеоморфизмы соответственно классов $(0, \alpha)$ и $(0, \beta)$, такие, что $f_1(\mathcal{N})=A-D$ и $f_2(\mathcal{N})=B-E$. Положим $f(x)=f_2 f_1^{-1}(x)$ для $x \in A-D$ и определим f для $x \in D$ так, чтобы D отображалось на E взаимно однозначно. Определенное таким образом отображение f является отображением класса α на множестве $A-D$ (§ 31, III, 2) и класса 1 (§ 31, X, замечание 9), а, следовательно, класса α, на множестве D.

Так как D и $A-D$ — множества типа $G_{\delta\sigma}$ относительно A и, следовательно, принадлежат аддитивному классу α, то функция f есть функция класса α на всем множестве A (согласно § 31, IV, 1).

Из соображений симметрии f^{-1} есть отображение класса β на множестве B.

Замечания. 1. Таким образом, если ограничиться борелевскими подмножествами полных сепарабельных пространств, то *равномощные множества гомеоморфны в обобщенном смысле.*

2. Аналогичным образом доказывается (см. Куратовский [25]), что *между любыми двумя полными сепарабельными простран-*

[1]) Это отношение между множествами A и B Макки [1] называет *борелевским изоморфизмом.* Оно имеет интересные приложения в теории групп.

ствами[1]) *одинаковой мощности существует гомеоморфизм класса* (1, 1).

III. Разложение двусторонних множеств в знакочередующиеся ряды.

Теорема. *Для того чтобы A было двусторонним множеством класса $\alpha+1$, необходимо и достаточно, чтобы оно разлагалось в знакочередующийся счетный (трансфинитный) ряд убывающих множеств, принадлежащих мультипликативному классу α:*

$$(1)\qquad A = B_1 - B_2 \cup B_3 - B_4 \cup \ldots \cup B_\omega - B_{\omega+1} \cup \ldots .$$

В силу § 30, VI, 3, условие теоремы является достаточным. Для доказательства необходимости рассмотрим, в соответствии с теоремой 1 из п. II, полное сепарабельное пространство $\mathcal{J}$ и гомеоморфизм $f:\mathcal{J}\to\mathcal{X}$ класса $(0, \alpha)$ $(\mathcal{X}\supset A)$, такой, что $f^{-1}(A)$ есть $\boldsymbol{F}_\sigma$- и $\boldsymbol{G}_\delta$-множество. В силу теоремы § 34, VI, множество $f^{-1}(A)$ имеет вид

$$f^{-1}(A) = F_1 - F_2 \cup F_3 - F_4 \cup \ldots \cup F_\omega - F_{\omega+1} \cup \ldots ,$$

где $\{F_\xi\}$ — убывающая последовательность замкнутых множеств.

Так как отображение f взаимно однозначно, то

$$A = ff^{-1}(A) = f(F_1) - f(F_2) \cup \ldots \cup f(F_\omega) - f(F_{\omega+1}) \cup \ldots ,$$

и $\{B_\xi = f(F_\xi)\}$ — убывающая последовательность множеств мультипликативного класса α, поскольку f^{-1} — отображение класса α.

IV. Малые классы Бореля. Предыдущая теорема естественным образом приводит к классификации двусторонних множеств данного класса α (где α не является предельным числом). А именно если ряд (1) типа β, то говорят, что множество A принадлежит *малому классу* $\boldsymbol{F}_\alpha^\beta$. Аналогичным образом, если дополнение множества A разложимо в ряд типа β, то говорят, что множество A принадлежит *малому классу* $\boldsymbol{G}_\alpha^\beta$.

Таким образом, классификация двусторонних множеств класса α (при фиксированном α) на „малые классы“ подобна классификации борелевских множеств на классы $\boldsymbol{F}_\alpha$ (или $\boldsymbol{G}_\alpha$).

Например, множества малых классов $\boldsymbol{F}_1^1$, $\boldsymbol{F}_1^2$, $\boldsymbol{F}_1^3$, ... и $\boldsymbol{G}_1^1$, $\boldsymbol{G}_1^2$, $\boldsymbol{G}_1^3$, ... имеют вид соответственно

$$F,\qquad F_1 - F_2,\qquad F_1 - F_2 \cup F_3,\ \ldots;$$
$$\mathcal{X} - F,\qquad \mathcal{X} - F_1 \cup F_2,\qquad \mathcal{X} - F_1 \cup F_2 - F_3,\ \ldots$$

[1]) Следовательно, и между любой парой множеств типа G_δ. Что касается множеств типа $F_{\sigma\delta}$, см. замечание в § 36, III.

Методом, аналогичным тому, который служил нам для доказательства существования для каждого α (в пространстве иррациональных чисел) борелевского множества, принадлежащего классу α, но не принадлежащего классу $<\alpha$ (§ 30, XIV), можно установить существование множеств, которые принадлежат данному малому классу, но не принадлежат малым классам с низшими индексами (см. Лаврентьев [3], Лузин [8], Серпинский [38]).

Замечание. Определение классов G_α^β выражается более естественным образом, если воспользоваться *делением* множеств, полагая, по определению, $X:Y = X \cup (-Y)$. Тогда G_α^β — класс множеств, разлагающихся в „знакочередующееся пересечение“ типа β возрастающей последовательности множеств аддитивного класса α:

$$A = (G_1 : G_2) \cap (G_3 : G_4) \cap \ldots \cap (G_\omega : G_{\omega+1}) \cap \ldots,$$

где

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_\omega \subset \ldots .$$

В самом деле, из соотношения

$$-A = B_1 - B_2 \cup \ldots \cup B_\omega - B_{\omega+1} \cup \ldots$$

вытекает, что

$$A = [-(B_1 - B_2)] \cap \ldots \cap [-(B_\omega - B_{\omega+1})] \cap \ldots =$$
$$= [(-B_1) : (-B_2)] \cap \ldots \cap [(-B_\omega) : (-B_{\omega+1})] \cap \ldots .$$

*§ 38. Проективные множества

Пространство предполагается полным сепарабельным.

I. Определения. Борелевские множества называются *проективными множествами класса* 0. *Проективные множества класса* $2n+1$ — это непрерывные образы проективных множеств класса $2n$ (расположенных в том же пространстве); *проективные множества класса* $2n$ — это дополнения к проективным множествам класса $2n-1$ [1]).

В частности, проективные множества класса 1, т. е. непрерывные образы борелевских множеств, называются *аналитическими* или ***A**-множествами* [2]), а их дополнения, т. е. проективные множества класса 2, называются *аналитическими дополнениями* или ***CA**-множествами* [3]).

---

[1]) При помощи счетных операций $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$ легко продолжить эту классификацию на трансфинитные числа ($<\Omega$), подобно тому как при классификации борелевских множеств.

[2]) Или „суслинскими множествами“. (См. Хаусдорф [5].)

[3]) Понятие аналитического множества было введено Суслиным и Лузиным [1]. Теория аналитических множеств развита главным образом Лузиным и Серпинским. Понятие проективного множества принадлежит Лузину [5]. См. Канторович и Ливенсон [2].

II. Соотношения между проективными классами. Обозначим через CX семейство дополнений к множествам, принадлежащим данному семейству X, и через PX — семейство непрерывных образов множеств, принадлежащих X. Справедливы очевидные формулы:

(1) $$CCX = X;$$

(2) $$X \subset PX = PPX;$$

(3) $$(X \subset Y) \Rightarrow (CX \subset CY \quad \text{и} \quad PX \subset PY).$$

Кроме того, если L_n есть n-й проективный класс, то имеем

(4) $$L_{2n+1} = PL_{2n}, \qquad PL_{2n+1} = L_{2n+1};$$

(5) $$L_{2n} = CL_{2n-1}; \qquad CL_{2n} = L_{2n-1};$$

(6) $$CL_0 = L_0 \quad \text{и} \quad PL_0 = L_1 = A.$$

Мы докажем, что

(7) $L_{2n} \subset L_{2n+k}$ *и* $L_{2n+1} \subset L_{2n+2+k}$ *для* $n \geqslant 0$ *и* $k = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, достаточно доказать, что

(i) $$L_{2n} \subset L_{2n+1},$$

(ii) $$L_n \subset L_{n+2},$$

(iii) $$L_{2n+1} \subset L_{2n+4}.$$

Включение (i) является прямым следствием соотношений (2) и (4). Включение (ii) имеет место для $n = 0$, в силу соотношений (2), (3) и (6). Для $n > 0$ имеем либо $L_n = PCL_{n-2}$, либо $L_n = CPL_{n-2}$ (полагая $L_{-1} = L_0$). Допустим (рассуждая по индукции), что имеет место включение $L_{n-2} \subset L_n$; тогда, согласно соотношению (3), имеем $PCL_{n-2} \subset PCL_n$ и $CPL_{n-2} \subset CPL_n$, откуда следует включение (ii).

Наконец, включение (i) дает $CL_{2n+1} = L_{2n+2} \subset L_{2n+3}$, откуда, согласно соотношениям (3) и (1), $L_{2n+1} = CCL_{2n+1} \subset CL_{2n+3} = L_{2n+4}$.

III. Свойства проективных множеств.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}_k$ — полное сепарабельное пространство, $k = 1, 2, \ldots$, и $P_k \subset \mathscr{X}_k$ — проективное множество класса n; тогда прямое произведение (конечное или бесконечное) $\prod_i P_i$ является проективным множеством класса n в пространстве $\prod_i \mathscr{X}_i$.*

Теорема 2. *Пусть P и Q — проективные множества класса n, расположенные соответственно в полных сепарабельных пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, $f: P \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение; тогда множество $f^{-1}(Q)$ принадлежит классу n.*

Кроме того, *если n нечетно, то $f(P)$ — множество класса n; если n четно, то $f(P)$ — множество класса $n+1$.*

Теорема 3 (Серпинский [36]). *Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — проективные множества класса n, тогда $\bigcup_i P_i$ и $\bigcap_i P_i$ — тоже проективные множества класса n.*

Мы докажем эти свойства методом конечной индукции.

Для $n=0$ (случай борелевских множеств) утверждения 1, 3 и первая часть теоремы 2 имеют место (§ 30, III). Вторая часть утверждения 2 также имеет место. Действительно, если пространство $\mathscr{Y}$ несчетно (в противном случае множество $f(P)$ было бы счетным и, следовательно, класса 1), то существует борелевское подмножество $N \subset \mathscr{Y}$, такое, что $P=g(N)$, где g — непрерывное отображение (см. § 36, V, следствие 2 и § 37, I, теорема 1). Следовательно, $f(P)=fg(N)$ — множество класса 1.

Допустим теперь, что $n>0$ и что все три утверждения имеют место для $n-1$ (мы обозначим их 1_{n-1}, 2_{n-1}, 3_{n-1}).

Рассмотрим два случая.

а) *Случай нечетного n.* Положим $P_k=p_k(R_k)$, где R_k — подмножество пространства $\mathscr{X}_k$ класса $n-1$ и p_k — некоторая непрерывная функция, определенная на множестве R_k.

Доказательство теоремы 1. Каждой точке $(x_1, x_2, \ldots) \in \in \prod_i R_i$ поставим в соответствие точку $[p_1(x_1), p_2(x_2), \ldots] \in \prod_i P_i$, тогда мы получим непрерывное отображение $p: \prod_i R_i \to \prod_i P_i$ (см. § 16, V, 8). Так как $\prod_i R_i$, в силу 1_{n-1}, есть множество (четного) класса $n-1$, то $\prod_i P_i$ — множество класса n.

Доказательство теоремы 2. Пусть, как и выше, $P=p(R)$, где $R \subset \mathscr{X}$. Пусть, кроме того, $Q=q(T)$, где $T \subset \mathscr{Y}$ есть подмножество класса $n-1$ и $q: T \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение. Имеют место следующие очевидные тождества (где $x \in \mathscr{X}$, $x^* \in R$ и $y \in T$):

$$\{x \in f^{-1}(Q)\} \equiv \{f(x) \in Q\} \equiv \bigvee_{x^*} \{[x=p(x^*)] \wedge [fp(x^*) \in Q]\} \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{x^*,\, y} \{[x=p(x^*)] \wedge [fp(x^*)=q(y)]\},$$

откуда

$$f^{-1}(Q) = \mathop{\mathsf{E}}_{x} \bigvee_{x^*,\, y} \{[x=p(x^*)] \wedge [fp(x^*)=q(y)]\}.$$

Следовательно, множество $f^{-1}(Q)$ является проекцией (§ 2, V, теорема) и, следовательно, непрерывным образом множества M точек (x, x^*, y), удовлетворяющих условию в фигурных скобках. Так как функции p, $f \circ p$ и q непрерывны, причем p определена на R, а q на T, то множество M замкнуто в произведении $\mathscr{X} \times R \times T$.

Так как последнее, согласно 1_{n-1}, есть множество класса $n-1$, то множество M является пересечением замкнутого множества (класса $n-1$) и множества класса $n-1$. В силу 3_{n-1}, M — множество класса $n-1$ в пространстве $\mathscr{X}\times\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, и $f^{-1}(Q)$, как непрерывный образ множества M, есть множество класса n, согласно второй части теоремы 2_{n-1}. Кроме того, равенство $f(P)=fp(R)$ означает, в силу 2_{n-1}, что $f(P)$ — множество класса n в пространстве $\mathscr{Y}$, как непрерывный образ множества R.

Доказательство теоремы 3. Пусть теперь $P_k=p_k(R_k)$ и $R_k\subset\mathscr{X}$. Имеют место следующие тождества:

$$\left\{x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k\right\}\equiv\left\{x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}p_k(R_k)\right\}\equiv\bigvee_k\{x\in p_k(R_k)\}\equiv$$

$$\equiv\bigvee_k\bigvee_{x^*}\{x=p_k(x^*)\}\equiv\bigvee_{x^*}\bigvee_k\{x=p_k(x^*)\}.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k=\mathop{\mathsf{E}}_x\bigvee_{x^*}\bigvee_k\{x=p_k(x^*)\}.$$

Это означает, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}P_k$ есть проекция множества

$$M=\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,x^*}\bigvee_k\{x=p_k(x^*)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,x^*}\{x=p_k(x^*)\}.$$

Так как отображение p_k, определенное на R_k, непрерывно, то множество $M_k=\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,x^*}\{x=p_k(x^*)\}$ замкнуто в произведении $\mathscr{X}\times R_k$, которое, согласно 1_{n-1}, принадлежит классу $n-1$; следовательно, множество M_k, как пересечение замкнутого множества с множеством класса $n-1$, принадлежит, в силу 3_{n-1}, классу $n-1$. В силу того же предложения, $M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$ — множество класса $n-1$ и, согласно 2_{n-1}, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}P_k$ — множество класса n, как непрерывный образ (проекция) множества M.

С другой стороны, включение $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}P_k$ означает, что существует последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x=p_k(x_k)$. Обозначая через $a=[a^1, a^2, \ldots]$ переменную, которая пробегает пространство $\mathscr{X}^{\aleph_0}$, получаем

$$\left\{x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}P_k\right\}\equiv\bigvee_a\bigwedge_k\{x=p_k(a^k)\}.$$

Следовательно, множество $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ есть проекция множества

$$\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,a} \bigwedge_k \{x = p_k(a^k)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,a} \{x = p_k(a^k)\}.$$

Итак, достаточно (в силу 3_{n-1}) доказать, что множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,a} \{x = p_k(a^k)\}$ есть множество класса $n-1$ (в пространстве $\mathscr{X} \times \mathscr{X}^{\aleph_0}$). Это следует, как и выше, из того, что функция p_k, рассматриваемая как функция от a, непрерывна (потому что a^k — непрерывная функция от a при фиксированном k; см. § 16, II) и определена на множестве

$$\mathop{\mathsf{E}}_{a} \{a^k \in R_k\} = \mathscr{X} \times \ldots \times \mathscr{X} \times R_k \times \mathscr{X} \times \mathscr{X} \times \ldots,$$

которое, согласно 1_{n-1}, принадлежит классу $n-1$.

б) *Случай четного* $n > 0$. Так как P — множество класса n, то $-P$ есть множество класса $n-1$ (нечетного).

Предложение 3 непосредственно вытекает из 3_{n-1} и формул Моргана:

$$-\Big(\bigcup_k P_k\Big) = \bigcap_k (-P_k) \quad \text{и} \quad -\Big(\bigcap_k P_k\Big) = \bigcup_k (-P_k).$$

В силу равенства (см. § 2, II (3)) $P \times \mathscr{Y} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y} - (P^c \times \mathscr{Y})$ и в силу 1_{n-1}, множество $P \times \mathscr{Y}$ принадлежит классу n и тому же классу принадлежит множество $\mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_{k-1} \times P_k \times \mathscr{X}_{k+1} \times \ldots$. Предложение 1_n получается отсюда, если принять во внимание предложение 3_n и тождество (см. § 3, VIII (1)):

$$P_1 \times P_2 \times \ldots =$$
$$= (P_1 \times \mathscr{X}_2 \times \mathscr{X}_3 \times \ldots) \cap (\mathscr{X}_1 \times P_2 \times \mathscr{X}_3 \times \ldots) \cap \ldots.$$

Наконец, перейдем к теореме 2. Согласно теореме о продолжении непрерывных функций (§ 35, I, 1), существует G_δ-множество $P^* \supset P$ и непрерывное продолжение f_1 функции f на множество P^*, т. е. $f = f_1 \mid P$. Тогда (см. § 3, III (14))

$$f^{-1}(Q) = P \cap f_1^{-1}(Q) \quad \text{и} \quad f_1^{-1}(Q) = f_1^{-1}(\mathscr{Y} - Q^c) = P^* - f_1^{-1}(Q^c).$$

Согласно 2_{n-1}, $f_1^{-1}(Q^c)$ — множество класса $n-1$; согласно 3_n, $f_1^{-1}(Q) = P^* \cap [\mathscr{X} - f_1^{-1}(Q^c)]$ — множество класса n. Взяв пересечение этого множества с множеством P и применив предложение 3_n, мы получим, что $f^{-1}(Q)$ — проективное множество класса n.

Кроме того, пусть $N \subset \mathscr{Y}$ (как и в случае $n = 0$) — борелевское множество, такое, что $\mathscr{X} = g(N)$, где g — непрерывное отображение; множество $g^{-1}(P)$ является множеством класса n в пространстве $\mathscr{Y}$ и, следовательно, множество $f(P)=fg[g^{-1}(P)]\subset\mathscr{Y}$ есть множество класса $n+1$.

Предложения 1—3 доказаны полностью.

Теорема 4. *Пусть f есть B-измеримая функция, определенная на множестве P класса n; тогда множество $I=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\{y=f(x)\}$ есть множество класса n.*

В самом деле, I — борелевское множество относительно произведения $P\times\mathscr{Y}$ (§ 31, VII, 1). Будучи пересечением борелевского множества и множества $P\times\mathscr{Y}$, принадлежащего классу n (согласно 1), I является множеством класса n (согласно предложению 3).

Теорема 5. *Предложение 2 остается справедливым, если допустить, что f — произвольная B-измеримая функция.*

В самом деле, согласно § 35, VI, существует B-измеримая функция f_1, определенная на всем пространстве $\mathscr{X}$ и такая, что $f=f_1|P$. Поэтому (§ 3, III (14)) $f^{-1}(Q)=P\cap f_1^{-1}(Q)$. Следовательно, достаточно доказать, что $f_1^{-1}(Q)$ есть множество класса n.

При нечетном n это так: положим $J=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\{y=f_1(x)\}$; тогда множество $f_1^{-1}(Q)$ есть проекция множества $J\cap(\mathscr{X}\times Q)$ на ось $\mathscr{X}$. Если n четно, то утверждение справедливо, в силу равенства $f_1^{-1}(\mathscr{Y}-Q)=\mathscr{X}-f_1^{-1}(Q)$.

Кроме того, $f(P)$ есть проекция множества $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\{y=f(x)\}$ на ось $\mathscr{Y}$.

Замечание. Таким образом, мы получаем эквивалентное определение проективного класса: множество P, расположенное в пространстве $\mathscr{X}$, есть множество класса $2n+1$, когда (в $\mathscr{X}$ или в другом полном сепарабельном пространстве) существуют множество R класса $2n$ и B-измеримая функция f, определенная на R, такие, что $P=f(R)$.

Для относительно проективных множеств справедливо следующее предложение.

Теорема 6. *Пусть $E\subset\mathscr{X}$ есть $\mathbf{G}_\delta$-множество. Для того чтобы множество $A\subset E$ было проективным класса n относительно E, необходимо и достаточно, чтобы оно было класса n (относительно $\mathscr{X}$).*

Применим индукцию. Для $n=0$ теорема очевидна. Для того чтобы множество A было борелевским относительно E (которое является борелевским), необходимо и достаточно, чтобы множество A было борелевским.

Допустим, что $n > 0$ и что теорема верна для $n-1$. Пусть n нечетно. Предположим, что A — множество класса n относительно E; тогда A — непрерывный образ некоторого подмножества из E класса $n-1$. Согласно 2, A — множество класса n относительно пространства $\mathcal{X}$. Аналогичным образом, из предположения, что A — множество класса n, следует, что A — множество класса n относительно E.

Пусть n — четно. Если A — множество класса n относительно E, то $A = E - B$, где B — множество класса $n-1$ относительно E, и, следовательно, относительно пространства $\mathcal{X}$. Так как $\mathcal{X} - B$ есть множество класса n, то из предложения 3 следует, что множество $A = E \cap (\mathcal{X} - B)$ тоже класса n.

Обратно, предположим, что A — множество класса n; тогда $A = \mathcal{X} - B$, где B — множество класса $n-1$. Следовательно, множество $E \cap B$ также класса $n-1$, и поэтому $E \cap B$ — множество класса $n-1$ относительно E. Так как $A \subset E$, то $A = E - B = E - (E \cap B)$, откуда следует, что A — множество класса n относительно E.

IV. Проекции.

Теорема. *Проективные множества нечетного класса n, расположенные в пространстве $\mathcal{X}$, совпадают с проекциями множеств класса $n-1$, расположенных в произведении $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$* [1]).

В самом деле, с одной стороны, проекции множеств класса $n-1$ являются множествами класса n (согласно III, 2). С другой стороны, любое множество P класса n есть непрерывный образ множества R класса $n-1$: $f(R) = P$, где $R \subset \mathcal{X}$. Следовательно, множество P есть проекция множества $\underset{x, x^*}{\mathsf{E}} \{x^* = f(x)\}$, которое, согласно III, 4, является множеством класса $n-1$ (в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$).

Замечание 1. Доказанная теорема остается справедливой, *если пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ заменить пространством $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$.*

В самом деле, в силу теоремы 1, § 36, II, пространство $\mathcal{X}$ является непрерывным образом множества $\mathcal{N}$, т. е. $\mathcal{X} = f(\mathcal{N})$. Если P — множество класса n (четного или нечетного), то множество $P_1 = f^{-1}(P)$ — также класса n (согласно III, 2).

Следовательно, множество P является непрерывным образом множества класса n, расположенного в $\mathcal{N}$, а последнее представляет собой — для нечетного n — непрерывный образ некоторого подмножества из $\mathcal{N}$ класса $n-1$. Следовательно, P есть проекция на

---

[1]) Это предложение объясняет термин „проективное множество".

ось $\mathscr{X}$ множества класса $n-1$, расположенного в произведении $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$.

Замечание 2. В частности, *аналитические множества совпадают с проекциями* (*на ось* $\mathscr{X}$) *замкнутых множеств, лежащих в пространстве* $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$ (см. Шпильрайн-Марчевский и Куратовский [1]).

В самом деле, в силу теоремы 1 из § 37, I, любое борелевское множество является непрерывным образом множества $\mathscr{N}$; это верно и для любого аналитического множества. Следовательно, если A — аналитическое множество, то существует непрерывная функция f, определенная на $\mathscr{N}$ и такая, что множество A является проекцией на ось $\mathscr{X}$ замкнутого множества $\underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\,\{x = f(a)\}$ пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$ (переменная a пробегает множество $\mathscr{N}$). Обратно, проекция замкнутого множества есть аналитическое множество (в силу п. III, 2).

V. Универсальные функции. В соответствии с определением § 30, XIII, отображение L_n, ставящее в соответствие каждому иррациональному числу a проективное множество $L_n(a)$ класса n (лежащее в пространстве $\mathscr{X}$), называется *универсальным относительно класса* $\boldsymbol{L}_n$, когда $\boldsymbol{L}_n$ совпадает с семейством значений функции L_n.

Теорема. *Для любого* $n > 0$ *существует универсальное отображение* L_n, *такое, что множество* $\underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\,\{x \in L_n(a)\}$ *есть множество класса* n (см. Лузин [8], стр. 290).

Пусть, в соответствии с замечанием из § 30, п. XIII, F — универсальное отображение относительно семейства замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$, такое, что множество $\underset{x,\,a,\,a^*}{\mathsf{E}}\,\{(x,\,a^*) \in F(a)\}$ замкнуто в пространстве $\mathscr{X} \times \mathscr{N} \times \mathscr{N}$ (a и a^* пробегают множество $\mathscr{N}$). Любое аналитическое подмножество пространства $\mathscr{X}$ есть проекция замкнутого подмножества пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$, поэтому, чтобы получить универсальное отображение L_1 относительно $\boldsymbol{L}_1 (= \boldsymbol{A})$, поставим в соответствие каждому a проекцию $F(a)$ на $\mathscr{X}$, т. е.

$$\{x \in L_1(a)\} \equiv \bigvee_{a^*} \{(x,\, a^*) \in F(a)\}.$$

Множество

$$\underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\,\{x \in L_1(a)\} \equiv \underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\,\bigvee_{a^*} \{(x,\, a^*) \in F(a)\},$$

как проекция замкнутого множества $\underset{x,\,a,\,a^*}{\mathsf{E}}\,\{(x,\, a^*) \in F(a)\}$, является аналитическим.

Доказательство проведем по индукции. Для четного n положим $L_n(a) = \mathscr{X} - L_{n-1}(a)$. Отображение L_n универсально относительно $\boldsymbol{L}_n$ и множество

$$\underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\{x \in L_n(a)\} = \underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\{x \notin L_{n-1}(a)\} = \mathscr{X} \times \mathscr{N} - \underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\{x \in L_{n-1}(a)\}$$

принадлежит классу n.

Пусть $n > 1$ нечетно; обозначим через $\overset{*}{L}_{n-1}$ отображение, универсальное относительно семейства подмножеств класса $n-1$ пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$, такое, что $\underset{x,\,a,\,a^*}{\mathsf{E}}\{(x,\, a^*) \in \overset{*}{L}_{n-1}(a)\}$ является множеством класса $n-1$ (в $\mathscr{X} \times \mathscr{N} \times \mathscr{N}$). Рассуждая, как в случае $n = 1$, легко показать, что отображение L_n, определенное тождеством

$$\{x \in L_n(a)\} \equiv \bigvee_{a^*}\{(x,\, a^*) \in \overset{*}{L}_{n-1}(a)\},$$

и есть требуемое отображение.

VI. Теорема существования.

Теорема. *Пространство $\mathscr{N}$ иррациональных чисел интервала $\mathscr{J}$ содержит для любого $n > 0$ проективное множество класса n, которое не является множеством класса $< n$; $\mathscr{N}$ содержит также непроективные множества.*

Рассмотрим универсальное отображение L_n, определенное в п. V (полагая $\mathscr{X} = \mathscr{N}$). Пусть индекс $n \geqslant 1$ нечетный, положим

$$E_n = \underset{a}{\mathsf{E}}\{a \in L_n(a)\} \quad \text{и} \quad E_{n+1} = \mathscr{N} - E_n = \underset{a}{\mathsf{E}}\{a \notin L_n(a)\}.$$

Будучи проекцией множества $\underset{x,\,a}{\mathsf{E}}\{x \in L_n(a)\} \cap \underset{x,\,a}{\mathsf{E}}(x = a)$ класса n, E_n также является множеством класса n. Следовательно, множество E_{n+1} — класса $n+1$.

С другой стороны, согласно теореме о диагонали (§ 30, XIV), E_{n+1} не принадлежит классу n и тем более классу $< n$ (так как n нечетно). Отсюда следует, что множество E_n не принадлежит классу $< n$, ибо в противном случае множество E_{n+1} принадлежало бы классу $< n+1$.

Допустим теперь, что каждое из множеств E_n расположено в интервале $(n-1,\, n)$. Тогда множество $E_\infty = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ не является проективным.

Замечания. 1. Процесс, примененный в п. V и VI, позволяет эффективно определить (см. § 23, VIII) множества E_n и E_∞. Существование множеств, не являющихся проективными, может быть установлено (не эффективно) более простым способом. В самом деле, так как семейство борелевских множеств имеет мощность континуума и семейство всех непрерывных образов каждого такого множества также имеет ту же мощность (§ 24, VI), то для любого n *класс* $\boldsymbol{L}_n$ *имеет мощность* $\mathfrak{c}$. Значит, ту же мощность имеет объединение $\bigcup\limits_i \boldsymbol{L}_i$.

А так как семейство всех подмножеств полного сепарабельного несчетного пространства имеет мощность $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$, то отсюда непосредственно вытекает существование множеств, не являющихся проективными.

2. Можно доказать (Банах и Куратовский [2][1]), что в пространстве $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$ (непрерывных функций) существует *линейное* множество класса $2n$, которое не является множеством более низкого класса (множество называется линейным, если оно вместе с элементами f и g содержит любую функцию вида $\lambda f + \mu g$).

3. В случае пространства действительных чисел возникает проблема *измеримости по Лебегу* множества E_3. Заметим, что это множество определено в явном виде [2].

VII. Инвариантность.

Теорема. *Пусть P — проективное множество класса n; тогда любое множество, гомеоморфное множеству P* (расположенное в том же или в другом полном сепарабельном пространстве), *также является проективным множеством класса n.*

Теорема очевидна для произвольного нечетного n, ибо любой непрерывный образ множества P есть множество класса n. В случае $n = 0$ (случай борелевских множеств) теорема верна, согласно следствию 1, § 35, IV. Если $n > 0$ четно, то свойство $\boldsymbol{L}_{n-1}$ удовлетворяет условиям теоремы § 35, IV, т. е. оно инвариантно относительно гомеоморфизмов и, кроме того,

1) любое $\boldsymbol{G}_\delta$-множество относительно множества класса $n-1$ есть множество класса $n-1$;

2) объединение некоторого множества класса $n-1$ и $\boldsymbol{F}_\sigma$-множества есть множество класса $n-1$.

Отсюда следует, что свойство множества быть дополнением к множеству класса $n-1$, т. е. быть множеством класса n, внутренне инвариантно [3].

VIII. Проективные функции высказываний [4]. Функция высказываний $\varphi(x)$ называется *функцией класса* $\boldsymbol{L}_n$, если $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ — множество класса $\boldsymbol{L}_n$. Установим следующие правила „проективного исчисления".

[1]) По поводу дальнейших результатов см. Кли [1].

[2]) См. об этом Куратовский [18]. См. также § 39, I, 2°.

[3]) Об инвариантности класса CA см. Александров [2]. По поводу обобщения этой теоремы на отображения, более общие, чем гомеоморфизмы, см. работы, указанные в примечании к следствию 1, § 35, IV.

[4]) См. § 1, 2 и 30, XI. См. также Тарский и Куратовский [1].

1. *Пусть $\varphi(x)$ — функция класса L_n, тогда ее отрицание $\neg\varphi(x)$ принадлежит классу CL_n.*

Действительно, $\mathop{\mathsf{E}}_x \neg\varphi(x) = \left[\mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x)\right]^c$.

2. *Пусть $\varphi(x)$ — функция класса L_n в пространстве $\mathcal{X}$, тогда $\varphi(x)$ — функция класса L_n в пространстве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.*

В самом деле (III, 1): $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} \varphi(x) = \left[\mathop{\mathsf{E}}_x \varphi(x)\right] \times \mathcal{Y}$.

3. *Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... — конечная или бесконечная последовательность функций класса L_n (n — фиксированное[1])), тогда функции $\bigvee_k \varphi_k(x)$ и $\bigwedge_k \varphi_k(x)$ также принадлежат классу L_n.*

Это прямое следствие утверждения III, 3.

4. *Пусть $\psi(x, y)$ — функция класса L_n (в $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$), тогда функция высказываний $\bigvee_y \psi(x, y)$ является функцией класса PL_n, а $\bigwedge_y \psi(x, y)$ — функция класса $CPCL_n$ (в пространстве $\mathcal{X}$).*

Действительно, множество $\mathop{\mathsf{E}}_x \bigvee_y \psi(x, y)$ есть проекция (см. § 2, V) множества $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} \psi(x, y)$ и, следовательно, принадлежит классу PL_n (п. IV). Кроме того, $\bigwedge_y \psi(x, y) \equiv \neg\left[\bigvee_y \neg\psi(x, y)\right]$.

5. *Пусть $\psi(x, y)$ — функция класса L_n, тогда $\varphi(x) = \psi(x, y_0)$ при фиксированном y_0 есть функция того же класса, так же как и функция $\chi(x) = \psi(x, x)$.*

В самом деле, поскольку функции $\psi(x, y) \wedge (y = y_0)$ и $\psi(x, y) \wedge \wedge (x = y)$ принадлежат классу L_n, $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} (\psi(x, y) \wedge (y = y_0))$ есть множество класса L_n относительно множества $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} (y = y_0)$, а $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} (\psi(x, y) \wedge \wedge (x = y))$ — множество класса L_n относительно диагонали $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} (x = y)$ (см. III, 6).

Следовательно (§ 15, IV и VI), множества $\mathop{\mathsf{E}}_x \psi(x, y_0)$ и $\mathop{\mathsf{E}}_x \psi(x, x)$ принадлежат классу L_n (в пространстве $\mathcal{X}$), откуда следует наше утверждение.

Замечание 1. Установленные правила показывают, что *логические операции $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\bigvee$, $\bigwedge$ над проективными функциями высказываний всегда приводят к проективным функциям высказываний.* Вместе с правилами § 30, XI они позволяют в то же время *вычислить* борелевский или проективный класс функции высказываний и, следовательно, множества, которое она определяет.

---

[1]) Это условие можно отбросить, если распространить определение классов L_n на бесконечные индексы (ср. п. I, примечание).

Эти правила показывают, что, пользуясь логическими обозначениями, можно естественным образом прийти к понятию проективного множества.

Замечание 2. Пусть задана функция высказываний двух переменных $\psi(x, y)$; для вычисления класса множества $\bigvee\limits_y \psi(x, y)$ можно воспользоваться правилом 4, в силу которого множество $\underset{x}{\mathsf{E}} \bigvee\limits_y \psi(x, y)$ есть *проекция* множества $\underset{x, y}{\mathsf{E}}\, \psi(x, y)$, а также правилом 1, § 2, V, в силу которого $\underset{x}{\mathsf{E}} \bigvee\limits_y \psi(x, y)$ есть *объединение* $\bigcup\limits_y \underset{x}{\mathsf{E}}\, \psi(x, y)$. Второе правило — где y рассматривается как *индекс* — наиболее удобно в случае, когда y пробегает счетное множество значений, а также в частном случае, когда множество $\underset{x}{\mathsf{E}}\, \psi(x, y)$ открыто при любом фиксированном y (ср. § 15, II, теорема 3 и § 20, V, следствие 7б).

Аналогичные замечания касаются оператора $\bigwedge$. Так, например, в § 34, VIII (2) h рассматривается как индекс, а не как точка пространства.

Приложение. Прямолинейная достижимость. Точка x называется *прямолинейно достижимой* относительно множества $M \subset \mathscr{X}$ (обозначается $x \in M_a$), если в пространстве $\mathscr{X}$ существует прямолинейный сегмент $[x, y]$, пересекающийся с множеством M не более чем в одной точке x (и не сводящийся к этой точке). Принадлежность точки z сегменту $[x, y]$ выражается равенством $|x-z|+|z-y|=|x-y|$; отсюда следует, что ($x, y, z \in \mathscr{X}$)

$$\{x \in M_a\} \equiv (x \in M) \wedge \bigvee_y \Big\{(y \neq x) \wedge \bigwedge_z [(|x-z|+|z-y| = \\ = |x-y|) \wedge (z \neq x) \Rightarrow \neg(z \in M)]\Big\} \equiv \\ \equiv (x \in M) \wedge \bigvee_y \Big\{(y \neq x) \wedge \bigwedge_z [(|x-z|+|z-y| \neq \\ \neq |x-y|) \vee (z = x) \vee \neg(z \in M)]\Big\}.$$

Таким образом, функция высказываний $\varphi(x) \equiv \{x \in M_a\}$ получается с помощью логических операций над функциями

$$\beta(x) \equiv \{x \in M\}, \qquad \gamma(x, y) \equiv \{x = y\},$$
$$\delta(x, y, z) \equiv \{|x-z|+|z-y|=|x-y|\}.$$

Вторая и третья функции, очевидно, принадлежат классу $\boldsymbol{F}_0$. Что касается первой функции, то она зависит от условий, наложенных на множество M. Пусть M есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество; тогда, применяя правила § 30, XI, получаем, что функция в квадратных скобках есть функция класса $\boldsymbol{G}_\delta$. Если пространство компактно, то операция $\bigwedge\limits_z$, осуществленная над этой функцией, также дает функцию класса $\boldsymbol{G}_\delta$.

(§ 20, V, следствие 7б); логически умножая последнюю на функцию $(y \neq x)$ класса $\boldsymbol{G}_0$, мы не меняем ее класса. Далее, применяя операцию $\bigvee\limits_y$, мы приходим к функции класса $\boldsymbol{A}$ (правило 4); умножив ее на функцию $(x \in M)$ класса $\boldsymbol{F}_\sigma$, мы получим, наконец, функцию $\varphi(x)$, которая, следовательно, является функцией класса $\boldsymbol{A}$.

Иначе говоря, *пусть M есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество в некотором компактном пространстве; тогда множество его прямолинейно достижимых точек является аналитическим* (теорема Никодима — Урысона; доказательство см. в работе Куратовского [18]).

Вообще, пусть M — подмножество класса $\boldsymbol{L}_{2n+1}$ некоторого полного пространства; тогда M_a — множество класса $\boldsymbol{L}_{2n+3}$.

Замечание 3. Класс множества M_a не может быть понижен. В самом деле, существует (в $\mathscr{E}^2$) замкнутое множество M, для которого M_a не является борелевским (см. Никодим [2], [4], [6], Урысон [3], Лузин [9])[1]).

IX. Инвариантность проективных классов относительно просеивания через решето и относительно $(\mathscr{A})$-операции. Напомним (см. § 3, XV), что *решетом* называется любая функция W, которая каждой конечной двоичной дроби $r \in \mathscr{R}_0$ ставит в соответствие множество $W_r \subset \mathscr{X}$. Множество A точек x, таких, что существует бесконечная последовательность $r_1 < r_2 < \ldots$, удовлетворяющая условию $x \in W_{r_1} \cap W_{r_2} \cap \ldots$, называется *просеянным* через данное решето.

В логических символах: пусть $a \in \mathscr{J}^{\aleph_0}$, тогда имеем

$$(1) \qquad (x \in A) \equiv \bigvee_a \bigwedge_k (a^k < a^{k+1}) \wedge (x \in W_{a^k}) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_a \bigwedge_k [(a^k < a^{k+1}) \wedge \bigvee_r (r = a^k) \wedge (x \in W_r)].$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что множества W_r являются подмножествами некоторого полного сепарабельного пространства $\mathscr{X}$.

Основной результат, касающийся решета, состоит в том, что *проективный класс $\boldsymbol{L}_n$ инвариантен относительно операции просеивания для* $0 \neq n \neq 2$ (теоремы 1 и 5).

Теорема 1. *Если все множества, образующие решето $W = \{W_r\}$, принадлежат нечетному классу n, то множество A, просеянное через это решето, также принадлежит классу n.*

Эта теорема легко следует из формулы (1). В самом деле, так как суммирование $\bigvee\limits_r$ счетное, то функция высказываний в квадратных скобках от переменных x и a является функцией класса $\boldsymbol{L}_n$. Следовательно, множество A принадлежит классу $\boldsymbol{PL}_n = \boldsymbol{L}_n$.

Мы применим эту теорему к одному важному частному случаю, а именно, к решету C, определенному в § 3, XVI. Множество,

[1]) В случае достижимости по дугам это не так, см. Мазуркевич [7а].

просеянное через это решето, является дополнением к множеству $L = \underset{t}{\mathsf{E}}\, (\overline{t} < \Omega)$ (обозначения см. § 3, XVI). Так как множества C_r — аналитические (даже открыто-замкнутые), то можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 1a (Лузин и Серпинский [3]). *Множество* $L = \underset{t}{\mathsf{E}}\, (\overline{t} < \Omega)$ *является множеством класса* $\boldsymbol{CA}$.

Более точно:

(2) $$[x \in (\mathscr{C} - L)] \equiv \bigvee_a \bigwedge_k \left[(a^k < a^{k+1}) \wedge \bigvee_l (r_l = a^k) \wedge (t^l = 2)\right].$$

Пусть теперь $W = \{W_r\}$ и $Z = \{Z_r\}$ — два решета, где $W_r \subset \mathscr{X}$ и $Z_r \subset \mathscr{Y}$; положим

(3) $$M_x = \underset{r}{\mathsf{E}}\, (x \in W_r) \quad \text{и} \quad N_y = \underset{r}{\mathsf{E}}\, (y \in Z_r).$$

Имеет место следующая

Теорема 2[1]. *Пусть* W_r — *множества класса* $2n$ *и* Z_r — *множества класса* $2n-1$; *тогда множество* P, *составленное из пар* (x, y), *таких, что* M_x *подобно подмножеству множества* N_y *является множеством класса* $2n-1$ (*в пространстве* $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$)

Заметим предварительно, что если $M, N \subset \mathscr{R}_0$, то условие их подобия эквивалентно существованию двух последовательностей действительных чисел (интервала $\mathscr{J}$) $a = [a^1, a^2, \ldots]$ и $b = [b^1, b^2, \ldots]$, таких, что

1° последовательность $a^1, a^2, \ldots$ содержит все элементы множества M,

2° последовательность $b^1, b^2, \ldots$ содержится в множестве N,

3° из неравенства $a^i > a^j$ следует неравенство $b^i > b^j$.

В логических обозначениях имеем

$$\bigvee_{a,\, b} \Big\{ \bigwedge_r \left[(r \in M) \Rightarrow \bigvee_n (r = a^n)\right] \wedge \bigwedge_k (b^k \in N) \wedge \\ \wedge \bigwedge_{i\, j} [(a^i > a^j) \Rightarrow (b^i > b^j)]\Big\}.$$

Подставим множество M_x вместо M и множество N_y вместо N и заметим, что (в силу определения множеств M_x и N_y) имеют место следующие тождества:

$$(r \in M_x) \equiv (x \in W_r) \quad \text{и} \quad (b^k \in N_y) \equiv (y \in Z_{b^k}) \equiv \bigvee_r [(r = b^k) \wedge (y \in Z_r)].$$

Заменяя $(\alpha \Rightarrow \beta)$ на $(\neg\, \alpha \vee \beta)$, получаем, наконец,

$$[(x, y) \in P] \equiv \bigvee_{a,\, b} \Big\{ \bigwedge_r \left[(x \in W_r^c) \vee \bigvee_n (r = a^n)\right] \wedge \\ \wedge \bigwedge_k \bigvee_r \left[(r = b^k) \wedge (y \in Z_r)\right] \wedge \bigwedge_{i,\, j} [(a^i \leqslant a^j) \vee (b^i > b^j)]\Big\}.$$

---

[1] См. „второй принцип“ Лузина [8]; см. также Куратовский [34].

Так как W_r^c и Z_r — множества класса $2n-1$ и операции $\bigwedge_r$, $\bigvee_n$, $\bigwedge_k$, $\bigvee_r$ и $\bigwedge_{i,j}$ счетны, отсюда следует, что функция высказываний (переменных x, y, a и b) в фигурных скобках есть функция класса $2n-1$. Следовательно, P — множество класса $\boldsymbol{PL}_{2n-1}=\boldsymbol{L}_{2n-1}$.

Таким образом, лемма установлена; применим ее сначала к частному случаю, когда решета W и Z совпадают с решетом C из § 3, XVI. Пусть τ и σ — два порядковых типа; условимся писать:

$$\tau \prec \sigma, \tag{4}$$

когда множество T типа τ подобно подмножеству множества S типа σ (в частном случае, когда τ и σ — типы вполне упорядоченных множеств, отношение $\tau \prec \sigma$ совпадает, очевидно, с $\tau \leqslant \sigma$). Из леммы вытекает такое следствие.

Следствие 2а. *Множество* $\mathop{E}\limits_{t,u}(\bar{t} \prec \bar{u})$ — *аналитическое.*

Действительно, в случае когда $W_r = C_r$, $\bar{t}$ есть, по определению (§ 3, XVI), порядковый тип множества M_t, определенного равенством (3).

Теорема 3[1]). *Пусть все множества, образующие решето W, принадлежат четному классу $n \geqslant 4$; тогда просеянное множество A также принадлежит классу n.*

Применим теорему 2 к случаю, когда $Z_r = C_r$ (см. § 3, XVI), и обозначим через $\mu(x)$ порядковый тип множества M_x. Множество $P = \mathop{E}\limits_{x,t}[\mu(x) \prec \bar{t}]$ есть множество класса $n-1$.

С другой стороны, так как $\bar{t}$ пробегает все счетные порядковые типы α (§ 3, XVI), то, согласно определению решета, мы имеем

$$\begin{aligned}[x \in (\mathscr{X} - A)] \equiv [\mu(x) < \Omega] \equiv \bigvee_{\alpha}[\mu(x) \leqslant \alpha < \Omega] \equiv \\ \equiv \bigvee_{t}[\mu(x) \leqslant \bar{t} < \Omega] \equiv \bigvee_{t}[(x,\ t) \in P] \wedge (\bar{t} < \Omega).\end{aligned}$$

Так как множество $\mathop{E}\limits_{t}(\bar{t} < \Omega)$, в силу следствия 1a, есть множество класса 2 и, следовательно, класса $n-1$ (см. II, 7), то множество $\mathop{E}\limits_{x,t}[(x,\ t) \in P](\bar{t} < \Omega)$ также является множеством класса $n-1$.

Множество $\mathscr{X} - A$ является множеством класса $\boldsymbol{PL}_{n-1} = \boldsymbol{L}_{n-1}$ и, следовательно, класса $n-1$. Поэтому A — множество класса n (в силу II, 5).

Теорема 4. *Проективные классы $\boldsymbol{L}_n$ для $0 \neq n \neq 2$ инвариантны относительно ($\mathcal{A}$)-операции.*

1) По поводу теорем 3 и 4 см. Куратовский [32].

Пусть [1]) $A = \bigcup_{a} \bigcap_{m} A_{a^1 \dots a^m}$. Систему $\{A_{a^1 \dots a^m}\}$ можно считать регулярной (см. § 3, XIV), ибо в противном случае ее можно „регуляризировать", заменив системой

$$A^*_{a^1 \dots a^m} = A_{a^1} \cap A_{a^1 a^2} \cap \dots \cap A_{a^1 a^2 \dots a^m},$$

что не влияет на проективный класс множеств, которые ее образуют. Согласно теореме § 3, XV, множество A просеяно решетом, образованным множествами, принадлежащими системе $\{A_{a^1 \dots a^m}\}$, следовательно, множествами класса n. Тогда, в силу 1 и 3, A есть множество класса $\boldsymbol{L}_n$.

Замечание. В случае нечетного n теорему 4 можно доказать более прямым способом. В самом деле, мы имеем

$$(x \in A) \equiv \bigvee_{a} \bigwedge_{m} (x \in A_{a^1 \dots a^m}).$$

Следовательно, для доказательства того, что эта функция высказываний принадлежит классу n, достаточно показать, что функция $x \in A_{a^1 \dots a^m}$ при фиксированном m принадлежит классу n (в пространстве $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$). А это непосредственно вытекает из тождества

$$(x \in A_{a^1 \dots a^m}) \equiv \bigvee_{k_1} \dots \bigvee_{k_m} (a^1 = k_1) \wedge \dots \wedge (a^m = k_m) \wedge (x \in A_{k_1 \dots k_m}).$$

Следствие 4а. *$(\mathcal{A})$-операция и вычитание, примененные к множествам, принадлежащим одновременно классам* **PCA** *и* **CPCA**, *не выводят за пределы этого семейства множеств.*

Следовательно, *наименьшее семейство множеств, содержащее все замкнутые множества и замкнутое относительно $(\mathcal{A})$-операции и вычитания, содержится в классах* **PCA** *и* **CPCA** [2]).

Теорема 2 касается соотношения $\tau \prec \sigma$; следующая теорема касается равенства $\tau = \sigma$.

Теорема 5. *Пусть множества W_r и Z_r принадлежат одновременно классу $2n$ и классу $2n-1$; тогда множество T, состоящее из пар (x, y), таких, что множество M_x подобно множеству N_y, является множеством класса $2n-1$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

---

[1]) Другое доказательство см. у Адисона и Клини [1].

[2]) Изучение этого семейства множеств, представляющих собой естественное обобщение **A**- и **CA**-множеств, было предложено Н. Н. Лузиным [4]. См. Никодим [7].

Следствие 4а было замечено Канторовичем и Ливенсоном [1], [2]. См. также указания Н. Н. Лузина [11].

В самом деле, подобие множеств M и N выражается следующим образом:

$$\bigvee_{a,b}\left\{\bigwedge_r\left[(r\in M)\Rightarrow\bigvee_n(r=a^n)\right]\wedge\bigwedge_r\left[(r\in N)\Rightarrow\bigvee_n(r=b^n)\right]\wedge\right.$$
$$\left.\wedge\bigwedge_n(a^n\in M)\wedge(b^n\in N)\wedge\bigwedge_{i,j}[(a^i>a^j)\Rightarrow(b^i>b^j)]\right\}.$$

Отсюда вытекает, что

$$[(x,\ y)\in T]\equiv\bigvee_{a,b}\left\{\bigwedge_r\left[(x\in W_r^c)\vee\bigvee_n(r=a^n)\right]\wedge\bigwedge_r\left[(y\in Z_r^c)\vee\right.\right.$$
$$\left.\vee\bigvee_n(r=b^n)\right]\wedge\bigwedge_n\bigvee_{r,s}[(r=b^n)\wedge(x\in W_r)\wedge(s=b^n)\wedge(y\in Z_s)]\wedge$$
$$\left.\wedge\bigwedge_{i,j}[(a^i\leqslant a^j)\vee(b^i>b^j)]\right\}.$$

Простое вычисление показывает, что множество T является множеством класса $2n-1$.

Следствие 5а. *Множество* $\underset{t,\,u}{\mathsf{E}}(\bar t=\bar u)$ *является аналитическим.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить вместо решета W и Z решето C из § 3, XVI.

Следствие 5б. *Множество* $L_\tau=\underset{t}{\mathsf{E}}(\bar t=\tau)$ *является аналитическим, каков бы ни был порядковый тип (счетный)* τ.

При фиксированном τ пусть u_0 — такой элемент канторовского множества $\mathscr{C}$, что $\bar u_0=\tau$. Так как функция высказываний двух переменных $\bar t=\bar u$ принадлежит классу A, то функция высказываний $\bar t=\bar u_0$ одного переменного t тоже принадлежит этому классу (см. VIII, 5). Отсюда следует требуемое заключение.

Замечание. Недавно проф. Д. Скотт получил более сильный результат, а именно: при любом порядковом типе τ множество L_τ представляет собой борелевское множество[1]).

X. Трансфинитная индукция. Докажем, что наряду с уже рассмотренными операциями трансфинитная индукция не выводит — при достаточно общих предположениях — за пределы проективных множеств (Куратовский [30]).

Прежде всего заметим, что любое отображение F, ставящее в соответствие каждому семейству $\boldsymbol{X}$ множеств (принадлежащих пространству $\mathscr{X}$) подмножество $F(\boldsymbol{X})$ пространства $\mathscr{X}$, определяет транс-

[1]) См. Скотт [1], см. также Рыль-Нардзевский [1]. Частичные результаты см. в статье Хартмана [1], относящейся к этим вопросам.

финитную последовательность множеств $A_0, A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ следующим образом:

$$A_0 = F(0) \quad \text{и} \quad A_\alpha = F(X_\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha > 0,$$

где X_α — семейство множеств $\{A_\xi\}$, $\xi < \alpha$.

Ставится задача определить, при каких условиях множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x,\,t}\left(x \in A_{\bar{t}}\right)(\bar{t} < \Omega)$ является проективным множеством в $\mathscr{C} \times \mathscr{X}$.

Обозначая прописными готическими буквами подмножества прямого произведения $\mathscr{C} \times \mathscr{X}$, положим

(1) $$\mathfrak{Z}^t = \mathop{\mathsf{E}}\limits_{x}[(t, x) \in \mathfrak{Z}], \quad \text{где} \quad t \in \mathscr{C},$$

и, как обычно,

(2) $$L = \mathop{\mathsf{E}}\limits_{t}(\bar{t} < \Omega).$$

Теорема 1. *Пусть R_t — отображение, ставящее в соответствие любой точке $t \in L$ и любому множеству $\mathfrak{B} \subset \mathop{\mathsf{E}}\limits_{u}(\bar{u} < \bar{t}) \times \mathscr{X}$ множество $R_t(\mathfrak{B}) \subset \mathscr{X}$.*

Тогда существует одно и только одно множество $\mathfrak{Z} \subset L \times \mathscr{X}$, такое, что

(3) $$\mathfrak{Z}^t = R_t\left[\mathfrak{Z} \cap \mathop{\mathsf{E}}\limits_{u,\,x}(\bar{u} < \bar{t})\right], \text{ *каково бы ни было* } \bar{t} < \Omega.$$

Действительно, пусть $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \Omega)$ — трансфинитная последовательность подмножеств пространства $L \times \mathscr{X}$, определенная по индукции следующим образом:

(4) $$\mathfrak{A}_0 = \mathop{\mathsf{E}}\limits_{t,\,x}(t = 0) \wedge [x \in R_0(0)],$$

(5) $$\mathfrak{A}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta \cup \mathfrak{R}_\alpha, \quad \text{где} \quad \mathfrak{R}_\alpha = \mathop{\mathsf{E}}\limits_{t,\,x}(\bar{t} = \alpha) \wedge \left[x \in R_t\left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta\right)\right].$$

Легко доказать по индукции, что

(6) $$\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathop{\mathsf{E}}\limits_{u}(\bar{u} \leqslant \alpha) \times \mathscr{X}.$$

Кроме того, $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_\alpha \subset \ldots$. Положим

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{A}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{A}_\alpha \cup \ldots.$$

В силу включения (6), имеем

(7) $$\mathfrak{A}_\alpha^t = \mathfrak{A}_{\bar{t}}^t \quad \text{при} \quad \bar{t} \leqslant \alpha,$$

(8) $$\mathfrak{A}_\alpha^t = 0 \quad \text{при других} \quad t.$$

Тогда имеет место равенство

(9) $$\mathfrak{Z}^t = \bigcup_{\alpha < \Omega} \mathfrak{A}_\alpha^t = \mathfrak{A}_{\bar{t}}^t = R_t\left(\bigcup_{\beta < \bar{t}} \mathfrak{A}_\beta\right),$$

откуда следует формула (3), так как $\bigcup\limits_{\beta < \bar{t}} \mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{Z} \cap \mathop{\mathsf{E}}\limits_{u,\,x}(\bar{u} < \bar{t})$.

Единственность множества $\mathfrak{Z}$ легко доказывается по индукции.

В тех же обозначениях имеет место следующее утверждение (которое представляет собой явное определение множества $\mathfrak{Z}$, заданного в неявном виде соотношением (3)).

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{G}:\mathscr{C}\to\{\mathfrak{A}_\alpha\}$, $\alpha<\Omega$. Тогда имеют место следующие тождества* (t, v, $z\in\mathscr{C}$, $x\in\mathscr{X}$):

$$\{(v,\ x)\in\mathfrak{Z}\}\equiv$$
$$\equiv(\bar v<\Omega)\wedge\bigvee_z\bigwedge_t\{(\bar t\leqslant\bar v)\Rightarrow[\mathfrak{G}^t(z)=R_t\ (\mathfrak{G}\ (z)\cap\mathop{\mathsf{E}}_{u,\ x}(\bar u<\bar t\,))]\}\wedge$$
$$\wedge\{x\in\mathfrak{G}^v(z)\}\equiv$$
$$\equiv(\bar v<\Omega)\wedge\bigwedge_z\Big\{\Big[\bigwedge_t(\bar t\leqslant\bar v)\Big]\Rightarrow\Big[\mathfrak{G}^t(z)=R_t\Big(\mathfrak{G}(z)\cap\mathop{\mathsf{E}}_{u,\ x}(\bar u<\bar t)\Big)\Big]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[x\in\mathfrak{G}^v(z)]\Big\}.$$

Прежде всего заметим, что множество $\mathfrak{A}_\alpha^t$ может быть определено следующим образом:

$$\mathfrak{A}_\alpha^t=R_t\Big[\mathfrak{A}_\alpha\cap\mathop{\mathsf{E}}_{u,\ x}(\bar u<\bar t)\Big]\quad\text{при}\quad\bar t\leqslant\alpha\quad\text{и}\quad\mathfrak{A}_\alpha^t=0\ \text{для других}\ t.$$

Действительно, в силу соотношения (5),

$$\mathfrak{A}_\alpha\cap\mathop{\mathsf{E}}_{u,\ x}(\bar u<\bar t)=\bigcup_{\beta<\bar t}\mathfrak{A}_\beta,$$

откуда, в силу (7) и (9), получается искомый вывод.

Следовательно, множество $\mathfrak{Z}$, как объединение множеств $\mathfrak{A}_\alpha$, представляет собой множество точек (v, x), такое, что $\bar v<\Omega$, для которых существует точка $z\in\mathscr{C}$, такая, что

1° при $\bar t\leqslant\bar v$ имеем $\mathfrak{G}^t(z)=R_t\,[\mathfrak{G}\,(z)\cap\mathop{\mathsf{E}}_{u,\ x}(\bar u<\bar t)]$,

2° $x\in\mathfrak{G}^v(z)$

(разумеется, $\mathfrak{G}\,(z)=\mathfrak{A}_\alpha$).

Это условие, выраженное в логическнх символах, дает первое тождество. Так как множество $\mathfrak{A}_\alpha$ определено соотношениями (7) и (8) однозначно, то условие выполнения включения $(v,\ x)\in\mathfrak{Z}$ (где $\bar v<\Omega$) можно сформулировать также следующим образом: какова бы ни была точка z, удовлетворяющая условию 1°, для нее выполняется условие 2°. Отсюда следует второе соотношение эквивалентности.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{G}$ — определенное на $\mathscr{C}$ универсальное отображение относительно проективных множеств класса $\boldsymbol{L}_n$ ($n\geqslant1$), принадлежащих пространству $\mathscr{C}\times\mathscr{X}$, такое, что множества*

$$\mathop{\mathsf{E}}_{z,\,t,\,x}[(t,\ x)\in\mathfrak{G}\,(z)]\quad и\quad\mathop{\mathsf{E}}_{z,\,t,\,x}\{x\in R_t[\mathfrak{G}\,(z)\cap\mathop{\mathsf{E}}_{u,\ x}(\bar u<\bar t)]\}$$

принадлежат классу L_n. Тогда множество $\mathfrak{Z}$, рассмотренное в теореме 1, *является проективным множеством* (*классов* L_{n+4} *и* CL_{n+4}).

Прежде всего, отображение $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию теоремы 2, т. е. множества $\mathfrak{A}_\alpha$, определенные формулами (4) и (5), принадлежат классу L_n. В самом деле, рассуждая по индукции, нужно только доказать, что $\mathfrak{R}_\alpha$ — множество класса L_n при условии, что множества $\mathfrak{A}_\beta$ для $\beta<\alpha$ являются множествами класса L_n. Поскольку $\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta$ есть множество класса L_n, существует такое z_0, что $\mathfrak{G}(z_0)=$ $=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta$, и так как $\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta\subset\underset{u,\,x}{\mathsf{E}}(\bar{u}<\alpha)$, отсюда следует, что

$$(\bar{t}=\alpha)\wedge\Big[x\in R_t\Big(\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_\beta\Big)\Big]\equiv$$
$$\equiv(\bar{t}=\alpha)\wedge\Big\{x\in R_t\Big[\mathfrak{G}(z_0)\cap\underset{u,\,x}{\mathsf{E}}(\bar{u}<\bar{t})\Big]\Big\}.$$

Так как, по предположению (см. VIII, 5), функция высказываний в фигурных скобках является функцией класса L_n и множество $\underset{t}{\mathsf{E}}(\bar{t}=\alpha)$ борелевское (§ 30, XII), множество $\mathfrak{R}_\alpha$ принадлежит классу L_n. Установив это, выводим из тождества

$$(10)\qquad \{A=B\}\equiv\bigwedge_x\big[\big((x\in A)\wedge(x\in B)\big)\vee\big((x\notin A)\wedge(x\notin B)\big)\big],$$

что множество

$$\underset{z,\,t,\,v,\,x}{\mathsf{E}}\Big[\mathfrak{G}^t(z)=R_t\Big(\mathfrak{G}(z)\cap\underset{u,\,x}{\mathsf{E}}(\bar{u}<\bar{t})\Big)\Big]$$

проективное (класса $n+2$ или $n+3$ в зависимости от того, является n четным или нечетным). Заменим $\bar{t}\leqslant\bar{v}$ на $\bar{t}\prec\bar{v}$ (см. IX (4)); так как множество $\underset{t,\,v}{\mathsf{E}}(\bar{t}\prec\bar{v})$ проективное (и даже аналитическое, см. IX, следствие 2а) и так как $\underset{v}{\mathsf{E}}(\bar{v}<\Omega)$ есть CA-множество (IX, следствие 1а), то из теоремы 2 следует, что $\mathfrak{Z}$ — проективное множество классов L_{n+4} и CL_{n+4}.

Приложения. 1) *Множество Лебега, универсальное относительно аналитически представимых функций, является проективным*[1]).

Это множество определяем следующим образом. Положим для $t=\frac{t^{(1)}}{3}+\frac{t^{(2)}}{9}+\ldots$

$$(11)\qquad t_{(n)}=\frac{t^{(1\cdot 2^n)}}{3}+\frac{t^{(3\cdot 2^n)}}{9}+\frac{t^{(5\cdot 2^n)}}{27}+\ldots.$$

[1]) Определение этого множества см. в статье Лебега [1], гл. VIII. Проблема проективности этого множества была поставлена Н. Н. Лузиным. Она решена Куратовским [31].

Пусть A — плоское борелевское множество $\subset \mathscr{C} \times \mathscr{E}$, содержащее среди вертикальных сечений все замкнутые и все открытые подмножества из $\mathscr{E}$. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{E}$ множество $\mathfrak{Z}$, определенное следующими условиями:

$$\mathfrak{Z}^0 = A, \quad \mathfrak{Z}^{t,\,y} = \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} \mathfrak{Z}^{t^{[n]} y_{(n)}} \quad \text{для} \quad 0 < \overline{t} < \Omega \ \text{ и } \ y \in \mathscr{C}\,^{1)},$$

$$\mathfrak{Z}^t = 0 \quad \text{для всех остальных } t.$$

В этом случае множество $R_t(\mathfrak{B})$ может быть определено следующим образом: так как $\mathfrak{B} \subset \mathop{\mathsf{E}}\limits_u (\overline{u} < \overline{t}) \times \mathscr{C} \times \mathscr{E}$, то $R_t(\mathfrak{B}) \subset \mathscr{C} \times \mathscr{E}$ определено условиями:

$$R_0(0) = A, \qquad R_t(\mathfrak{B}) = \mathop{\mathsf{E}}_{y,\,z} \left[x \in \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} \mathfrak{B}^{t^{[n]},\, y_{(n)}} \right] \quad \text{для} \quad t \neq 0.$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — универсальное отображение относительно любого аналитического подмножества из $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{E}$, такое, что множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{z,\,t,\,y,\,x} [(t,\ y,\ x) \in \mathfrak{G}(z)]$ — аналитическое (см. п. V). Остается доказать, что множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{z,\,t,\,y,\,x} \left[(y,\ x) \in R_t\left(\mathfrak{G}(z) \cap \mathop{\mathsf{E}}\limits_{u,\,y,\,x} (\overline{u} < \overline{t})\right)\right]$ является аналитическим множеством. Итак, имеем (для $t \neq 0$)

$$\left[(y,\ x) \in R_t\left(\mathfrak{G}(z) \cap \mathop{\mathsf{E}}_{u,\,y,\,x} (\overline{u} < \overline{t})\right)\right] \equiv$$

$$\equiv \left[x \in \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} \mathfrak{G}^{t^{[n]},\, y_{(n)}}(z)\right] \equiv \bigwedge_n \bigvee_k \left(x \in \mathfrak{G}^{t^{[n+k]},\, y_{(n+k)}}(z)\right) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_n \bigvee_k \left[\left(t^{[n+k]},\ y_{(n+k)},\ x\right) \in \mathfrak{G}(z)\right].$$

Так как функции $t^{[n]}$ и $y_{(n)}$ при фиксированном n непрерывны (см. § 30, XII), то отсюда вытекает требуемое утверждение.

2) Изменим теперь определение отображения $R_t(\mathfrak{B})$ следующим образом: положим $\mathscr{X} = \mathscr{C}$, $R_0(0) = A$, где A — открытое множество, такое, что A^y есть функция, универсальная относительно открытых множеств (см. примечание 1 на стр. 366),

$$R_t(\mathfrak{B}) = \mathop{\mathsf{E}}_{y,\,x} \left\{ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}^{t^{[n]},\, y_{(n)}} \right\} \quad \text{или} \quad \mathop{\mathsf{E}}_{y,\,x} \left\{ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}^{t^{[n]},\, y_{(n)}} \right\}$$

в зависимости от того, четно или нечетно $\overline{t}$ (в смысле § 30, XII, 4).

---

[1]) Об определении $t^{[n]}$ см. § 30, XII.

В соответствии с (1), через $\mathfrak{Z}^{t,\,y}$ обозначено множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_x [(t,\ y,\ x) \in \mathfrak{Z}]$. По определению (§ 1, V),

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k}.$$

Множество $\mathfrak{Z}$, определение которого вытекает из определения множества $R_t(\mathfrak{B})$, является подмножеством пространства $\mathscr{E}^3$, таким, что для каждого $\bar{t} < \Omega$ множество $\mathfrak{Z}^t$ — борелевское множество класса $G_{\bar{t}}$ и функция $\mathfrak{Z}^{t, y}$ (аргумента y) является универсальной относительно семейства подмножеств из $\mathscr{E}$ класса $G_{\bar{t}}$. Проективность множества $\mathfrak{Z}$ вытекает, как и в предыдущем примере, из определения $R_t(\mathfrak{B})$. Единственное дополнительное допущение: множество тех t, для которых $\bar{t}$ есть четный порядковый тип, является борелевским; мы это доказали в § 30, XII, 4.

3) Пусть для точки $t^* \in \mathscr{E}$ множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{r_n}(t^{*^n} = 2)$ получается из множества $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{r_n}(t^n = 2)$[1]) вычеркиванием последнего элемента (если он существует; в противном случае мы положим $t^* = t$). Легко видеть, что t^* есть B-измеримая функция от t (см. § 39, V, 2). Множество $\mathfrak{Z}$ определяется следующим образом:

$$\mathfrak{Z}^0 = A, \quad \mathfrak{Z}^{t, y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Z}^{t^{[n]}, y_{(n)}} \quad \text{или} \quad \mathscr{E} - \mathfrak{Z}^{t^*, y}$$

в зависимости от того, четно или нечетно $\bar{t}$.

Соответствующее множество $R_t(\mathfrak{B})$ определяется, как в примере 2, с заменой множества $\bigcap \mathfrak{B}^{t^{[n]}, y_{(n)}}$ множеством $\mathscr{E} - \mathfrak{B}^{t^*, y}$. Как и выше, $\mathfrak{Z}$ — проективное множество.

В примерах 1 — 3 множество $\mathfrak{Z}^t$ зависит только от $\bar{t}$ (а не от t). Таким образом, полагая $A_\alpha = \mathfrak{Z}^t$, где t — некоторое число, такое, что $\bar{t} = \alpha$, мы определяем трансфинитную последовательность борелевских множеств (а именно класса α в примерах 2 и 3). В следующем примере множество $\mathfrak{Z}^t$ зависит от t.

4) Пусть $\mathfrak{Z}^0 = A$, $\mathfrak{Z}^{t, y} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Z}^{t^*, y_{(n)}}$ для нечетного $\bar{t}$,

$$x \in \mathfrak{Z}^{t, y} \equiv \bigvee_{n=1}^{\infty} (\bar{y}_{(2n+1)} < \bar{t}) \wedge \left(x \in \mathfrak{Z}^{y_{(2n+1)}, y_{(2n)}}\right) \text{для четного } \bar{t},\ 0 < \bar{t} < \Omega.$$

Здесь множество $R_t(\mathfrak{B})$ может быть определено следующим образом:

$$\{(y, x) \in R_t(\mathfrak{B})\} \equiv \{[(t = 0) \wedge ((y, x) \in A)] \vee [(\bar{t} — \text{нечетное}) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_n \left(x \in \mathfrak{B}^{t^*, y_{(n)}}\right)] \vee [(\bar{t} > 0 — \text{четное}) \wedge \bigvee_n (\bar{y}_{(2n+1)} + 1 \leqslant \bar{t}) \wedge$$
$$\wedge \left(x \in \mathfrak{B}^{y_{(2n+1)}, y_{(2n)}}\right)]\}.$$

[1]) В § 3, XVI, это множество обозначено символом R_t.

Отсюда, как и выше, следует, что множество $\mathfrak{Z}$ — проективное [1]).

XI. Операции Хаусдорфа. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — произвольная последовательность множеств и B — некоторое множество бесконечных последовательностей целых положительных чисел (рассматриваемое как подмножество пространства $\mathcal{N}$); говорят, что *множество H получается из последовательности $\{A_n\}$ с помощью операции Хаусдорфа с базой B* [2]), если

$$(1) \qquad (x \in H) \equiv \bigvee_a \left\{(a \in B) \wedge \bigwedge_n \left(x \in A_{a^n}\right)\right\}.$$

Таким образом, например, операция

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k}$$

является операцией Хаусдорфа. Ее база состоит из последовательностей целых положительных чисел $a = [a^1, a^2, \ldots]$, содержащих бесконечное число попарно различных членов. Операции $\bigcup\limits_n$ и $\bigcap\limits_n$ — также операции Хаусдорфа. Вообще $(\mathcal{A})$-операцию можно привести к операции Хаусдорфа (см. Хаусдорф [5]).

Теорема 1. *Пусть множества A_n и база B — проективные множества нечетного класса k; тогда H — проективное множество того же класса.*

В самом деле, имеем

$$\left(x \in A_{a^n}\right) \equiv \bigwedge_m \left[(m = a^n) \Rightarrow (x \in A_m)\right].$$

Следовательно, в силу (1),

$$(x \in H) \equiv \bigvee_a \left\{(a \in B) \wedge \bigwedge_{m,\, n} \left[(m = a^n) \Rightarrow (x \in A_m)\right]\right\}.$$

Отсюда следует, что множество H принадлежит классу $\boldsymbol{PL}_k = \boldsymbol{L}_k$.

Вернемся теперь к вычислению проективного класса множества $\mathfrak{Z}$, определенного трансфинитной индукцией (см. п. X). Когда это определение получается при помощи операции Хаусдорфа, часто удобнее пользоваться другим методом (отличным от изложенного в п. X).

Следующий метод, принадлежащий Джону фон Нейману [3]), позволяет доказать, в частности, что множество $\mathfrak{Z}$, рассмотренное в примерах 1, 2 и 4 п. X, является разностью двух аналитических множеств. Для упрощения обозначений мы ограничимся формулировкой теоремы, которая охватывает случай множества Лебега (пример **1**).

---

[1]) Это множество встречается в работе Куратовского [8].

[2]) Хаусдорф [5], Колмогоров [1], Канторович и Ливенсон [2], Ляпунов [2], [3] (где можно найти многочисленные библиографические ссылки).

[3]) См. фон Нейман и Куратовский [1]. Некоторые приложения можно найти в работе Тугуе [1].

Некоторое обобщение этой теоремы позволяет провести требуемое вычисление в примерах 2 и 4.

Мы воспользуемся следующими обозначениями. Через r обозначим конечную систему целых положительных чисел $k_1, \ldots, k_n$ $(n \geqslant 0)$; пусть γ — отображение, которое каждому r ставит в соответствие целое число $\gamma(r) \geqslant 0$; r можно рассматривать как конечную двоичную дробь $0 \leqslant r < 1$, а именно (см. § 3, XV)

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_1+\ldots+k_n}}.$$

Пусть Γ — множество всех отображений γ. Введем в это множество топологию следующим образом: последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ сходится к γ, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(r) = \gamma(r)$, каково бы ни было r. Тогда Γ — *полное сепарабельное пространство*. В самом деле, оно гомеоморфно пространству иррациональных чисел. Чтобы убедиться в этом, расположим числа r в бесконечную последовательность r_1, $r_2, \ldots$ и каждому элементу γ из Γ поставим в соответствие элемент $a = \{\gamma(r_1), \gamma(r_2), \ldots\}$ пространства $\mathscr{N}$.

Обозначим через $b_r(\gamma) = b_{k_1, \ldots, k_n}(\gamma)$ бесконечную последовательность $\gamma(k_1, \ldots, k_n, 1)$, $\gamma(k_1, \ldots, k_n, 2), \ldots$. В частности, $b_0(\gamma) = \{\gamma(1), \gamma(2), \ldots\}$. Наконец, положим $\overline{\gamma, r} = \{\gamma(k_1), \ldots$ $\ldots, \gamma(k_1, \ldots, k_n)\}$. Следовательно, $\overline{\gamma, 0} = 0$ (пустое множество).

Заметим, что при фиксированном r функции γ и b_r, рассматриваемые как функции переменного γ, непрерывны. Символы $t^{[n]}$ и $t_{(n)}$ имеют (для $t \in \mathscr{C}$) тот же смысл, что и в п. X (пример 1); определим символы $t^{[r]}$ и $t_{(r)}$ при помощи конечной индукции, считая, что $t^{[0]} = t = t_{(0)}$ и

$$t^{[k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}]} = \left(t^{[k_1, \ldots, k_n]}\right)^{[k_{n+1}]},$$

$$t_{(k_1, \ldots, k_n, k_{n+1})} = \left(t_{(k_1, \ldots, k_n)}\right)_{(k_{n+1})}.$$

Легко доказывается, что функции $t^{[\overline{\gamma, r}]}$ и $t_{(\overline{\gamma, r})}$ для фиксированного r являются непрерывными функциями от t и γ и что

$$\left(t^{[k_1]}\right)^{[k_2, \ldots, k_n]} = t^{[k_1, k_2, \ldots, k_n]}, \quad \left(t_{(k_1)}\right)_{(k_2, \ldots, k_n)} = t_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}.$$

Теорема 2. *Пусть $A \subset \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ и $B \subset \mathscr{N}$ — два аналитических множества. Множество $\mathfrak{Z} \subset \mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{C}$, определенное условиями*

$$\mathfrak{Z}^0 = A, \quad \mathfrak{Z}^{t, y} = \bigcup_a \bigcap_n \mathfrak{Z}^{t^{[a^n]},\, y_{(a^n)}}, \quad \textit{для } 0 < \bar{t} < \Omega,\ y \in \mathscr{C},\ a \in B,$$

$$\mathfrak{Z}^t = 0 \textit{ для всех остальных } t,$$

является разностью двух аналитических множеств.

Более точно, *имеет место тождество*

$$(t,\ y,\ x) \in \mathfrak{Z}] \equiv$$
$$\equiv (\bar{t} < \Omega) \wedge \bigvee_{\gamma} \Big\{ (\gamma(0) \neq 0) \wedge \bigwedge_{r} \Big[\big(\gamma(r) \neq 0\big) \wedge \big(t^{[\overline{\gamma,\ r}]} = 0\big) \big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big((y_{\overline{(\gamma,\ r)}},\ x) \in A \big) \Big] \wedge \Big[\big(\gamma^{(r)} \neq 0\big) \wedge \big(t^{[\overline{\gamma,\ r}]} \neq 0\big) \Rightarrow \big(b_r(\gamma) \in B\big) \Big] \Big\}.$$

Как только будет установлено это тождество, из него непосредственно будет следовать, что множество $\mathfrak{Z}$ является пересечением CA-множества и аналитического множества, ибо, с одной стороны, множество $\underset{t}{\mathsf{E}}(\bar{t} < \Omega)$ есть CA-множество (согласно следствию 1а, п. IX), а с другой стороны, функция высказываний в фигурных скобках — аналитическая, так как пересечение $\bigwedge\limits_{r}$ счетно и функции $\gamma(r)$, $t^{[\overline{\gamma,\ r}]}$, $y_{\overline{(\gamma,\ r)}}$ и $b_r(\gamma)$ непрерывны по γ (при фиксированном r).

Перейдем к доказательству этого тождества.

1) Пусть $(t,\ y,\ x) \in \mathfrak{Z}$. Мы докажем методом трансфинитной индукции, что существует функция $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющая условию в фигурных скобках и, более того, принимающая при $r = 0$ заданное заранее значение $p \neq 0$.

Пусть сначала $\bar{t} = 0$, т. е. $t = 0$; тогда $(y,\ x) \in A$. Пусть γ — функция, определенная следующим образом: $\gamma(0) = p$ и $\gamma(r) = 0$ для $r \neq 0$. Условия в скобках очевидным образом выполняются.

Допустим теперь, что $\alpha > 0$ и что наше предположение имеет место для каждого t, такого, что $\bar{t} < \alpha$.

Пусть $\bar{t} = \alpha$. Включение $(t,\ y,\ x) \in \mathfrak{Z}$ означает, что существует бесконечная последовательность $a = (a^1,\ a^2,\ \ldots) \in B$, такая, что для каждого n имеем

$$x \in \mathfrak{Z}^{t^{[a^n]},\ y_{(a^n)}}, \quad \text{т. е.} \quad \left(t^{[a^n]},\ y_{(a^n)},\ x\right) \in \mathfrak{Z}.$$

Так как $\overline{t^{[a^n]}} < \bar{t}$, то для каждого n существует, по предположению индукции, функция $\gamma_n \in \Gamma$, такая, что

1° $\gamma_n(0) = a^n$,

2° если $\gamma_n(r) \neq 0$ и $t^{[a^n][\overline{\gamma_n,\ r}]} = 0$, то $\left(y_{(a^n)\overline{(\gamma_n,\ r)}},\ x\right) \in A$,

3° если $\gamma_n(r) \neq 0$ и $t^{[a^n][\overline{\gamma_n,\ r}]} \neq 0$, то $b_r(\gamma_n) \in B$.

Определим γ следующим образом: $\gamma(0) = p$ и для $r = (k_1,\ \ldots,\ k_m)$, где $m \neq 0$, положим $\gamma(k_1,\ \ldots,\ k_m) = \gamma_{k_1}(k_2,\ \ldots,\ k_m)$. Тогда

$$\overline{\gamma,\ r} = \overline{\gamma,\ (k_1,\ \ldots,\ k_m)} = \{\gamma(k_1),\ \gamma(k_1,\ k_2),\ \ldots,\ \gamma(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m)\} =$$
$$= \left\{a^{k_1},\ \gamma_{k_1}(k_2),\ \ldots,\ \gamma_{k_1}(k_2,\ \ldots,\ k_m)\right\} = \left\{a^{k_1},\ \overline{\gamma_{k_1},\ k_2,\ \ldots,\ k_m}\right\}$$

и

$$b_r(\gamma) = \{\gamma(k_1, \ldots, k_m, 1), \gamma(k_1, \ldots, k_m, 2), \ldots\} =$$
$$= \{\gamma_{k_1}(k_2, \ldots, k_m, 1), \gamma_{k_1}(k_2, \ldots, k_m, 2), \ldots\} = b_{k_2, \ldots, k_m}(\gamma_{k_1}).$$

Отсюда легко вытекает, что условие в фигурных скобках выполняется.

2) Обратно, допустим, что γ удовлетворяет условию в скобках. Покажем, что $(t, y, x) \in \mathfrak{Z}$. Пусть сначала $t = 0$. Так как $\gamma(0) \neq 0$ и $t^{[\gamma, 0]} = t^{[0]} = t$, то $\left(y_{\overline{(\gamma, 0)}}, x\right) \in A$. Так как, кроме того, $y_{\overline{(\gamma, 0)}} = y_{(0)} = y$, то $(y, x) \in A = \mathfrak{Z}^0$, следовательно, $(t, y, x) \in \mathfrak{Z}$.

Допустим теперь, что $\alpha > 0$ и что наше предположение выполняется для каждого t, такого, что $\overline{t} < \alpha$.

Пусть $\overline{t} = \alpha$. Положим $a = b_0(\gamma) = \{\gamma(1), \gamma(2), \ldots\}$. Так как $\gamma(0) \neq 0$ и $t^{[\gamma, 0]} = t \neq 0$, то $b_0(\gamma) \in B$, т. е. $a \in B$. Остается доказать, что для любого n имеет место соотношение

$$x \in \mathfrak{Z}^{t^{[a^n]}, y_{(a^n)}}, \quad \text{т. е.} \quad \left(t^{[a^n]}, y_{(a^n)}, x\right) \in \mathfrak{Z}.$$

Положим $\gamma_{k_1}(k_2, \ldots, k_m) = \gamma(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $m \neq 0$. Легко проверить, что условия 1°—3° выполняются для любого n. Так как $\overline{t^{[a^n]}} < \alpha$, то, по предположению, отсюда следует, что

$$\left(t^{[a^n]}, y_{(a^n)}, x\right) \in \mathfrak{Z}.$$

§ 39. Аналитические множества

Пространство предполагается полным сепарабельным.

I. Общие теоремы. Напомним сначала некоторые свойства аналитических множеств, установленные в § 38. По определению, аналитические множества совпадают с непрерывными образами борелевских множеств (§ 38, I). Так как любое борелевское множество есть непрерывный образ множества $\mathcal{N}$ иррациональных чисел, то аналитические множества можно определить как *непрерывные образы множества* $\mathcal{N}$ (§ 38, IV)[1]).

Свойство быть аналитическим множеством инвариантно относительно счетных операций: объединения, пересечения и прямого произведения, а также относительно $(\mathcal{A})$-операции и относительно B-измеримых отображений (данного множества на подмножество того же или другого полного сепарабельного пространства).

[1]) По поводу более общего подхода к понятию аналитических множеств (не обязательно метрических) см. Шоке [3], [4], Фролик [2], [3], Шнейдер [1], Сион [1], Брасслер и Сион [1], Роджерс [1].

Согласно следствию 1, § 36, V, имеем

Теорема 0. *Любое аналитическое несчетное множество топологически содержит совершенное множество* $\mathscr{C}$. (См. Суслин [1].)

Таким образом, аналитические множества „реализуют" гипотезу континуума: их мощность либо конечна, либо $\aleph_0$, либо $\mathfrak{c}$.

Как мы увидим далее (см. п. II), любое аналитическое множество (следовательно, и любое множество CA) обладает свойством Бэра в узком смысле и измеримо в смысле Лебега (если оно содержится в пространстве действительных чисел).

Замечания. 1. Вышеупомянутые свойства показывают, что аналитические множества обладают некоторой „регулярностью", которая определяет их приложения. Среди применений теории аналитических множеств укажем важную теорему об обращении непрерывных функций (п. V, теорема 3).

Как мы увидим, многие задачи элементарного характера приводят к аналитическим множествам или к множествам класса CA. Существуют также очень простые и важные примеры множеств, которые являются проективными, не будучи борелевскими; так, в пространстве $2^{\mathscr{I}}$ (замкнутых подмножеств интервала) множество замкнутых несчетных множеств является аналитическим, но не является борелевским (см. Гуревич [8]); дифференцируемые функции образуют в пространстве $\mathscr{E}^{\mathscr{I}}$ неборелевское множество класса CA (см. Мазуркевич [8]); в пространстве $\mathscr{E}^{\mathscr{I}\times\mathscr{I}}$ функции f двух переменных x и y, для которых существует точка y, такая, что частная производная $f'_x(x, y)$ существует для любого $x \in \mathscr{I}$, образуют множество класса PCA, которое не является множеством низшего класса (см. Мазуркевич [9]).

2. Существенно заметить, что „регулярность", которой обладают аналитические множества, вообще говоря, не является свойством проективных множеств более высоких классов. Гёдель [1], [2] [1]) отметил, что гипотеза существования (в пространстве действительных чисел) неизмеримых множеств класса PCA и $CPCA$ не противоречит системе аксиом теории множеств.

То же самое относится к существованию несчетных множеств класса CA, не имеющих совершенных подмножеств.

3. Как доказал В. Гуревич [7], результат $(\mathscr{A})$-операции, примененной к замкнутым подмножествам метрического сепарабельного (не обязательно полного) пространства, содержит совершенное множество (если только он представляет собой несчетное множество).

Так как любое аналитическое множество представляет собой результат $(\mathscr{A})$-операции, примененной к замкнутым множествам (п. II), то

---

[1]) См. также Адисон [3], Новиков [4], Куратовский [41], Серпинский и Куратовский [5].

предшествующая теорема является обобщением теоремы, в силу которой любое аналитическое несчетное множество содержит совершенное множество.

О другом обобщении см. п. II, следствие 3.

Теорема 1. *Пусть $A \subset \mathscr{X}$ — несчетное аналитическое множество; тогда любое аналитическое множество A^* получается из него при помощи отображения первого класса.* (См. Серпинский [42].)

Очевидно, достаточно доказать, что это предложение имеет место для $A^* = \mathscr{N}$. Действительно, так как множество A аналитическое и несчетное, оно содержит множество, гомеоморфное множеству $\mathscr{C}$, и, следовательно, множество N, гомеоморфное множеству $\mathscr{N}$. Положим $f(x) = x$ для $x \in N$. Так как N является G_δ-множеством в пространстве $\mathscr{X}$, $\mathscr{X} \supset A$ (см. § 35, III), то оно топологически полно, следовательно, существует отображение $f^*: \mathscr{X} \to N$ первого класса, которое совпадает на множестве N с отображением f (§ 35, VI, следствие). Следовательно, $f^*(A) = N$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если даны два аналитических несчетных множества размерности* 0, *то каждое из них является непрерывным образом другого.* (Доказательство см. в работе Серпинского [41].)

Теорема 3. *Любое аналитическое множество является взаимно однозначным и непрерывным образом некоторого* ***CA****-множества.* (Мазуркевич [5].)

Более точно, *пусть f — непрерывное отображение, определенное на замкнутом подмножестве $F \subset \mathscr{N}$; тогда множество F содержит* ***CA****-множество C, такое, что $f(C) = f(F)$ и сужение $f|C$ взаимно однозначно*[1]).

Для доказательства последнего предложения расположим сначала иррациональные числа $a = [a^1, a^2, \ldots]$ в лексикографическом порядке:

$$(1) \quad [a \prec b] \equiv (a^1 \leqslant b^1) \wedge \bigwedge_k [(a^k \leqslant b^k) \vee \bigvee_{i<k} (a^i < b^i)].$$

Очевидно, что функция высказываний $[a \prec b]$ является функцией класса F_0. Кроме того, в любом замкнутом множестве X ($\neq 0$) существует первый элемент. В самом деле, таким элементом является точка $p(X) = \bigcap_n X_n$, где X_1 — множество точек $a \in X$, таких, что a^1 принимает минимальное значение, и где X_n, $n > 1$, — множество таких $a \in X_{n-1}$, что a^n принимает минимальное значение. В силу теоремы Кантора (§ 34, II), пересечение множеств X_n состоит из единственной точки.

---

[1]) Обобщение этого утверждения см. в п. V, 5.

Пусть теперь C — множество точек вида $p[f^{-1}(x)]$, где x пробегает множество $f(F)$:

$$(2)\qquad [a \in C] \equiv [a \in F] \wedge \bigwedge_b \{[f(a) = f(b)] \Rightarrow [a \prec b]\}.$$

Множество C есть множество класса **CA**, ибо функция высказываний в фигурных скобках является борелевской. Кроме того, сужение $f|C$ взаимно однозначно, ибо из того, что $a \in C$, $b \in C$ и $f(a) = f(b)$, вытекает, что $a \prec b \prec a$, откуда $a = b$.

Наконец, имеем $f(C) = f(F)$; действительно, достаточно вместо a в левую часть равенства (2) подставить $p[f^{-1}(x)]$.

II. Аналитическое множество как результат ($\mathscr{A}$)-операции. Множество $\mathscr{N}_{n_1 \dots n_k}$ иррациональных чисел $a = \frac{1|}{|a^1} + \frac{1|}{|a^2} + \dots$, таких, что $a^1 = n_1, \dots, a^k = n_k$ (см. § 36, I), обладает, как легко видеть, следующими свойствами:

$$(1)\qquad \mathscr{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{N}_n, \qquad \mathscr{N}_{n_1 \dots n_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{N}_{n_1 \dots n_k n};$$

$$(2)\quad \mathscr{N}_{n_1 \dots n_k} \cap \mathscr{N}_{m_1 \dots m_k} = 0 \quad \text{для} \quad (n_1 \dots n_k) \neq (m_1 \dots m_k);$$

$$(3)\qquad (a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_{a^1 \dots a^k};$$

$$(4)\qquad \mathscr{N} = \bigcup_a \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_{a^1 \dots a^k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_a \mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}.$$

Формула (4) показывает, что множество $\mathscr{N}$ является результатом ($\mathscr{A}$)-операции, примененной к системе множеств $\mathscr{N}_{n_1 \dots n_k}$.

$$(5)\qquad \lim_{k \to \infty} \delta\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right) = 0;$$

(6) *если f — непрерывная функция, определенная на $\mathscr{N}$, то*

$$f(a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right)}.$$

Действительно, в силу (3),

$$f(a) = f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right)},$$

и множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right)}$ состоит из единственной точки, поскольку из непрерывности функции f вытекает, в силу (5), что

$$\lim_{k \to \infty} \delta\left[f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right)\right] = 0, \quad \text{откуда} \quad \lim_{k \to \infty} \delta\left[\overline{f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right)}\right] = 0,$$

и поэтому $\delta\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f\left(\mathscr{N}_{a^1 \dots a^k}\right)}\right) = 0$.

Теорема. *Для того чтобы множество было аналитическим, необходимо и достаточно, чтобы оно представляло собой результат* ($\mathscr{A}$)*-операции, примененной к некоторой регулярной системе замкнутых множеств.*

В самом деле, пусть A — аналитическое множество; тогда существует непрерывная функция f, такая, что $A = f(\mathscr{N})$.

Множество A представляет собой результат ($\mathscr{A}$)-операции над множествами $\overline{f(\mathscr{N}_{n_1 \ldots n_k})}$. Действительно, в силу предложения (6), имеем

$$A = f(\mathscr{N}) = \bigcup_a f(a) = \bigcup_a \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathscr{N}_{a^1 \ldots a^k})}.$$

Обратно, ($\mathscr{A}$)-операция, примененная к замкнутым множествам (и даже к аналитическим множествам), всегда приводит к аналитическим множествам (§ 38, IX, 4).

Следствие 1. *Аналитические множества обладают свойством Бэра в узком смысле.*

Действительно, любое замкнутое множество обладает этим свойством, и это свойство инвариантно относительно ($\mathscr{A}$)-операции, в силу следствия из § 11, VII.

По той же причине *аналитические множества измеримы в смысле Лебега* (в случае пространства действительных чисел, комплексных чисел и т. д.).

Так как дополнение всякого множества, обладающего свойством Бэра или измеримого по Лебегу, есть множество того же вида, то отсюда следует, что множества класса $\boldsymbol{CA}$ также обладают этими свойствами. То же самое относится к множествам, получающимся из замкнутых множеств при помощи вычитания и ($\mathscr{A}$)-операции.

Замечание 1. В силу следствия 1, множество E_1 из § 38, VI, являющееся аналитическим и неборелевским, дает ответ на вопрос Лебега (*J. Math.*, 1905, p. 188) о существовании неборелевских множеств, обладающих свойством Бэра в узком смысле (см. Лузин и Серпинский [3]).

Следствие 2. *Любое аналитическое множество A является просеянным через решето, состоящее из замкнутых множеств.*

Другими словами, *существует семейство замкнутых множеств W_r, $r \in \mathscr{R}_0$, такое, что условие $x \in A$ эквивалентно существованию бесконечной последовательности чисел $r_1 < r_2 < \ldots$, удовлетворяющих соотношению $x \in W_{r_1} \cap W_{r_2} \cap \ldots$.*

Это утверждение, в силу теоремы § 3, XV, является непосредственным следствием теоремы, доказанной выше.

Замечание 2. Если множество $A \subset \mathscr{I}$ определяется при помощи решета W, то элемент $f(W) \in \mathscr{I} - A$ можно определить *эффективно* (в предположении, что $A \neq \mathscr{I}$)[1]).

[1]) См. Лузин и Новиков [1], Сампеи [2].

Следствие 3. *Любое проективное множество E класса* $\boldsymbol{PCA}$ *является объединением* $\aleph_1$ *борелевских множеств.*

Следовательно, *если E имеет мощность* $>\aleph_1$, *то E содержит некоторое (не пустое) совершенное множество.*

Пусть сначала E — аналитическое множество. Тогда оно представляет собой результат $(\mathcal{A})$-операции над некоторой системой замкнутых множеств. В обозначениях § 3, XIV, имеем

$$E=\bigcap_{\alpha<\Omega} E_\alpha=\bigcup_{\alpha<\Omega} K_\alpha; \tag{7}$$

отсюда при помощи трансфинитной индукции легко получить, что множества E_α и K_α борелевские. Таким образом, первая часть следствия установлена в случае, когда E есть $\boldsymbol{A}$- или $\boldsymbol{CA}$-множество[1]).

В общем случае, когда E есть $\boldsymbol{PCA}$-множество, положим $E=f(C)$, где C — некоторое $\boldsymbol{CA}$-множество, f — непрерывная функция. Тогда

$$C=\bigcup_{\alpha<\Omega} B_\alpha, \quad \text{следовательно,} \quad E=f(C)=\bigcup_{\alpha<\Omega} f(B_\alpha).$$

Так как B_α — борелевское множество, множество $f(B_\alpha)$ — аналитическое; следовательно, оно является объединением $\aleph_1$ борелевских множеств. Поэтому и множество E обладает этим свойством.

Вторая часть следствия вытекает из первой. В самом деле, пусть $\overline{\overline{E}}>\aleph_1$, тогда по крайней мере одно из слагаемых, на которые разлагается E, несчетно; как несчетное борелевское множество, оно содержит непустое совершенное подмножество (§ 37, I, 3).

Замечание 3. Из полученных результатов следует, что несчетные $\boldsymbol{PCA}$-множества могут иметь только две мощности: а именно $\aleph_1$ и $\mathfrak{c}$. Впрочем, неизвестно, существуют ли $\boldsymbol{PCA}$-множества или вообще проективные множества мощности $\aleph_1$.

Относительно $\boldsymbol{CPCA}$-множеств никакие аналогичные утверждения не известны.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{X}$ — полное сепарабельное несчетное пространство. Тогда $\mathcal{X}$ разлагается в объединение $\aleph_1$ попарно не пересекающихся непустых борелевских множеств.*

В самом деле, пусть E — аналитическое неборелевское подмножество пространства $\mathcal{X}$ (существование таких множеств вытекает из § 38, VI). Положим $A_\alpha=K_\alpha-\bigcup_{\xi<\alpha} K_\xi$, тогда, применяя формулу (7), получим

$$E=\bigcup_{\alpha<\Omega} A_\alpha.$$

Аналогичным образом, полагая,

$$L_\alpha=\mathcal{X}-E_\alpha \quad \text{и} \quad B_\alpha=L_\alpha-\bigcup_{\xi<\alpha} L_\xi,$$

[1]) Ср. с теоремой VIII, 3.

получаем

$$\mathscr{X} - E = \bigcup_{\alpha < \Omega} L_\alpha = \bigcup_{\alpha < \Omega} B_\alpha.$$

Следовательно,

$$\mathscr{X} = \bigcup_{\alpha < \Omega} A_\alpha \cup \bigcup_{\alpha < \Omega} B_\alpha. \tag{8}$$

Множества A_α и B_α — борелевские. Все слагаемые разложения (8) попарно не пересекаются. Имеется несчетное множество индексов α, таких, что $A_\alpha \neq 0$, ибо в противном случае множество E было бы борелевским (как счетное объединение борелевских множеств).

Замечание 4. К разложению полного сепарабельного несчетного пространства $\mathscr{X}$ в объединение $\aleph_1$ непустых попарно не пересекающихся борелевских множеств можно прийти также, опираясь на следующую теорему Хаусдорфа [6]: *в пространстве $\mathscr{X}$ существует трансфинитная последовательность* $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset \ldots$ $\ldots (\alpha < \Omega)$ *попарно различных G_δ-множеств, такая, что* $\mathscr{X} = \bigcup_{\alpha < \Omega} G_\alpha$. Положим $F_\alpha = G_\alpha - \bigcup_{\xi < \alpha} G_\xi$; тогда $\mathscr{X} = \bigcup_{\alpha < \Omega} F_\alpha$, где F_α — непустые попарно не пересекающиеся $F_{\sigma\delta}$-множества.

Это разложение имеет то преимущество перед разложением (8), что его слагаемые принадлежат $F_{\sigma\delta}$-классу, тогда как слагаемые разложения (8) не принадлежат ограниченному классу. С другой стороны, разложение (8) является *эффективным* (множество E, так же как и его слагаемые, могут быть определены), тогда как существование последовательности $\{G_\alpha\}$ устанавливается не эффективным образом.

Добавим, что проблема разложения пространства на $\aleph_1$ непустых попарно не пересекающихся G_δ-множеств остается открытой (см. Серпинский [61]).

III. Первая теорема отделимости.

Теорема[1]). *Пусть A и B — два непересекающихся аналитических множества; тогда существует борелевское множество E, такое, что*

$$A \subset E \quad \text{и} \quad E \cap B = 0.$$

Лемма (Серпинский [35], II, стр. 180). *Назовем „B-отделимыми" любую пару множеств A, B, для которых справедлива теорема. Если множества $P = \bigcup_i P_i$ и $Q = \bigcup_i Q_i$ не являются*

[1]) Теорема Лузина [7]. Важно заметить, что аналогичная теорема для CA-множеств неверна. Простой пример см. в работе Серпинского [43]. См. также Лузин [8] и Новиков [1]. По поводу теорем отделимости для высших проективных классов и их связи с аксиомой конструктивности Гёделя см. Адисон [2] и Новиков [1].

B-отделимыми, то существует пара множеств P_n, Q_m, не являющихся B-отделимыми.

В самом деле, пусть Z_{nm} — борелевское множество, такое, что

$$P_n \subset Z_{nm} \subset \mathscr{X} - Q_m.$$

Тогда

$$P_n \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} Z_{nm} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} (\mathscr{X} - Q_m) = \mathscr{X} - \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m = \mathscr{X} - Q.$$

Следовательно,

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} Z_{nm} \subset \mathscr{X} - Q,$$

а это означает, что борелевское множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} Z_{nm}$ разделяет множества P и Q.

Таким образом, лемма установлена. Возвратимся к доказательству теоремы; допустим противное, т. е. что существуют не пересекающиеся аналитические множества A и B, не являющиеся B-отделимыми.

Пусть $f: \mathscr{N} \to A$ и $g: \mathscr{N} \to B$ — непрерывные отображения на. Тогда (см. II (1)) имеем,

$$A = \bigcup_i f(\mathscr{N}_i) \qquad \text{и} \qquad B = \bigcup_i g(\mathscr{N}_i).$$

Следовательно, согласно предшествующей лемме, существуют два множества $f(\mathscr{N}_{n_1})$ и $g(\mathscr{N}_{m_1})$, не являющиеся B-отделимыми. Так как, кроме того, согласно II(1), имеем

$$f(\mathscr{N}_{n_1 \dots n_k}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(\mathscr{N}_{n_1 \dots n_k n})$$

и

$$g(\mathscr{N}_{m_1 \dots m_k}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} g(\mathscr{N}_{m_1 \dots m_k m}),$$

отсюда вытекает (по индукции) существование двух бесконечных последовательностей $n_1, n_2, \dots$ и $m_1, m_2, \dots$, таких, что множества $f(\mathscr{N}_{n_1 \dots n_k})$ и $g(\mathscr{N}_{m_1 \dots m_k})$ не являются B-отделимыми ни для какого k. Положим

$$a = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \dots \qquad \text{и} \qquad b = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \dots .$$

Так как $f(a) \in A$, $g(b) \in B$ и $A \cap B = 0$, то $|f(a) - g(b)| > 0$.

Поскольку отображения f и g непрерывны, то (см. II, 5) для достаточно больших k имеем

$$\delta[f(\mathscr{N}_{n_1 \dots n_k})] + \delta[g(\mathscr{N}_{m_1 \dots m_k})] < |f(a) - g(b)|,$$

и так как (см. II (3))

$$f(a) \in f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}) \quad \text{и} \quad g(b) \in g(\mathcal{N}_{m_1 \ldots m_k}),$$

то

$$\overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})} \cap g(\mathcal{N}_{m_1 \ldots m_k}) = 0.$$

Последняя формула показывает, в силу включения $f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}) \subset \subset \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})}$, что множества $f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})$ и $g(\mathcal{N}_{m_1 \ldots m_k})$ B-отделимы, что противоречит предположению.

Следствие 1 (Суслин [1]). *Пусть A и $\mathcal{X} - A$ — аналитические множества; тогда A — борелевское множество.*

В предыдущей теореме положим $B = \mathcal{X} - A$; мы получим $E = A$.

Из следствия 1 вытекает, что *семейство множеств, являющихся одновременно **A**- и **CA**-множествами, совпадает с семейством борелевских множеств.*

Следствие 2 (*одновременная отделимость*). *Пусть A_1, A_2, ... — последовательность попарно не пересекающихся аналитических множеств; тогда существует последовательность попарно не пересекающихся борелевских множеств B_1, B_2, ..., такая, что $A_n \subset B_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

В самом деле, в силу теоремы отделимости, существует система борелевских множеств E_{nm}, такая, что

$$A_n \subset E_{nm} \quad \text{и} \quad E_{nm} \cap A_m = 0 \quad (\text{для } n \neq m).$$

Положим

$$B_1 = \bigcap_{m=2}^{\infty} E_{1m} \quad \text{и} \quad B_n = \bigcap_{m \neq n} E_{mn} - (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}).$$

Из включения $B_m \subset E_{mn}$ следует, что $A_n \cap B_m \subset A_n \cap E_{mn} = 0$ для $m < n$, и поэтому $A_n \subset B_n$.

О другом обобщении теоремы отделимости см. п. X.

IV. Приложения к борелевским множествам.

Теорема[1]). *Любой взаимно однозначный и непрерывный образ борелевского множества является борелевским множеством.*

Так как любое борелевское множество представляет собой объединение некоторого счетного множества и множества, являющегося взаимно однозначным и непрерывным образом множества $\mathcal{N}$ (§ 37, II, следствие 1в), то достаточно доказать, что множество $f(\mathcal{N})$ — борелевское, если f — взаимно однозначная и непрерывная функция, определенная на $\mathcal{N}$.

---

[1]) См. Суслин [1]. Что касается обобщений этой теоремы, см. п. V, VIII.

Так как f — взаимно однозначная функция, то из II (2) следует, что при фиксированном k множества системы $\{f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})\}$ попарно не пересекаются. Согласно следствию 2, п. III, для любого k существует система попарно не пересекающихся борелевских множеств $B_{n_1 \ldots n_k}$, таких, что $f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}) \subset B_{n_1 \ldots n_k}$. Положим $B^*_{n_1} = B_{n_1} \cap \overline{f(\mathcal{N}_{n_1})}$ и, вообще,

$$B^*_{n_1 \ldots n_k} = B_{n_1 \ldots n_k} \cap \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})} \cap B^*_{n_1 \ldots n_{k-1}}.$$

Имеет место включение

$$f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}) \subset B^*_{n_1 \ldots n_k} \subset \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k})}. \tag{1}$$

В самом деле, эта формула очевидна для $k=1$; допустим, что она верна для $k-1$. Согласно II (1),

$$f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}) \subset f(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_{k-1}}) \subset B^*_{n_1 \ldots n_{k-1}},$$

откуда следует формула (1).

Формула (1) влечет за собой, в силу II (6), равенства

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} B^*_{a^1 \ldots a^k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k})},$$

откуда

$$f(\mathcal{N}) = \bigcup_a \bigcap_{k=1}^{\infty} B^*_{a^1 \ldots a^k},$$

ибо, в силу II (6),

$$f(\mathcal{N}) = \bigcup_a \bigcap_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}).$$

Кроме того, так как система $\{B^*_{n_1 \ldots n_k}\}$ регулярна, т. е. $B^*_{n_1 \ldots n_k} \subset B^*_{n_1 \ldots n_{k-1}}$, и состоит при фиксированном k из попарно не пересекающихся множеств, то (см. § 3, XIV, 2)

$$\bigcup_a \bigcap_{k=1}^{\infty} B^*_{a^1 \ldots a^k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_a B^*_{a^1 \ldots a^k}.$$

Если суммирование $\bigcup_a B^*_{a^1 \ldots a^k}$ распространено (при фиксированном k) на счетную систему борелевских множеств, то множество $\bigcup_a B^*_{a^1 \ldots a^k}$ борелевское. Следовательно, и множество $f(\mathcal{N})$ борелевское, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Сопоставляя предыдущую теорему с следствием 1a из § 37, II, мы видим, что *борелевские подмножества полных сепарабельных пространств совпадают с взаимно однозначными* *и непрерывными образами полных сепарабельных* 0-*мерных пространств.*

Замечание 2. Если B — борелевское множество и g — взаимно однозначное и непрерывное отображение, то пространство $\mathscr{Y}$, которое содержит $g(B)$, может быть произвольным метрическим (полным сепарабельным или нет). В самом деле, множество $g(B)$ как непрерывный образ сепарабельного множества сепарабельно.

Пополним множество $\overline{g(B)}$, которое также сепарабельно, до пространства $\overline{\overline{g(B)}}$ (см. § 33, VII). Согласно теореме, которую мы доказали, $g(B)$ — борелевское множество в пространстве $\overline{\overline{g(B)}}$ и, следовательно, в множестве $\overline{g(B)}$, т. е. $g(B)$ — пересечение множества $\overline{g(B)}$ и некоторого борелевского множества в пространстве $\mathscr{Y}$.

Следовательно, множество $g(B)$ является борелевским в пространстве $\mathscr{Y}$.

С другой стороны, предположения о том, что пространство $\mathscr{X}$ (содержащее множество B) полно и сепарабельно, существенны. В самом деле, допустим, что B — неборелевское множество интервала $\mathscr{J} = \mathscr{Y}$ и что

1° $\mathscr{X} = B$ (случай, когда $\mathscr{X}$ — не полное пространство),

2° $\mathscr{X}$ состоит из точек интервала $\mathscr{J}$, а расстояние между любой парой точек полагается равным единице (случай, когда $\mathscr{X}$ не сепарабельно).

В этих двух случаях множество B (борелевское в пространстве $\mathscr{X}$) тождественно отображается в неборелевское множество (в пространстве $\mathscr{Y}$).

V. Приложения к *B*-измеримым функциям.

Теорема 1. *Пусть f — взаимно однозначная B-измеримая функция, определенная на борелевском множестве E; тогда множество $f(E)$ — борелевское.*

В самом деле, так как функция f взаимно однозначна, отобразим множество $I = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{x,\,y} \{y = f(x)\}$ на множество $f(E)$ взаимно однозначным и непрерывным образом, проектируя его на ось $\mathscr{Y}$. Так как множество I борелевское, согласно § 38, III, 4, то $f(E)$ также борелевское (по теореме п. IV).

Теорема 2. *Любая функция f, определенная на аналитическом множестве A, такая, что множество $I = \mathop{\mathrm{E}}\limits_{x,\,y} \{y = f(x)\}$ также аналитическое, B-измерима.*

Следовательно (см. § 38, III, 4), *если A — борелевское множество, то из предположения, что множество I — аналитическое, вытекает, что множество I борелевское.*

Пусть $F \subset \mathcal{Y}$ — произвольное замкнутое множество; покажем, что множество $f^{-1}(F)$ — борелевское относительно A. Множество $f^{-1}(F)$ — аналитическое, так как оно является проекцией аналитического множества $I \cap (\mathcal{X} \times F)$. По той же причине множество $f^{-1}(\mathcal{Y} - F) = A - f^{-1}(F)$ является аналитическим. Согласно теореме отделимости (п. III), существует борелевское множество E, такое, что $f^{-1}(F) \subset E$ и $(E \cap A) - f^{-1}(F) = 0$, откуда $f^{-1}(F) = E \cap A$. Отсюда вытекает, что множество $f^{-1}(F)$ — борелевское относительно A.

Теорема 3[1]). *Пусть f — взаимно однозначная B-измеримая функция, определенная на аналитическом множестве A; тогда обратная функция f^{-1} B-измерима на множестве $f(A)$, т. е. функция f есть обобщенный гомеоморфизм* (в смысле § 31, I).

Эта теорема является следствием предыдущей (если заменить x на y, y на x, а множество A — множеством $f(A)$), в силу равенства

$$\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}\{x = f^{-1}(y)\} = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}\{y = f(x)\} = I$$

и в силу аналитичности множеств I и $f(A)$ (см. § 38, III, 4 и 5).

Теорема 4. *Пусть f — взаимно однозначная B-измеримая функция, определенная на борелевском множестве E. Если P — проективное подмножество множества E класса $\boldsymbol{L}_n$ $(n \geqslant 0)$, то множество $f(P)$ также является множеством класса $\boldsymbol{L}_n$.*

В самом деле, согласно теоремам 3 и 1, функция f^{-1} B-измерима на множестве $f(E)$, поэтому, на основании § 38, III, 5, множество $f(P) = (f^{-1})^{-1}(P)$ является множеством класса $\boldsymbol{L}_n$.

Теорема 5. *Пусть f — непрерывная функция на борелевском множестве E; тогда существует подмножество C множества E класса $\boldsymbol{CA}$, такое, что $f(C) = f(E)$ и сужение $f \mid C$ взаимно однозначно.*

Так как множество E — борелевское, оно является взаимно однозначным и непрерывным образом замкнутого множества $F \subset \mathcal{N}$ (см. § 37, II, следствие 1a): $E = g(F)$. Положим $h(a) = fg(a)$, где $a \in F$. В силу I, 3, множество F содержит множество H класса $\boldsymbol{CA}$, такое, что $h(H) = h(F)$ и функция $h \mid H$ взаимно однозначна. Так как функция g взаимно однозначна и непрерывна, то множество $C = g(H)$ есть $\boldsymbol{CA}$-множество по теореме 4. Кроме того,

$$f(C) = fg(H) = h(H) = h(F) = fg(F) = f(E).$$

---

[1]) Эта теорема была доказана (в случае, когда множество A — интервал $\mathcal{J}$) Лебегом [1]. Анализ доказательства Лебега (которое не было точным), привел Суслина к открытию аналитических множеств. Корректное доказательство было дано Лузиным и Суслиным.

Наконец, если $x \neq x'$, $x \in C$, $x' \in C$, то

$$x = g(a), \quad x' = g(a'), \quad a \neq a', \quad a \in H \quad \text{и} \quad a' \in H.$$

Из неравенства $a \neq a'$ следует, что

$$f(x) = h(a) \neq h(a') = f(x');$$

таким образом, функция $f|C$ взаимно однозначна.

Замечания. 1. Для любого α существует непрерывная взаимно однозначная функция f, такая, что обратная функция f^{-1} *не является функцией класса* α (см. § 31, I, 5). (Ср. Серпинский [13].)

2. Предположение о том, что пространство $\mathscr{X}$ (в теореме 3) *полное*, существенно. Действительно, пусть Z — неборелевское подмножество интервала $\mathscr{J} = (0, 1)$ и Z^* — дополнение такого же множества, расположенного в интервале $(1, 2)$. Положим $\mathscr{X} = Z \cup Z^*$, $\mathscr{Y} = \mathscr{J}$, $f(x) = x$ при $x \in Z$ и $f(x) = x - 1$ при $x \in Z^*$. Функция f не является B-измеримой (она даже не обладает свойством Бэра, если множество Z не обладает этим свойством).

Сепарабельность также существенна, см. пример 2, п. IV (замечание).

3. Предположение сепарабельности пространства $\mathscr{Y}$ в теореме 1 не является необходимым. Достаточно показать, что множество $f(E)$ сепарабельно. Допустим, что это не так. Тогда оно содержит дискретное несчетное множество B, замкнутое в $f(E)$. Пусть множество $A \subset E$ удовлетворяет условиям: $f(A) = B$ и отображение $f|A$ взаимно однозначно. Каждое подмножество множества B замкнуто в $f(E)$, поэтому каждое подмножество из A является борелевским в E, а следовательно, и в $\mathscr{X}$. Так как A — несчетное борелевское множество, имеем $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}$. Но тогда A должно содержать неборелевские подмножества [1]).

4. *Приложение к метрическим группам.* Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два полных пространства, являющихся топологическими группами (см. § 13, XII). Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — аддитивное отображение на (т. е. $f(x + x') = f(x) + f(x')$). Можно доказать, что если функция f обладает свойством Бэра (в частности, если она B-измерима), то она непрерывна (Банах [8]). Отсюда следует, что *если группы $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — полные сепарабельные, то любое аддитивное непрерывное взаимно однозначное отображение, такое, что $f(\mathscr{X}) = \mathscr{Y}$, является гомеоморфизмом* [2]).

В самом деле, так как f — аддитивное отображение, то и обратное отображение f^{-1} аддитивно; так как, кроме того, отображение f^{-1} B-измеримо, согласно 3, то оно непрерывно.

---

[1]) См. Стоун А. [4], теорема 16.

[2]) См. Банах [8]. Многочисленные приложения этой теоремы к анализу (в частности, к дифференциальным уравнениям) можно найти в цитированной выше книге Банаха, гл. III. См., кроме того, Банах [3] и Шаудер [1].

5. Теорема 5 обобщена на произвольные **CA**-множества. (См. Кондо [1]; более простые доказательства имеются в работах Сампеи [1], Судзуки [1].)

VI. Вторая теорема отделимости. (См. Лузин [8], стр. 210, „второй принцип".)

Теорема. *Пусть A и B — два аналитических множества; существуют два* **CA**-*множества D и H, таких, что*

$$(1) \qquad A - B \subset D, \quad B - A \subset H \quad \text{и} \quad D \cap H = 0.$$

Пусть множества W_r такие же, как в следствии 2, п. II; упорядочим множество $M_x = \mathop{\mathsf{E}}_r (x \in W_r)$ по отношению $r > s$. Тогда имеет место следующее соотношение эквивалентности:

$$\{x \in A\} \equiv \left\{ \text{множество } M_x = \mathop{\mathsf{E}}_r (x \in W_r) \text{ не вполне упорядочено} \right\}.$$

Аналогичным образом, существует семейство замкнутых множеств Z_r, $r \in \mathscr{R}_0$, такое, что

$$\{x \in B\} \equiv \left\{ \text{множество } N_x = \mathop{\mathsf{E}}_r (x \in Z_r) \text{ не вполне упорядочено} \right\}.$$

Положим $M_x \prec N_x$, если множество M_x подобно части множества N_x. Пусть

$$D = (-B) \cap \left[- \mathop{\mathsf{E}}_x (M_x \prec N_x) \right] \quad \text{и} \quad H = (-A) \cap \left[- \mathop{\mathsf{E}}_x (N_x \prec M_x) \right].$$

Тогда соотношение (1) выполнено. В самом деле, если $x \in A - B$, то множество M_x не является вполне упорядоченным, тогда как множество N_x вполне упорядочено, следовательно, соотношение $M_x \prec N_x$ не может иметь места. Поэтому

$$x \in \left[- \mathop{\mathsf{E}}_x (M_x \prec N_x) \right],$$

и так как $x \in -B$, то $x \in D$.

Следовательно, $A - B \subset D$ и, из соображений симметрии, $B - A \subset H$.

С другой стороны, если $x \in (-B) \cap (-A)$, то оба множества M_x и N_x вполне упорядочены. Следовательно, они сравнимы, т. е. либо $M_x \prec N_x$, либо $N_x \prec M_x$. Поэтому соотношение $x \in \left[- \mathop{\mathsf{E}}_x (M_x \prec N_x) \right] \cap \left[- \mathop{\mathsf{E}}_x (N_x \prec M_x) \right]$ не может иметь места. Отсюда вытекает, что $D \cap H = 0$.

Покажем, что D и H являются **CA**-множествами; для этого достаточно доказать, что множество $\mathop{\mathsf{E}}_x (M_x \prec N_x)$ — аналитическое. Но это является частным случаем утверждения 2 из § 38, IX (при $n = 1$).

Следствие 1 (одновременная отделимость). *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность аналитических множеств; тогда сущест-*

вует последовательность непересекающихся **CA**-*множеств* C_1, $C_2, \ldots$, *таких, что*

$$A_n - (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_{n+1} \cup \ldots) \subset C_n.$$

Действительно, пусть, в соответствии с предыдущей теоремой,

$$A_n - \bigcup_{k \neq n} A_k \subset D_n;, \qquad \bigcup_{k \neq n} A_k - A_n \subset H_n, \qquad D_n \cap H_n = 0.$$

Положим $C_n = D_n \cap \bigcap_{k \neq n} H_k$; тогда множества C_n—непересекающиеся **CA**-множества. Кроме того,

$$A_n - \bigcup_{k \neq n} A_k \subset A_n - A_k \subset \bigcup_{k \neq n} A_n - A_k \subset H_k,$$

каковы бы ни были $k \neq n$. Следовательно, $A_n - \bigcup_{k \neq n} A_k \subset \bigcap_{k \neq n} H_k$, откуда вытекает искомое включение.

Следствие 2. *Пусть* $A_{n_1 \ldots n_k}$ — *система аналитических множеств, такая, что*

$$A_{n_1 \ldots n_k} = A_{n_1 \ldots n_k 1} \cup A_{n_1 \ldots n_k 2} \cup \ldots;$$

тогда существует регулярная система $\{C_{n_1 \ldots n_k}\}$ **CA**-*множеств, не пересекающихся ни при каком фиксированном* k, *такая, что*

$$\text{(i)} \qquad A_{n_1 \ldots n_k} - \bigcup{}' A_{m_1 \ldots m_k} \subset C_{n_1 \ldots n_k},$$

где суммирование $\bigcup{}'$ *распространяется на системы индексов* $(m_1 \ldots m_k) \neq (n_1 \ldots n_k)$.

Пусть, в соответствии со следствием 1, $\{D_{n_1 \ldots n_k}\}$ — система не пересекающихся при фиксированном k **CA**-множеств, такая, что

$$A_{n_1 \ldots n_k} - \bigcup{}' A_{m_1 \ldots m_k} \subset D_{n_1 \ldots n_k}.$$

Положим

$$C_{n_1} = D_{n_1} \quad \text{и} \quad C_{n_1 \ldots n_k} = D_{n_1 \ldots n_k} \cap C_{n_1 \ldots n_{k-1}} \quad \text{при} \quad k > 1.$$

Покажем, что имеет место включение

$$A_{n_1 \ldots n_k} - \bigcup{}' A_{m_1 \ldots m_k} \subset C_{n_1 \ldots n_{k-1}}.$$

Оно следует из включения (i), взятого для $k-1$, и следующих соотношений, вытекающих из предположения:

$$A_{n_1 \ldots n_k} \subset A_{n_1 \ldots n_{k-1}},$$

$$A_{m_1 \ldots m_{k-1}} = A_{m_1 \ldots m_{k-1} 1} \cup A_{m_1 \ldots m_{k-1} 2} \cup \ldots \subset \bigcup{}' A_{m_1 \ldots m_k}.$$

Что касается других обобщений второй теоремы отделимости, см. п. X. Следующий пункт содержит приложения этой теоремы.

VII. Порядок значения B-измеримой функции. Точка y называется значением *порядка* 1 отображения f (обозначается $y \in Z_f$), если существует одна и только одна точка x, такая, что $y = f(x)$. Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы п. IV.

Теорема 1 (Лузин [8]). *Значения порядка 1 B-измеримого отображения f произвольного борелевского множества образуют* **CA**-*множество.*

Установим эту теорему сначала для случая непрерывной функции. Так как разность любого несчетного борелевского множества и подходящего счетного множества является взаимно однозначным непрерывным образом множества $\mathcal{N}$ (§ 37, II, следствие 1в), то достаточно доказать, что если f — непрерывная функция, определенная на множестве $\mathcal{N}$, то множество Z ее значений порядка 1 есть **CA**-множество.

По определению, имеем

$$Z = \bigcup_a [f(a) - f(\mathcal{N} - a)].$$

Согласно II и § 34, III, имеем

$$a = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k} \quad \text{и} \quad f\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}\right] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f\left(\mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}\right).$$

Отсюда следует, что

$$f(a) - f(\mathcal{N} - a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f\left(\mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}\right) - f\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}\right)\right] =$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[f\left(\mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}\right) - f\left(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{a^1 \ldots a^k}\right)\right].$$

Положим

$$A_{n_1 \ldots n_k} = f\left(\mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}\right) \quad \text{и} \quad B_{n_1 \ldots n_k} = f\left(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{n_1 \ldots n_k}\right).$$

Тогда

$$Z = \bigcup_a \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(A_{a^1 \ldots a^k} - B_{a^1 \ldots a^k}\right).$$

Согласно II (1) и (2), имеет место равенство $B_{n_1 \ldots n_k} = \bigcup' A_{m_1 \ldots m_k}$, где суммирование $\bigcup'$ распространяется на системы индексов $(m_1 \ldots m_k) \neq (n_1 \ldots n_k)$. С другой стороны, $A_{n_1 \ldots n_k} = A_{n_1 \ldots n_k 1} \cup \cup A_{n_1 \ldots n_k 2} \cup \ldots$, согласно II (1). Поэтому можно применить следствие 2, п. VI. Положим

$$C^*_{n_1 \ldots n_k} = \left(C_{n_1 \ldots n_k} \cap \bar{A}_{n_1 \ldots n_k}\right) - B_{n_1 \ldots n_k},$$

где $C_{n_1 \ldots n_k}$ имеет тот же смысл, что и в указанном следствии.

Тогда

$$(1)\qquad A_{n_1\ldots n_k}-B_{n_1\ldots n_k}\subset C^*_{n_1\ldots n_k}\subset \bar{A}_{n_1\ldots n_k}-B_{n_1\ldots n_k},$$

где множества $C^*_{n_1\ldots n_k}$ являются при фиксированном k непересекающимися CA-множествами. Кроме того, система $\{C^*_{n_1\ldots n_k}\}$ регулярна, так как система $\{C_{n_1\ldots n_k}\}$ регулярна и из включения $\mathcal{N}_{n_1\ldots n_k}\subset\subset\mathcal{N}_{n_1\ldots n_{k-1}}$ (см. II (1)) вытекают следующие соотношения:

$$A_{n_1\ldots n_k}=f(\mathcal{N}_{n_1\ldots n_k})\subset f(\mathcal{N}_{n_1\ldots n_{k-1}})=A_{n_1\ldots n_{k-1}}\subset \bar{A}_{n_1\ldots n_{k-1}},$$
$$B_{n_1\ldots n_k}=f(\mathcal{N}-\mathcal{N}_{n_1\ldots n_k})\supset f(\mathcal{N}-\mathcal{N}_{n_1\ldots n_{k-1}})=B_{n_1\ldots n_{k-1}},$$

откуда можно вывести формулу

$$C^*_{n_1\ldots n_k}=(C_{n_1\ldots n_k}\cap \bar{A}_{n_1\ldots n_k})-B_{n_1\ldots n_k}\subset$$
$$\subset(C_{n_1\ldots n_{k-1}}\cap \bar{A}_{n_1\ldots n_{k-1}})-B_{n_1\ldots n_{k-1}}=C^*_{n_1\ldots n_{k-1}}.$$

Из двойного включения (1) вытекает следующее включение:

$$(2)\qquad Z\subset\bigcup_a\bigcap_{k=1}^{\infty}C^*_{a^1\ldots a^k}\subset\bigcup_a\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bar{A}_{a^1\ldots a^k}-B_{a^1\ldots a^k}).$$

Согласно II (6), имеем

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bar{A}_{a^1\ldots a^k}-B_{a^1\ldots a^k})=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{f(\mathcal{N}_{a^1\ldots a^k})}\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}(-B_{a^1\ldots a^k})=$$
$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}f(\mathcal{N}_{a^1\ldots a^k})\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}(-B_{a^1\ldots a^k})=\bigcap_{k=1}^{\infty}(A_{a^1\ldots a^k}-B_{a^1\ldots a^k}),$$

откуда

$$\bigcup_a\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bar{A}_{a^1\ldots a^k}-B_{a^1\ldots a^k})=\bigcup_a\bigcap_{k=1}^{\infty}(A_{a^1\ldots a^k}-B_{a^1\ldots a^k})=Z.$$

Следовательно, три члена двойного включения (2) тождественны. Так как $\{C^*_{n_1\ldots n_k}\}$ — регулярная система попарно не пересекающихся при фиксированном k множеств, то из формулы § 3, XIV (7′) следует, что множество

$$Z=\bigcup_a\bigcap_{k=1}^{\infty}C^*_{a^1\ldots a^k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_a C^*_{a^1\ldots a^k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n_1\ldots n_k}C^*_{n_1\ldots n_k}$$

является CA-множеством.

Перейдем теперь к случаю, когда g есть B-измеримая функция, определенная на борелевском множестве E. Так как E и $g(E)$—подмножества полных сепарабельных пространств соответственно $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, то множество $I=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\{y=g(x)\}$ является борелевским в пространстве $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Очевидно, что множество значений порядка 1 функции g совпадает с множеством значений порядка 1 проекции I на ось $\mathcal{Y}$ (которая рассматривается как непрерывная функция, определенная на множестве I), а это множество, как мы только что доказали, принадлежит классу $\boldsymbol{CA}$.

Замечания. 1. В рассмотренном здесь случае формула

$$\{y \in Z_f\} \equiv \Big(\bigvee_x [y = f(x)]\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{x,\, x'} \{[y = f(x) = f(x')] \Rightarrow (x = x')\}\Big)$$

приводит к менее точному результату. Однако из нее можно вывести, что если функция f определена на $\boldsymbol{F}_\sigma$-подмножестве некоторого компактного пространства, то множество Z_f представляет собой разность двух $\boldsymbol{F}_\sigma$-множеств (этот результат является точным).

2. Обратная теорема. *Пусть C — некоторое $\boldsymbol{CA}$-множество, принадлежащее пространству $\mathcal{X}$; тогда существует непрерывная функция f, определенная на замкнутом подмножестве пространства $\mathcal{N}$, такая, что $C = Z_f$.*

Действительно, пусть F — замкнутое подмножество множества $\mathcal{N}$, принадлежащее интервалу $(0, 1/2)$, и $f: F \to \mathcal{X}$ — взаимно однозначное непрерывное отображение на (см. § 36, III, следствие). Достаточно определить функцию $f(a)$ при $1/2 < a < 1$ таким образом, чтобы пересечение множества $\mathcal{N}$ и интервала $(1/2, 1)$ отображалось на множество $\mathcal{X} - C$.

Значение y функции f называется значением *несчетного порядка*, если множество $f^{-1}(y)$ несчетно:

$$(y \in A_f) \equiv [\overline{\overline{f^{-1}(y)}} > \aleph_0].$$

Теорема 2[1]). *Значения несчетного порядка B-измеримой функции f, определенной на аналитическом множестве, образуют аналитическое множество.*

Действительно, положим $I = \underset{x,\, y}{\mathsf{E}}\, [y = f(x)]$. Так как множество I является аналитическим (§ 38, III, 4), то остается доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть дано аналитическое множество I, принадлежащее произведению $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ двух полных сепарабельных пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$; тогда множество A таких значений y, при которых множество $\underset{x}{\mathsf{E}}\, [(x, y) \in I]$ несчетно, является аналитическим.*

Множество I, как аналитическое множество, допускает параметрическое представление на множестве $\mathcal{N}$ иррациональных чисел,

[1]) См. Мазуркевич и Серпинский [1], Куратовский [16], Сакс [4].

т. е. существуют две непрерывные функции g и h, определенные на множестве $\mathcal{N}$, такие, что любой точке (x, y) множества I соответствует точка a, удовлетворяющая равенствам $x = g(a)$ и $y = h(a)$. Следовательно, условие несчетности множества $\underset{x}{\mathsf{E}}\,[(x, y) \in I]$ эквивалентно (§ 36, V, следствие 3) существованию в множестве $\mathcal{N}$ плотной в себе последовательности, на которой

1° $h(a)$ тождественно равно y;

2° функция g взаимно однозначна.

Имеем

$$\{y \in A\} \equiv \bigvee_{\xi} \bigwedge_{n} \Big\{ [y = h(\xi^n)] \wedge \bigwedge_{m \neq n} [g(\xi^n) \neq g(\xi^m)] \Big\},$$

где точка ξ пробегает множество плотных в себе последовательностей, принадлежащих множеству $\mathcal{N}$. Это множество последовательностей топологически полно, как множество типа G_δ в полном пространстве $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ (§ 30, XII, 6). Отсюда вытекает, что множество

$$\underset{y,\,\xi}{\mathsf{E}} \bigwedge_{n} \Big\{ [y = h(\xi^n)] \wedge \bigwedge_{m \neq n} [g(\xi^n) \neq g(\xi^m)] \Big\}$$

есть множество типа G_δ. Множество A является аналитическим, так как оно есть проекция этого последнего множества.

Замечания. 1. Обратно, *любому аналитическому множеству A соответствует непрерывная функция f, определенная на множестве $\mathcal{N}$, такая, что $A = A_f$.*

Действительно, положим

$$g\left(\frac{1}{|a^1}\Big| + \frac{1}{|a^2}\Big| + \frac{1}{|a^3}\Big| + \ldots\right) = \frac{1}{|a^1}\Big| + \frac{1}{|a^3}\Big| + \frac{1}{|a^5}\Big| + \ldots.$$

Следовательно, $g(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ и множество $g^{-1}(a)$ является несчетным при каждом a. Пусть h — непрерывное отображение множества $\mathcal{N}$ на множество A. Тогда достаточно положить $f(a) = hg(a)$.

2. Множество A_f может не быть борелевским даже в случае, когда функция f непрерывна и $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{J}$.

3. Сакс [4] получил следующее интересное приложение теоремы 3. Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{J}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{E}^{\mathcal{J}}$, I — множество „точек" (x, y) произведения $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, таких, что правая производная функции y равна $+\infty$ в точке x. Множество I — аналитическое (множество типа $F_{\sigma\delta}$), ибо

$$\{(x, y) \in I\} \equiv \bigwedge_{n} \bigvee_{m} \bigwedge_{0 < h \leqslant 1/m} \left\{ \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \geqslant n \right\}.$$

Следовательно, из теоремы 3 вытекает, что *множество непрерывных функций, имеющих на несчетном множестве точек бесконечную правую производную, является аналитическим (в пространстве $\mathcal{Y}$).*

Кроме того, это множество ни в одной из своих точек не является множеством первой категории (Сакс, цит. раб., стр. 215), следовательно, в силу свойства Бэра (§ 11, IV, следствие 2), его дополнение является множеством первой категории (непустым, согласно теореме Безиковича [1], стр. 212). Сопоставим это утверждение с § 34, VIII.

Обозначим соответственно через I_f, D_f и C_f множества таких точек $y \in \mathcal{Y}$, что

1° множество $f^{-1}(y)$ содержит изолированную точку;

2° множество $f^{-1}(y)$ счетно (конечно или бесконечно) и непусто;

3° множество $f^{-1}(y)$ содержит точку, не являющуюся точкой конденсации.

Приведенные ниже следствия представляют собой обобщения теоремы из п. IV.

Следствия 1—3 (Браун [1]). *Если функция f, определенная на борелевском множестве, B-измерима, то множества I_f, D_f и C_f представляют собой **CA**-множества.*

Доказательство. 1. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства $\mathcal{X}$. Обозначим через f_n сужение $f \mid R_n$. Тогда

$$I_f = Z_{f_1} \cup Z_{f_2} \cup \ldots .$$

2. Как и доказательство теоремы 1, это доказательство сводится к случаю, когда f — непрерывная функция, определенная на пространстве $\mathcal{N}$. Счетные непустые множества (принадлежащие полному пространству $\mathcal{N}$) характеризуются среди замкнутых множеств F следующими двумя условиями: 1° множество F содержит изолированную точку, 2° множество F не является несчетным множеством. Тогда

$$D_f = I_f - A_f.$$

3. Пусть функция f_n определена так же, как в 1, тогда

$$C_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \ldots .$$

Следствие 4 (Браун [1], Лузин [8]). *Пусть f есть B-измеримая функция, E — борелевское множество, а множество $f(E)$ не является борелевским; тогда множество $f(E) - C_f$ не является борелевским.*

Действительно, в противном случае множество $f(E) = C_f \cup \cup [f(E) - C_f]$ было бы, согласно следствию 3, **CA**-множеством. Как аналитическое множество $f(E)$ (§ 38, III, 5) было бы тогда борелевским (п. III, следствие 1).

Непосредственно из следствия 2 вытекает

Следствие 5. *Пусть f — непрерывная функция на полном сепарабельном пространстве $\mathcal{X}$, такая, что* $f(\mathcal{X}) = D_f$ (т. е.

все значения функции f имеют счетный порядок); тогда $f(\mathscr{X})$ — борелевское множество.

Более того, *пространство $\mathscr{X}$ представляет собой сумму ряда борелевских множеств: $\mathscr{X} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, таких, что сужения $f \mid B_n$* являются гомеоморфизмами. (Доказательство см. в работах Лузина [8], стр. 237, и Хана [2], стр. 381.)

VIII. Составляющие, или конституанты, CA-множества[1]. Пусть A—аналитическое множество и, согласно следствию 2, п. II, пусть $W = \{W_r\}$ — решето, составленное из замкнутых (или, более общо, борелевских) множеств, через которое просеяно множество A. Положим, как в § 3, XV,

(1) $$M_x = \mathop{\mathrm{E}}_{r} (x \in W_r);$$

(2) $\mu(x)$ — порядковый тип множества M_x;

(3) $$A_\tau = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [\mu(x) = \tau].$$

Так как множество A просеяно решетом W, то

(4) $$\mathscr{X} - A = \bigcup_{\alpha < \Omega} A_\alpha.$$

Множества A_α $(\alpha < \Omega)$ называются *составляющими, или конституантами, множества $\mathscr{X} - A$, определенными решетом W.*

Расположим двоичные дроби $r \in \mathscr{R}_0$ в бесконечную последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, которую далее будем считать фиксированной.

Напомним определение решета $\{C_r\}$ и составляющих L_α, рассмотренных в § 3, XVI. Множество C_{r_n} определяется тождеством

(5) $$\left(t \in C_{r_n}\right) \equiv \left(t^{(n)} = 2\right),$$

где $t = \left[t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)}, \ldots\right]$ — точка, принадлежащая канторову множеству $\mathscr{C}$.

Кроме того, положим

(6) $$R_t = \mathop{\mathrm{E}}_{r} (t \in C_r);$$

(7) $\overline{t}$ — порядковый тип множества R_t,

(8) $$L_\tau = \mathop{\mathrm{E}}_{t} (\overline{t} = \tau) \quad \text{и} \quad L = \mathop{\mathrm{E}}_{t} (\overline{t} < \Omega) = \bigcup_{\alpha < \Omega} L_\alpha.$$

Тождество (5) означает, что *характеристическая функция последовательности $C_{r_1}, C_{r_2}, \ldots$,* есть тождественная функция.

Теорема 1. Пусть *f — характеристическая функция последовательности $W_{r_1}, W_{r_2}, \ldots$,* т. е. *$f(x)$ — такая точка канторова множества $\mathscr{C}$, что*

(9) $$\left[f^{(n)}(x) = 2\right] \equiv \left(x \in W_{r_n}\right).$$

[1]) См. Лузин [8], стр. 188.

Тогда имеют место следующие формулы:

$$M_x = R_{f(x)}, \tag{10}$$

откуда

$$\mu(x) = \overline{f(x)}, \tag{11}$$

$$A_\tau = f^{-1}(L_\tau), \tag{12}$$

$$\mathscr{X} - A = f^{-1}(L). \tag{13}$$

Действительно, согласно соотношениям (1), (9), (5) и (6), имеем

$$(r_n \in M_x) \equiv (x \in W_{r_n}) \equiv [f^{(n)}(x) = 2] \equiv [f(x) \in C_{r_n}] \equiv [r_n \in R_{f(x)}],$$

откуда вытекает формула (10) и, в силу (2) и (7), формула (11). Равенство (12) выводится из (8), (11) и (3):

$$[x \in f^{-1}(L_\tau)] \equiv [f(x) \in L_\tau] \equiv [\overline{f(x)} = \tau] \equiv [\mu(x) = \tau] \equiv (x \in A_\tau).$$

Наконец, (13) вытекает из (4), (12) и (8):

$$\mathscr{X} - A = \bigcup_{\alpha < \Omega} A_\alpha = \bigcup_{\alpha < \Omega} f^{-1}(L_\alpha) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha < \Omega} L_\alpha\Big) = f^{-1}(L).$$

Из утверждения 1 выведем следующие две теоремы.

Теорема 2. (Теорема Лузина — Серпинского[1].) *Множество* $L = \underset{t}{\mathsf{E}}(\bar{t} < \Omega)$ *не является аналитическим* (в силу следствия 1а, § 38, IX, оно является ***CA***-множеством).

Действительно, в пространстве иррациональных чисел $\mathscr{N}$ существует аналитическое множество A, дополнение которого не является аналитическим множеством (§ 38, VI). Пусть W — решето, составленное из замкнутых множеств, через которое просеяно множество A. Так как множество W_{r_n} замкнуто, его характеристическая функция (а следовательно, и функция f^n, определенная формулой (9)) есть функция первого класса (§ 31, I, 1); тогда и характеристическая функция f последовательности $W_{r_1}, W_{r_2}, \ldots$ (§ 31, VI, 1′) есть функция первого класса. Предполагая, что множество L — аналитическое, мы заключаем (§ 38, III, 5), что множество $f^{-1}(L)$ также аналитическое. Но (согласно равенству (13)) мы имеем $f^{-1}(L) = \mathscr{N} - A$, тогда как множество $\mathscr{N} - A$, по предположению, не является аналитическим.

Теорема 3. *Составляющие A_α являются борелевскими множествами*[2].

---

[1]) См. Лузин и Серпинский [3]; приведенное в тексте доказательство взято из работы Куратовского [36].

[2]) В силу замечания по поводу следствия 5б в § 38, IX, это верно для множеств A_τ любого порядкового типа τ.

Действительно, так как при $\alpha < \Omega$ любое множество L_α — борелевское (§ 30, XII, теорема 1) и f — функция первого класса, то, в силу (12), множество A_α — также борелевское (см. § 31, III, 1).

Теорема 4. *Множества* $\underset{t,x}{\mathsf{E}}[\bar{t} < \mu(x)]$, $\underset{t,x}{\mathsf{E}}[\mu(x) < \bar{t}]$ *и* $\underset{t,x}{\mathsf{E}}[\bar{t} = \mu(x)]$ *являются аналитическими.*

Эта лемма вытекает непосредственно из теорем 2 и 5, § 38, IX.

Теорема 5 (о покрытии[1]). *Пусть* E *и* A — *непересекающиеся аналитические множества, т. е.*

$$E \subset \mathscr{X} - A = \bigcup_{\alpha < \Omega} A_\alpha.$$

Тогда существует такой индекс $\alpha_0 < \Omega$, *что*

$$E \subset \bigcup_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha. \tag{14}$$

Предположим, напротив, что для любого $\alpha < \Omega$ существует такое $\xi \geqslant \alpha$, что $E \cap A_\xi \neq 0$. Это означает, что существует такая точка $x \in E$, что $\mu(x) = \xi$ и, следовательно, $\mu(x) \geqslant \alpha$. Отсюда вытекает, что неравенство $\bar{t} < \Omega$ эквивалентно существованию такой точки $x \in E$, что $\mu(x) \geqslant \bar{t}$, т. е. $\bar{t} < \mu(x)$ (ибо $\mu(x)$ при $x \in E$ есть порядковое число). Имеем, таким образом,

$$(\bar{t} < \Omega) \equiv \bigvee_x (x \in E) \wedge [\bar{t} < \mu(x)].$$

Так как функции высказываний $x \in E$ и $\bar{t} < \mu(x)$ представляют собой функции класса $\boldsymbol{A}$ (первая—по предположению, а вторая—согласно теореме 4), то и функция высказываний $\bar{t} < \Omega$ является функцией класса $\boldsymbol{A}$; но это противоречит теореме 2, согласно которой множество $L = \underset{t}{\mathsf{E}}(\bar{t} < \Omega)$ не является аналитическим.

Замечание. Теорема 5 приводит к доказательству следствия 1 из п. III, которое не использует первую теорему отделимости.

Действительно, так как множества A и $\mathscr{X} - A$ предполагаются аналитическими, то, в силу теоремы 5, имеем

$$\mathscr{X} - A \subset \bigcup_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha, \quad \text{следовательно,} \quad \mathscr{X} - A = \bigcup_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha.$$

Так как каждое из множеств A_α — борелевское (теорема 3), то и множество $\bigcup_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha = \mathscr{X} - A$ — также борелевское.

[1]) Теорема Лузина [8], стр. 183.

Из сопоставления теоремы 3 с теоремой 5 немедленно вытекает

Следствие 5а. *Для того чтобы множество* $\mathscr{X} - A = \bigcup_{\alpha<\Omega} A_\alpha$ *было аналитическим (или, что в этом случае то же самое, борелевским), необходимо и достаточно, чтобы функция* $\mu(x)$ *допускала в качестве значений не более чем счетное множество порядковых чисел, т. е. чтобы* $A_\alpha = 0$ *для достаточно больших* α.

Теорема 6. *Существует такое* $\alpha_0 < \Omega$, *что множество* $\bigcup_{\xi \geqslant \alpha_0} A_\xi$ *первой категории.*

Действительно, множество $\mathscr{X} - A$, как CA-множество, обладает свойством Бэра (II, 1). Следовательно, оно содержит такое борелевское множество E (типа G_δ), что $\mathscr{X} - A - E$ есть множество первой категории (§ 11, IV. 2). Согласно включению (14), имеет место соотношение

$$\bigcup_{\xi \geqslant \alpha_0} A_\xi = \mathscr{X} - A - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha \subset \mathscr{X} - A - E,$$

откуда следует требуемое утверждение.

Теорема 7. *Любое множество* Z, *которое можно расположить в последовательность типа* Ω: $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots$, *такую, что*

$$\mu(x_1) < \mu(x_2) < \ldots < \mu(x_\alpha) < \ldots < \Omega,$$

есть множество первой категории на любом совершенном множестве[1]).

Действительно, предыдущее рассуждение можно провести относительно любого заданного совершенного множества P. Таким образом, при фиксированном P существует индекс α_0, такой, что множество точек x_ξ, для которых $\xi \geqslant \alpha_0$ и которые принадлежат множеству P, есть множество первой категории на P. Так как множество точек x_α, для которых $\alpha < \alpha_0$, счетно и, следовательно, является множеством первой категории на P (ввиду того, что множество P — совершенное), то отсюда следует, что $Z \cap P$ есть множество первой категории на P.

Теорема 8. *Множества* $L_\alpha (\alpha < \Omega)$ *являются множествами неограниченных борелевских классов, т. е. любому* $\beta < \Omega$ *соответствует множество* L_α, *которое не является множеством класса* β.

---

[1]) О другом построении множеств первой категории на любом совершенном множестве см. в § 24, I, 5.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно, в силу (12), установить существование CA-множества, составляющие которого не принадлежат ограниченным классам. Докажем следующую теорему.

Теорема 9 (Лузин и Серпинский [5]). *Пусть F — универсальное отображение пространства $\mathcal{N}$ относительно семейства аналитических подмножеств пространства $\mathcal{N}$, такое, что множество $A = \underset{a,\,b}{\mathsf{E}}\,[b \in F(a)]$ — аналитическое* (см. § 38, V), *и $W = \{W_r\}$ — решето (составленное из замкнутых множеств), через которое просеяно множество A; тогда составляющие A_α, которые соответствуют этому решету, представляют собой множества неограниченных борелевских классов.*

Предположим, напротив, что все составляющие принадлежат борелевскому классу β. Пусть B — борелевское множество ($\subset \mathcal{N}$), которое не является множеством класса $\beta + 1$. Существует такое число a_0, что $F(a_0) = \mathcal{N} - B$. Положим $V = a_0 \times \mathcal{N}$ («вертикаль» с абсциссой a_0) и $D = a_0 \times B$. Тогда

$$D = a_0 \times [\mathcal{N} - F(a_0)] = V - (V \cap A) = V - A.$$

Так как множество D — борелевское, то, согласно теореме 5, существует индекс α_0, такой, что $D \subset \bigcup_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha$, откуда $V - A \subset \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (V \cap A_\alpha)$, и, следовательно, $V - A = \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (V \cap A_\alpha)$, поскольку (см. (4)) $V \cap A_\alpha \subset V - A$. Так как множества A_α, по предположению, являются множествами класса β, то отсюда вытекает, что множество $V - A$ (т. е. множество D, а следовательно, и множество $\mathcal{N} - F(a_0)$) есть множество класса $\beta + 1$. Но тогда, вопреки предположению, множество B было бы множеством класса $\beta + 1$.

IX. Проективные классы функций высказываний, включающих переменные порядковые типы[1]). Пусть τ — переменная, пробегающая множество $\mathcal{J}$ счетных порядковых типов; пусть, далее, t — некоторый элемент канторова множества $\mathcal{C}$; через $\bar{t}$ обозначим его порядковый тип (§ 3, XVI).

Определение 1. *Функция высказываний от n переменных $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ называется функцией проективного класса $\boldsymbol{L}_n$, если функция высказываний $\varphi(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ есть функция класса $\boldsymbol{L}_n$, т. е. если множество $\underset{t_1 \ldots t_n}{\mathsf{E}}\, \varphi(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ принадлежит классу $\boldsymbol{L}_n$.*

Примеры. Функции высказываний: «τ есть некоторый предельный тип», «τ есть некоторый четный тип», «τ есть некоторый нечет-

[1]) Куратовский [34], [35]. Некоторые приложения см. в работе Сампеи [2].

ный тип», «$\tau = \alpha$», где α — фиксированное число $< \Omega$, являются борелевскими, ибо соответствующие множества — борелевские (согласно § 30, XII, 3, 4 и 1). Аналогичным образом, соотношения (функции высказываний двух переменных) «$\tau \prec \sigma$» и «$\tau = \sigma$» — аналитические (согласно § 38, IX, 2a и 5a).

Функция высказываний «$\tau < \Omega$» есть функция класса ***CA*** (не аналитическая, см. VIII, 2). Докажем два следующих утверждения.

Теорема 1. *Сложение* $\tau = \sigma + \rho$, *рассматриваемое как функция высказываний трех переменных, есть аналитическая операция.*

В самом деле, пусть T, S и R — три подмножества множества двоичных дробей $\mathscr{R}_0 = (r_1, r_2, \ldots)$, имеющие соответственно порядковые типы τ, σ и ρ. Обозначим через R^* множество, которое получается из множества R добавлением числа 2 к каждому элементу множества R.

Так как множества S и R^* не пересекаются, то $\sigma + \rho$ — порядковый тип множества $S \cup R^*$. Условие подобия множества T множеству $S \cup R^*$ можно выразить следующим образом: существуют две последовательности действительных чисел $a = [a^1, a^2, \ldots]$ и $b = [b^1, b^2, \ldots]$, такие, что

1° любой элемент последовательности a принадлежит множеству T, а любой элемент последовательности b принадлежит множеству $S \cup R^*$;

2° любой элемент множества T есть член последовательности a, а любой элемент множества $S \cup R^*$ есть член последовательности b;

3° условия $a^i < a^j$ и $b^i < b^j$ эквивалентны.

Итак,

$$(\tau = \sigma + \rho) \equiv \bigvee_{a,b} \bigwedge_n \{(a^n \in T) \wedge [(b^n \in S) \vee ((b^n - 2) \in R)]\} \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_k \{[(r_k \in T) \Rightarrow \bigvee_n (r_k = a^n)] \wedge [(r_k \in S) \Rightarrow \bigvee_n (r_k = b^n)] \wedge$$
$$\wedge [(r_k \in R) \Rightarrow \bigvee_n (r_k = b^n - 2)]\} \wedge \bigwedge_{i,j} \{(a^i < a^j) \equiv (b^i < b^j)\}.$$

Пусть $\bar{t}$ — порядковый тип множества R_t (см. § 3, XVI); тогда равенство $\bar{t} = \bar{s} + \bar{r}$ эквивалентно выражению, получающемуся из предыдущего тождества после замены множества T множеством R_t, множества S — множеством R_s, а множества R — множеством R_r.

Принимая во внимание соотношение эквивалентности

$$(a^n \in R_t) \equiv \bigvee_k (r_k = a^n) \wedge (r_k \in R_t) \equiv \bigvee_k (r_k = a^n) \wedge (t^{(k)} = 2)$$

и аналогичные тождества, касающиеся функций $(b^n \in R_s)$ и $[(b^n - 2) \in R_r]$, нетрудно установить, что функция высказываний (от переменных a,

b, t, s и r), которая следует за оператором $\bigvee\limits_{a, b}$, — борелевская. Следовательно, функция высказываний $\bar{t}=\bar{s}+\bar{r}$ — аналитическая.

Теорема 2. *Умножение $\tau=\sigma\rho$ представляет собой аналитическую операцию.*

Применяя обозначения предыдущего доказательства, получаем

$$(\tau=\sigma\rho)\equiv\bigvee_{a, b, c}\ \bigwedge_{n}[(a^n\in T)\wedge(b^n\in S)\wedge(c^n\in R)]\wedge$$

$$\wedge\bigwedge_{k}\left[(r_k\in T)\Rightarrow\bigvee_{n}(r_k=a^n)\right]\wedge\bigwedge_{k, m}\left[(r_k\in S)\wedge(r_m\in R)\Rightarrow\bigvee_{n}(r_k=b^n)\right]\wedge$$

$$\wedge(r_m=c^n)\wedge\bigwedge_{i, j}[(a^i<a^j)\equiv(c^i<c^j)\vee(c^i=c^j)\wedge(b^i<b^j)].$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что функция высказываний $\bar{t}=\bar{s}\cdot\bar{r}$ — аналитическая.

Определение 1 можно расширить таким образом, чтобы охватить функции высказываний, которые, помимо переменных порядковых типов, содержат переменные, пробегающие одно или несколько полных сепарабельных пространств.

Определение 2. *Мы называем функцию высказываний $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n, x_1, \ldots, x_n)$ функцией класса L_n, если функция высказываний $\varphi(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n, x_1, \ldots, x_n)$ есть функция класса L_n.*

Так, например, в обозначениях п. VIII функции высказываний $t\prec\mu(x)$ и $\tau=\mu(x)$ — аналитические (VIII, 4); функция высказываний $x\in A_\tau$ также аналитическая, следовательно, аналитическим является и множество $\underset{t, x}{\mathsf{E}}\left(x\in A_{\bar{t}}\right)$.

Чтобы вычислить проективный класс функции высказываний, включающей переменные порядковые типы, воспользуемся следующими правилами, которые легко вывести из правил 1—5, § 38, VIII.

1. *Если $\varphi(\tau, x)$ — функция класса L_n, то ее отрицание $\neg\varphi(\tau, x)$ есть функция класса CL_n.*

2. *Если $\varphi(\tau, x)$ — функция класса L_n в пространстве $\mathcal{T}\times\mathcal{X}$, то $\varphi(\tau, x)$ есть функция класса L_n в пространстве $\mathcal{T}^2\times\mathcal{X}$, а также в пространстве $\mathcal{T}\times\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.*

3. *Пусть $\varphi_1(\tau, x)$, $\varphi_2(\tau, x)$, ... — конечная или бесконечная последовательность функций класса L_n (n — фиксированное); тогда функции $\bigvee\limits_{k}\varphi_k(\tau, x)$ и $\bigwedge\limits_{k}\varphi_k(\tau, x)$ тоже принадлежат классу L_n.*

4. *Пусть* $\varphi(\tau, \sigma, x, y)$ — *функция класса* L_n; *тогда функции* $\bigvee_\sigma \varphi(\tau, \sigma, x, y)$ *и* $\bigvee_y \varphi(\tau, \sigma, x, y)$ *принадлежат классу* PL_n, *а функции* $\bigwedge_\sigma \varphi(\tau, \sigma, x, y)$ *и* $\bigwedge_y \varphi(\tau, \sigma, x, y)$ — *классу* $CPCL_n$.

5. *Пусть* $\varphi(\tau, \sigma, x, y)$ — *функция класса* L_n; *тогда* $\varphi(\tau, \sigma_0, x, y)$, $\varphi(\tau, \sigma, x, y_0)$, $\varphi(\tau, \tau, x, y)$ *и* $\varphi(\tau, \sigma, x, x)$ — *также функции класса* L_n.

Пополним этот список следующими двумя правилами:

6. *Пусть* $\varphi(\sigma, x)$ — *функция класса* L_n; *тогда функции*

$$\psi(\tau, x) \equiv \bigvee_{\sigma<\tau} \varphi(\sigma, x) \quad \text{и} \quad \chi(\tau, x) \equiv \bigwedge_{\sigma<\tau} \varphi(\sigma, x)$$

также являются функциями класса L_n.

Очевидно, достаточно доказать эту теорему для функции $\varphi(\sigma)$, не зависящей от x. В § 30, XII, 1 мы определили последовательность непрерывных функций $\{t^{[k]}\}$, такую, что последовательность $\overline{t^{[1]}}$, $\overline{t^{[2]}}$, ... пробегает все порядковые числа $<\overline{t}$ (при условии, что $t \neq 0$).

Следовательно, существование некоторого $\sigma < \overline{t}$ (где $t \neq 0$), такого, что $\varphi(\sigma)$, эквивалентно существованию некоторого k, такого, что $\varphi\left(\overline{t^{[k]}}\right)$. Иначе говоря, если положить $\tau = \overline{t}$, то

$$\psi(\tau) \equiv \psi(\overline{t}) \equiv (t \neq 0) \wedge \bigvee_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\overline{t^{[k]}}\right).$$

Так как функция $t^{[k]}$ непрерывна, то из правила 3 вытекает, что ψ — функция класса L_n. Применяя правило Моргана, выводим, что функция χ — тоже класса L_n.

Пусть задана функция μ, определенная в пространстве $\mathscr{X}$ или в множестве $\mathcal{J}$, значения которой принадлежат множеству $\mathcal{J}$; мы скажем, что это функция класса L_n, если функция высказываний $\sigma = \mu(\xi)$ принадлежит классу L_n. При таком определении имеет место следующее правило:

7. *Пусть* Φ — *множество класса* $L_n (n > 0)$ *порядковых типов и* μ — *аналитическая функция; тогда множество*

$$\mu^{-1}(\Phi) = \underset{\xi}{E}\, [\mu(\xi) \in \Phi]$$

принадлежит классу L_n.

Следовательно, *если* $\varphi(\tau, x)$ — *функция класса* $L_n (n > 0)$, *то и функция высказываний* $\varphi[\mu(\xi), x]$ — *также класса* L_n.

В самом деле, мы имеем

$$[\mu(\xi) \in \Phi] \equiv \bigvee_\sigma [\sigma = \mu(\xi)] \wedge (\sigma \in \Phi).$$

В случае, когда Φ — множество нечетного класса L_n, отсюда следует, что множество $\mu^{-1}(\Phi)$ принадлежит классу $PL_n = L_n$. Если

Φ—множество четного (>0) класса L_n, то его дополнение $-\Phi$ представляет собой множество нечетного класса L_{n-1}, следовательно, $\mu^{-1}(-\Phi)$ — множество класса L_{n-1}; тогда множество $\mu^{-1}(\Phi) = -\mu^{-1}(-\Phi)$ принадлежит классу $CL_{n-1} = L_n$.

Чтобы доказать вторую часть правила 7, можно ограничиться случаем, когда φ — функция только одной переменной τ. Заметим, что, в силу тождества $\varphi(\sigma) \equiv \left[\sigma \in \underset{\tau}{\mathrm{E}}\, \varphi(\tau)\right]$, имеет место соотношение $\varphi[\mu(\xi)] \equiv \left[\mu(\xi) \in \underset{\tau}{\mathrm{E}}\, \varphi(\tau)\right]$.

Положим $\Phi = \underset{\tau}{\mathrm{E}}\, \varphi(\tau)$. Так как, по предположению, $\underset{\tau}{\mathrm{E}}\, \varphi(\tau)$—множество класса L_n, то, как мы только что доказали, функция высказываний $\mu(\xi) \in \Phi$ также принадлежит классу L_n. Функция $\varphi[\mu(\xi)]$ принадлежит тому же классу.

8. *Суперпозиция двух аналитических функций есть аналитическая функция.*

Действительно, если μ_1 — аналитическая функция, то функция высказываний $\sigma = \mu_1(\tau)$ — аналитическая. Следовательно, если предположить, что функция μ_2 — аналитическая, то функция высказываний $\sigma = \mu_1[\mu_2(\xi)]$ также аналитическая, согласно 7 (вторая часть). Это означает, что суперпозиция $\mu_1 \circ \mu_2$ — аналитическая функция.

Пример. Функция $(\tau \cdot 2 + 1) 2^n$ — аналитическая (при фиксированном n), как суперпозиция аналитических функций $\tau \cdot 2$, $\tau + 1$ и $\tau \cdot 2^n$. Мы воспользуемся этой функцией в п. X.

Замечание. Легко видеть, что в правилах 1—8 переменные τ и x можно заменить „сложными“ переменными (пробегающими прямое произведение). Можно допустить также, что значения функции μ — сложные (в этом же смысле).

При изучении функций высказываний, имеющих в качестве аргументов *порядковые числа*, полезно следующим образом ввести понятие *относительно аналитической* функции высказываний: функция высказываний $\varphi(\alpha)$, определенная при $\alpha < \Omega$, называется относительно аналитической, если существует аналитическая функция высказываний $\varphi^*(\tau)$, определенная при любом $\tau \in \mathcal{J}$ и такая, что

$$\varphi^*(\tau) \wedge (\tau < \Omega) \equiv \varphi(\tau).$$

Вообще, функция $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — относительно аналитическая, если она имеет вид

$$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv \varphi^*(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge (\tau_1 < \Omega) \wedge \ldots \wedge (\tau_n < \Omega),$$

где функция φ^* — аналитическая.

Функции высказываний $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1 < \Omega, \ldots, \alpha_n < \Omega$, которые являются одновременно функциями класса CA и относительно аналитическими, называются *элементарными*. Это наименование связано с тем, что функции высказываний, обычно рассматриваемые в теории порядковых чисел, являются элементарными.

Таковы, например, соотношения

$$\alpha=\beta,\quad \alpha\leqslant\beta,\quad \alpha<\beta,\quad \alpha=\beta+\gamma,\quad \alpha=\beta\gamma\text{ [1]}.$$

Для доказательства элементарности равенства $\alpha=\beta$ заметим, что при $\alpha, \beta<\Omega$ имеет место соотношение эквивалентности

$$(\alpha=\beta)\equiv(\alpha \text{ не } \prec\beta)\wedge(\beta \text{ не } \prec\alpha).$$

Так как соотношение $\tau\prec\sigma$ — аналитическое, а соотношение $\tau<\Omega$ — класса *CA*, то отсюда следует, что соотношение

$$(\tau \text{ не } \prec\sigma)\wedge(\sigma \text{ не } \prec\tau)\wedge(\tau, \sigma<\Omega),$$

а следовательно, и соотношение $\alpha=\beta$, принадлежат классу *CA*. Кроме того, соотношение $\alpha=\beta$ — относительно аналитическое, потому что соотношение $\tau=\sigma$ (в области всех порядковых типов) — аналитическое.

Применение *трансфинитной индукции* не выводит, в общем случае, из области элементарных функций. С этим фактом связана следующая теорема[2].

Теорема. *Пусть α — данное число $<\Omega$ и $\varkappa$ — функция, ставящая в соответствие любому $\xi<\Omega$ некоторое порядковое число $<\Omega$. Допустим, что функция $\varkappa$ — элементарная (т. е. что соотношение $\lambda=\varkappa(\xi)$ — элементарное). При этом предположении функция μ, определенная при $\xi<\Omega$ следующими условиями:*

1) $\mu(0)=\alpha,$

2) $\mu(\xi+1)=\varkappa[\mu(\xi)],$

3) $\mu(\zeta)=\lim\limits_{\eta<\zeta}\mu(\eta)$, *если ζ — предельное число* $(\neq 0)$,

является элементарной.

Отсюда можно вывести, что, например, соотношение $\alpha=\beta^{\gamma}$ — элементарное.

X. Теоремы редукции[3].

Теорема 1. *Пусть дана бесконечная последовательность множеств $U^1, U^2, \ldots$ класса **CA**; тогда существует такая последовательность непересекающихся множеств $V^1, V^2, \ldots$ класса **CA**, что*

(1) $$V^n\subset U^n \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}V^n=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n.$$

---

[1] Доказательства и более детальный разбор этих вопросов можно найти в работе Куратовского [35].

[2] См. цит. раб. Куратовского, стр. 181.

[3] См. Куратовский [29].

Следовательно, *если* $\mathscr{X} = U^1 \cup U^2 \cup \ldots$, *то множества* V^n — *борелевские.*

Пусть $U^n = \bigcup\limits_{\alpha < \Omega} A_\alpha^n$ — некоторое разложение на составляющие (соответствующие решету, составленному из замкнутых множеств). Согласно VIII (3) и 4, существует функция μ_n, которая ставит в соответствие любой точке $x \in \mathscr{X}$ счетный порядковый тип так, чтобы выполнялись следующие условия:

1° $A_\alpha^n = \mathop{\mathrm{E}}\limits_x [\mu_n(x) = \alpha]$ при $\alpha < \Omega$;

2° функция μ_n — аналитическая в смысле п. IX, т. е. множество $\mathop{\mathrm{E}}\limits_{x,\, t} [\mu_n(x) = \bar{t}]$ — аналитическое.

Положим

$$\gamma_n(x) = [\mu_n(x) \cdot 2 + 1] \cdot 2^n \tag{2}$$

и

$$V^n = U^n \cap \bigcap_{k \neq n} \mathop{\mathrm{E}}_x [\gamma_k(x) \text{ не } \prec \gamma_n(x)], \tag{3}$$

где соотношение (τ не $\prec \sigma$) означает, что множество, имеющее порядковый тип τ, не подобно никакому подмножеству множества, имеющего порядковый тип σ (см. § 38, IX (4)).

Как суперпозиция аналитических функций, функция γ_n — аналитическая (см. IX, 8, пример). Так как соотношение $\tau \prec \sigma$ — аналитическое (IX, примеры, определение 1), то соотношение $\gamma_k(x) \prec \gamma_n(x)$ при фиксированных n и k — также аналитическое (в силу IX, 7). Следовательно, V^n — множество класса CA.

При $n \neq k$ имеем $V^n \cap V^k = 0$, ибо если предположить, что $x \in V^n \cap V^k$, то мы имели бы соотношения

$$\gamma_n(x) < \Omega, \quad \gamma_k(x) < \Omega, \quad \gamma_k(x) \text{ не } \prec \gamma_n(x) \text{ не } \prec \gamma_k(x).$$

Так как соотношение $\alpha \prec \beta$ для порядковых чисел означает, что $\alpha \leqslant \beta$, то $\gamma_k(x) = \gamma_n(x)$. С другой стороны, в области порядковых чисел из равенства $(\alpha \cdot 2 + 1)\, 2^n = (\beta \cdot 2 + 1)\, 2^k$ следует, что $n = k$ (и $\alpha = \beta$) [1]).

Следовательно, формула $x \in V^n \cap V^k$ имеет смысл только при $n = k$. Иначе говоря, множества $V^1, V^2, \ldots$ не пересекаются. Остается доказать включение

$$U^n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} V^m. \tag{3a}$$

---

[1]) См., например, Серпинский [65], стр. 330.

Пусть $x \in A^n_\alpha$, т. е. $\mu_n(x) = \alpha < \Omega$, откуда $\gamma_n(x) < \Omega$. Пусть m_0 — индекс m наименьшего порядкового числа $\gamma_m(x) < \Omega$. Тогда при любом $k \neq m_0$ имеем

$$\gamma_k(x) \text{ не } \prec \gamma_{m_0}(x), \quad \text{откуда} \quad x \in \bigcap_{k \neq m_0} \mathop{\mathsf{E}}_x [\gamma_k(x) \text{ не } \prec \gamma_{m_0}(x)].$$

Наконец, $x \in U^{m_0}$, т. е. $\mu_{m_0}(x) < \Omega$, ибо если предположить, что τ не является порядковым числом, то $(\tau \cdot 2 + 1)\, 2^n$ также не было бы порядковым числом. Поэтому неравенство $\mu_{m_0}(x) < \Omega$ является следствием неравенства $\gamma_{m_0}(x) < \Omega$.

Таким образом, установлено, что $x \in V^{m_0}$, откуда вытекает включение (3а)

Для доказательства второй части теоремы заметим, что так как множества V^1, V^2, ... не пересекаются, то из равенства $\mathscr{X} = V_1 \cup \cup V_2 \cup \ldots$ следует, что $\mathscr{X} - V^n = \bigcup_{k \neq n} V^k$. Как объединение последовательности CA-множеств, $\mathscr{X} - V^n$ является CA-множеством. Следовательно, множество V^n, как A- и CA-множество, является борелевским.

Замечания. 1. Функция $\rho(\alpha, n) = (\alpha \cdot 2 + 1)\, 2^n$ упорядочивает взаимно однозначным образом все пары (α, n) в трансфинитную последовательность типа Ω. Поэтому множество V^n можно определить следующим образом: точка x принадлежит множеству V^n, если она принадлежит такой составляющей A^n_α, что „ранг" $\rho(\alpha, n)$ пары (α, n) ниже ранга любой другой пары (β, k), для которой $x \in A^k_\beta$.

2. Анализируя доказательство теоремы 1, важно отметить существенную роль *аналитичности* соотношения $x \in A^n_\tau$, т. е. множества $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\, t}\left(x \in A^n_{\overline{t}}\right)$.

Из теоремы редукции вытекают следующие две теоремы, обобщающие теоремы отделимости из п. III и VI, доказательство которых аналогично доказательству теоремы 2 и следствия 4, § 26, II.

Теорема 2. (Первая теорема обобщенной отделимости [1].) *Пусть A_1, A_2, ... — последовательность аналитических множеств, такая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = 0$; тогда существует последовательность борелевских множеств B_1, B_2 ..., такая, что*

$$A_n \subset B_n \quad и \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = 0. \tag{4}$$

Теорема 3. (Вторая теорема обобщенной отделимости.) *Пусть A_1, A_2, ... — последовательность аналитических множеств;*

[1]) Теорема Новикова [2].

существует последовательность множеств $B_1, B_2, \ldots$ класса **CA**, *такая, что*

$$(5) \qquad A_n - \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subset B_n \quad и \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Теорема редукции имеет место также в области множеств класса *PCA*.

Теорема 4. *Пусть $U^1, U^2, \ldots$ — бесконечная последовательность множеств класса* **PCA**; *тогда существует последовательность непересекающихся множеств $V^1, V^2, \ldots$ класса* **PCA**, *удовлетворяющая условиям* (1) [1].

Как и в случае *CA*-множеств, из теоремы редукции для множеств **PCA** вытекают две теоремы обобщенной отделимости [2].

Теорема 5. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$* — последовательность класса **CPCA**, *такая, что* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = 0$; *тогда существует последовательность множеств $B_1, B_2, \ldots$, принадлежащих одновременно классам* **PCA** *и* **CPCA** *и удовлетворяющих условиям* (4).

Теорема 6. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность множеств класса* **CPCA**; *тогда существует последовательность множеств $B_1, B_2, \ldots$ класса* **PCA**, *удовлетворяющих условиям* (5).

Теорема 7 [3]. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность аналитических (соответственно класса* **CPCA**) *множеств, такая, что* $\operatorname{Lim\,sup} A_n = 0$; *тогда существует последовательность борелевских (соответственно класса* **PCA** *и* **CPCA**) *множеств $D_1, D_2, \ldots$, таких, что*

$$(8) \qquad A_n \subset D_n \quad и \quad \operatorname{Lim\,sup} D_n = 0.$$

В самом деле, положим $A_n^* = A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots$. По предположению,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k} = \operatorname{Lim\,sup} A_n = 0.$$

Применим теорему 2 (соответственно теорему 5). Тогда

$$A_n^* \subset B_n \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Положим

$$D_1 = B_1 \quad \text{и, вообще,} \quad D_n = D_{n-1} \cap B_n.$$

Отсюда следует, что

$$A_n \subset A_n^* \subset B_n \quad \text{и} \quad A_n^* \subset A_{n-1}^*.$$

Включение (8) устанавливается с помощью индукции: прежде всего, имеем

$$A_1 \subset A_1^* \subset B_1 = D_1;$$

---

[1] Доказательство см. в работах Куратовского [29], [35a], стр. 136.
[2] Теоремы Новикова [3], стр. 465, 466.
[3] Для случая аналитических множеств доказана Ляпуновым [1].

затем, полагая $A^*_{n-1} \subset D_{n-1}$, получаем $A^*_n \subset D_{n-1}$. Взяв пересечение этого включения с включением $A^*_n \subset B_n$, получим

$$A^*_n \subset D_{n-1} \cap B_n = D_n, \quad \text{откуда} \quad A_n \subset A^*_n \subset D_n.$$

Кроме того, так как $D_n \subset D_{n-1}$, то

$$\operatorname{Lim\,sup} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} D_{n+k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Наконец, так как множества B_n — борелевские (соответственно множества класса PCA и $CPCA$), то, в силу (9), множества D_n также борелевские (класса PCA и $CPCA$).

***XI. Функции классов A и CA.** Действительную функцию f назовем *A-функцией* (*CA-функцией*), если множество $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) > c]$ есть A-множество (CA-множество), каково бы ни было c [1]).

Очевидно, что A-функции и CA-функции измеримы в смысле Лебега (если переменная x — действительная) и *обладают свойством Бэра в узком смысле.* Функции, которые *одновременно* являются A- и CA-функциями, совпадают с B-измеримыми функциями. *Характеристическая функция A-*(или CA-) *множества есть A-* (или CA-) *функция.*

Теорема 1. *Предел сходящейся последовательности A-* (или CA)-*функций есть A-* (или CA-) *функция.*

Это следует из того, что условие $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ влечет за собой соотношение эквивалентности

$$\{f(x) > c\} \equiv \bigvee_n \bigwedge_k [f_{n+k}(x) > c + 1/n],$$

откуда

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\,\{f(x) > c\} = \bigcup_n \bigcap_k \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_{n+k}(x) > c + 1/n].$$

Теорема 2. *Пусть f есть A- или CA-функция; тогда множество $\underset{x,\,y}{\mathrm{E}}\,[y = f(x)]$ представляет собой разность двух аналитических множеств.*

Обозначим через $\{r_n\}$ последовательность рациональных чисел. Имеет место соотношение эквивалентности

$$[y \neq f(x)] \equiv \bigvee_n \{[y < r_n < f(x)] \vee [f(x) < r_n < y]\}.$$

Теорема 3. *Пусть f—(ограниченная) B-измеримая функция переменных x и t. Положим $g(x) = \sup_t f(x, t)$ и $h(x) = \inf_t f(x, t)$; тогда g есть A-функция, h есть CA-функция* [2]).

Действительно, из соотношения эквивалентности

$$\left[\sup_t f(t) \leqslant c\right] \equiv \bigwedge_t [f(t) \leqslant c]$$

вытекает, что

$$[g(x) \leqslant c] \equiv \bigwedge_t [f(x, t) \leqslant c], \text{ т. е. } [g(x) > c] \equiv \bigvee_t [f(x, t) > c].$$

---

[1]) См. Канторович [1]. Разумеется, можно аналогично определить функции произвольного проективного класса.

[2]) Хаусдорф [5].

Отсюда следует, что множество $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[g(x) > c]$, как проекция борелевского множества $\underset{x,\,t}{\mathrm{E}}\,[f(x, t) > c]$, является аналитическим.

Аналогичным образом, из соотношения эквивалентности

$$[h(x) < c] \equiv \bigvee_t [f(x, t) < c]$$

следует соотношение

$$[h(x) \leqslant c] \equiv \bigwedge_n [h(x) < c + 1/n] \equiv \bigwedge_n \bigvee_t [f(x, t) < c + 1/n],$$

откуда вытекает, что множество $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[h(x) \leqslant c]$ — аналитическое.

При тех же предположениях $\limsup\limits_{t \to a} f(x, t)$ *есть A-функция, а* $\liminf\limits_{t \to a} f(x, t)$ *есть CA-функция.* Это следует из того, что $\limsup\limits_{t \to a} g(t) = \lim\limits_{n \to \infty} m_n$, где $m_n = \sup g(t)$ при $0 < |a - t| < 1/n$. Следовательно, $\limsup\limits_{a \to t} f(x, t)$, согласно теоремам 1 и 3, представляет собой A-функцию. В случае $\lim\inf$ рассуждения аналогичны.

Пример. *Верхние (или нижние) частные производные Дини B-измеримой функции g двух переменных являются A- (или CA-) функциями* (которые, впрочем, могут принимать бесконечные значения)[1].

В самом деле, полагая

$$f(x, y, t) = \frac{g(x + t, y) - g(x, y)}{t},$$

получаем

$$\limsup_{t \to +0} \frac{g(x + t, y) - g(x, y)}{t} = \limsup_{t \to 0} f(x, y, t),$$

где $f(x, y, t)$ есть B-измеримая функция (при условии $t > 0$).

§ 40. Вполне несовершенные и другие сингулярные пространства

Пространства, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаются сепарабельными метрическими.

1. Вполне несовершенные пространства. Пространство, которое не содержит никакого множества, гомеоморфного совершенному канторову множеству $\mathscr{C}$, называется *вполне несовершенным*. В полном сепарабельном пространстве множество E вполне несовершенно, если оно не содержит никакого непустого совершенного множества, или, что то же самое, никакого аналитического несчетного множества, ибо любое аналитическое несчетное множество топологически содержит множество $\mathscr{C}$ (§ 39, I).

---

[1]) Нейбауэр [1].

Теорема 1 (теорема Бернштейна[1]). *В любом полном сепарабельном несчетном пространстве существует множество, которое — как и его дополнение — является вполне несовершенным множеством мощности континуума.*

Эта теорема непосредственно вытекает из следующей леммы общей теории множеств.

Теорема 2. *Пусть R — произвольное множество мощности $\mathfrak{c}$, $\boldsymbol{M}$ — некоторое семейство мощности $\leqslant \mathfrak{c}$ подмножеств множества R, каждое из которых имеет мощность $\mathfrak{c}$. Тогда множество R содержит множество Z, такое, что Z и $R-Z$ имеют мощность $\mathfrak{c}$ и содержат по крайней мере по одному элементу из любого множества, принадлежащего семейству $\boldsymbol{M}$.*

При доказательстве этой леммы мы будем опираться на теорему о „вполне упорядочиваемости": пусть $\Omega_\mathfrak{c}$ — наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{c}$; предположим, что множества — элементы семейства $\boldsymbol{M}$ — расположены в трансфинитную последовательность типа $\Omega_\mathfrak{c}$:

$$(1) \qquad M_1, \ M_2, \ \ldots, \ M_\omega, \ M_{\omega+1}, \ \ldots,$$

члены которой могут быть различными или совпадающими.

Пусть, аналогичным образом,

$$(2) \qquad x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_\omega, \ x_{\omega+1}, \ \ldots$$

— последовательность типа $\Omega_\mathfrak{c}$, все члены которой различны, составленная из всех элементов множеств R. С помощью трансфинитной индукции определим две последовательности $\{p_\alpha\}$ и $\{q_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega_\mathfrak{c})$ следующим образом:

1° p_1 — первый член последовательности (2), принадлежащий множеству M_1, а q_1 — первый член последовательности (2), такой, что $p_1 \neq q_1$ и $q_1 \in M_1$,

2° обозначим через S_α при $\alpha > 1$ множество всех точек p_ξ и q_ξ для $\xi < \alpha$; тогда p_α — первый член последовательности (2), принадлежащий множеству $M_\alpha - S_\alpha$ (такой член существует, потому что множество S_α имеет мощность $< \mathfrak{c}$); аналогичным образом, q_α — первый член последовательности (2), принадлежащий множеству $M - S_\alpha - p_\alpha$.

Тогда Z — множество всех точек p_α при $\alpha < \Omega_\mathfrak{c}$.

Замечания. 1. В случае, когда пространство R представляет собой интервал, множество Z *не измеримо в смысле Лебега*, ибо множество Z, так же как и его дополнение, имеют внутреннюю меру нуль, как вполне несовершенные множества.

---

[1]) Бернштейн [1]. См. Мало [1], Шёнфлис [1], стр. 361. Доказательство см. в работе Серпинского и Куратовского [3]. Проблема существования сепарабельных вполне несовершенных пространств выдвинута Шеффером [1].

2. Изложенное выше доказательство существования несчетных вполне несовершенных множеств не является *эффективным*, т. е. существование таких множеств было доказано без *указания* на какое-либо конкретное множество Z (отметим, что последовательности (1) и (2) не были определены).

Неизвестно никакого эффективного доказательства этой теоремы (даже в случае пространства действительных чисел). Это — одна из фундаментальных проблем, связанных с понятием эффективности [1]).

3. *В полном несчетнмм пространстве $\mathscr{X}$ существует несчетное (вполне несовершенное) множество, любой непрерывный образ которого (принадлежащий пространству $\mathscr{X}$) представляет собой вполне несовершенное множество.*

Действительно, если предположить, что $\mathfrak{c} > \aleph_1$, то любое множество мощности $\aleph_1$ обладало бы вышеуказанным свойством. Если же принять гипотезу континуума, то для того чтобы прийти к искомому заключению, достаточно в теореме 7, § 35, I вместо семейства F подставить семейство совершенных ($\neq 0$) подмножеств множества $\mathscr{J}^{\aleph_0}$.

Теорема 3. *Пусть Z — вполне несовершенное множество полного сепарабельного плотного в себе пространства $\mathscr{X}$; тогда множество $\mathscr{X} - Z$ ни в какой точке пространства $\mathscr{X}$ не является множеством первой категории.*

Действительно, предположим, что G — открытое непустое множество, такое, что $G - Z$ — множество первой категории. Пусть B есть F_σ-множество первой категории, такое, что $G - Z \subset B$. Тогда множество $G - B$ плотно в G (§ 34, IV), и поэтому плотно в себе (§ 9, V, 3). Как плотное в себе G_δ-множество, множество $G - B$ несчетно (§ 34, V, 3) и, следовательно, содержит совершенное непустое множество (§ 36, V). Но тогда множество Z, которое содержит множество $G - B$, не является вполне несовершенным.

Теорема 4. *В полном сепарабельном плотном в себе пространстве $\mathscr{X}$ любое вполне несовершенное множество, обладающее свойством Бэра, является множеством первой категории.*

Следовательно, *если множества Z и $\mathscr{X} - Z$ вполне несовершенны, то они не обладают свойством Бэра.*

Эта теорема является прямым следствием теоремы 3 и следствия 2, § 11, IV.

II. Пространства заведомо первой категории. Так мы назовем каждое пространство, любое плотное в себе подмножество которого является множеством первой категории в себе.

---

[1]) См. об этом замечания Бернштейна [1].

Теорема 1. *В полном сепарабельном пространстве следующие четыре свойства эквивалентны:*

(i) *быть вполне несовершенным B_r-множеством (т. е. множеством, обладающим свойством Бэра в узком смысле);*

(ii) *быть множеством первой категории в любом совершенном множестве;*

(iii) *быть множеством заведомо первой категории;*

(iv) *быть множеством, любое подмножество которого является B_r-множеством.*

Доказательство. (i)$\to$(ii). Это следует из I.

4. (ii)$\to$(iii). Если множество E обладает свойством (ii) и если X — плотное в себе подмножество множества E, то множество $E \cap \overline{X}$ есть множество первой категории в $\overline{X}$. Следовательно, множество $X = E \cap X$ первой категории в себе (§ 10, IV, 2).

(iii)$\to$(iv). Из свойства (iii), очевидно, вытекает свойство B_r, и если какое-либо множество обладает свойством (iii), то этим свойством обладает и каждое его подмножество.

(iv)$\to$(i). Согласно I, 1 и 4, любое совершенное непустое множество содержит множество, не обладающее свойством Бэра.

Существование несчетных множеств заведомо первой категории было отмечено в § 24, I, 5 и в § 39, VIII, 7. Более подробно эти множества мы изучим в п. III.

Теорема 2. *Свойство быть множеством заведомо первой категории счетно-аддитивно.*

Пусть $\mathscr{X}$ — метрическое сепарабельное пространство, такое, что $\mathscr{X} = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$, где E_n — множество заведомо первой категории. Пусть $\mathscr{X}^*$ - полное сепарабельное пространство, содержащее пространство $\mathscr{X}$. Если P — совершенное подмножество пространства $\mathscr{X}^*$, то, согласно (ii), множества $P \cap E_n$ — первой категории в P; следовательно, их объединение $\mathscr{X} \cap P$ также является множеством первой категории в P.

III. λ-пространства[1]. Так мы назовем пространство, *любое счетное подмножество которого есть G_δ-множество.*

Теорема 1. *Любое λ-пространство представляет собой пространство заведомо первой категории.*

Действительно, пусть W — плотное в себе множество и D — счетное множество, плотное в множестве W, т. е. $D \subset W \subset \overline{D}$. Множество $\overline{W} - D$, как граничное F_σ-множество в множестве $\overline{W}$, является множеством первой категории в $\overline{W}$. Поэтому объединение $\overline{W} =$

[1] См. Куратовский [23].

$=(\overline{W}-D)\cup D$ также представляет собой множество первой категории в $\overline{W}$.

Следовательно, множество W первой категории в себе (§ 10, IV, 2).

Замечание. Обратная теорема не верна. См. п. V, стр. 521, VIII, 6.

Теорема 2. *Любое полное сепарабельное несчетное пространство содержит некоторое несчетное λ-множество, а следовательно, $2^{\aleph_1}$ множеств такого рода* (ибо любое подмножество λ-множества является λ-множеством).

Достаточно доказать это утверждение для пространства $\mathcal{N}$, так как любое полное сепарабельное несчетное пространство топологически содержит пространство $\mathcal{N}$.

Покажем сначала, что *пространство $\mathcal{N}$ содержит несчетную трансфинитную последовательность возрастающих (различных) G_δ-множеств*[1]):

$$(1)\qquad Q_0\subset Q_1\subset\ldots\subset Q_\omega\subset Q_{\omega+1}\subset\ldots.$$

Действительно, пусть $Q_0=0$. При $\alpha>0$ предположим, что все множества Q_ξ, $\xi<\alpha$, являются G_δ-множествами (лебеговской) меры нуль. Следовательно, множество $\bigcup\limits_{\xi<\alpha}Q_\xi$ также имеет меру нуль, и так как (согласно теореме теории меры) любое множество меры нуль содержится в G_δ-множестве меры нуль, то существует множество Q_α типа G_δ, такое, что

$$Q_\alpha\supset\bigcup_{\xi<\alpha}Q_\xi \quad \text{и} \quad Q_\alpha\neq\bigcup_{\xi<\alpha}Q_\xi.$$

Очевидно, можно предположить, что множества Q_α принадлежат пространству $\mathcal{N}$.

Таким образом, существование последовательности (1) доказано. Множество E точек $p_1, p_2, \ldots, p_{\omega+1}, p_{\omega+2}, \ldots$, таких, что $p_{\alpha+1}\in \in Q_{\alpha+1}-Q_\alpha$, есть λ-пространство. Действительно, пусть D — счетное подмножество множества E. Положим $D=(p_{\xi_1}, p_{\xi_2}, \ldots, p_{\xi_n}, \ldots)$; пусть α — порядковое число, превосходящее все индексы ξ_n. Тогда

$$D\subset Q_\alpha\cap E,\quad \text{откуда}\quad D=Q_\alpha\cap E\cap D=E\cap[Q_\alpha-(Q_\alpha\cap E-D)],$$

и так как множество $Q_\alpha\cap E$ счетно (ибо при $\beta>\alpha$ точка p_β не принадлежит множеству Q_α), то $Q_\alpha-(Q_\alpha\cap E-D)$ есть G_δ-множество.

---

[1]) Это предложение принадлежит Зальцвассеру. Доказательство, не использующее теорию меры, см. в работе Серпинского [51]. См. также Хаусдорф [6].

Отсюда вытекает, что D есть G_δ-множество относительно множества E[1]).

Замечание. К λ-пространствам приводит изучение *порядка возрастания* последовательностей положительных целых чисел. Действительно, пусть $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$ и $\mathfrak{y}=[\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \ldots]$ — два иррациональных числа или, что то же самое, две последовательности положительных целых чисел; положим $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}$, если $\mathfrak{z}^i < \mathfrak{y}^i$, начиная с некоторого индекса i:

$$\{\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}\} \equiv \bigvee_n \bigwedge_k \{\mathfrak{z}^{n+k} < \mathfrak{y}^{n+k}\}.$$

Любое множество $\mathfrak{S}$ последовательностей (рассматриваемое как подмножество множества $\mathcal{N}$), вполне упорядоченное отношением $\mathfrak{z} \prec \mathfrak{y}$ по типу Ω[2]), *есть λ-пространство.*

Действительно, пусть $\mathfrak{D}$ — счетное подмножество множества $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}=[\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\omega, \mathfrak{z}_{\omega+1}, \ldots], \quad \mathfrak{D}=\left[\mathfrak{z}_{\xi_1}, \mathfrak{z}_{\xi_2}, \ldots, \mathfrak{z}_{\xi_n}, \ldots\right].$$

Пусть α — число, превосходящее все индексы ξ_n, и $\mathfrak{H}$ — множество $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\alpha)$. Так как множество $\mathfrak{H}$ содержит множество $\mathfrak{D}$ и разность $\mathfrak{H}-\mathfrak{D}$ счетна, то достаточно доказать, что $\mathfrak{H}$ есть G_δ-множество в $\mathfrak{S}$, или что $\mathfrak{S}-\mathfrak{H}$ есть F_σ-множество в $\mathfrak{S}$.

Имеют место следующие очевидные соотношения эквивалентности:

$$\{\mathfrak{z} \in (\mathfrak{S}-\mathfrak{H})\} \equiv \{(\mathfrak{z} \in \mathfrak{S}) \wedge (\mathfrak{z}_\alpha \prec \mathfrak{z})\}$$

$$\text{и} \quad \{\mathfrak{z}_\alpha \prec \mathfrak{z}\} \equiv \bigvee_n \bigwedge_k \left\{\mathfrak{z}_\alpha^{n+k} < \mathfrak{z}^{n+k}\right\},$$

откуда

$$\mathfrak{S}-\mathfrak{H}=\mathfrak{S} \cap \left(\bigcup_n \bigcap_k \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} \left\{\mathfrak{z}_\alpha^{n+k} < \mathfrak{z}^{n+k}\right\}\right).$$

Так как множество $\mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} \{m < \mathfrak{z}^i\} = \mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} \{m+1 \leqslant \mathfrak{z}^i\}$ замкнуто (при фиксированных m и i), то множество $\mathop{\mathsf{E}}_{\mathfrak{z}} \left\{\mathfrak{z}_\alpha^{n+k} < \mathfrak{z}^{n+k}\right\}$ тоже замкнуто. Отсюда вытекает, что множество $\mathfrak{S}-\mathfrak{H}$ есть F_σ-множество в $\mathfrak{S}$[3]).

IV. Отображения.

Теорема 1. *Свойства быть вполне несовершенным множеством и быть λ-пространством инвариантны относительно*

---

[1]) Это рассуждение принадлежит Серпинскому [50].

[2]) Существование множества такого рода легко следует из теоремы Цермело.

[3]) В этом по существу заключаются рассуждения, которые послужили Лузину [3] для доказательства существования несчетных множеств, обладающих свойством (ii).

любого взаимно однозначного отображения f, для которого обратное отображение f^{-1} непрерывно.

Действительно, если пространство $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ содержит множество C, гомеоморфное множеству $\mathcal{C}$, то пространство $\mathcal{X}$ содержит множество $f^{-1}(C)$, топологически содержащее множество $\mathcal{C}$ (§ 36, V).

С другой стороны, если $\mathcal{X}$ есть λ-пространство и P — счетное подмножество пространства $\mathcal{Y}$, то множество $f^{-1}(P)$, как счетное множество, представляет собой G_δ-множество в пространстве $\mathcal{X}$, и множество $P=ff^{-1}(P)$ есть G_δ-множество, ибо функция f^{-1} непрерывна. Следовательно, $\mathcal{Y}$ есть λ-пространство.

Теорема 2. *Пусть f — произвольная функция, определенная на пространстве $\mathcal{X}$, которое либо вполне несовершенно, либо является λ-пространством; тогда множество $I=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\{y=f(x)\}$ также либо вполне несовершенно, либо является λ-пространством.*

Это утверждение следует из того, что проектирование параллельно оси $\mathcal{Y}$ отображает множество I в пространство $\mathcal{X}$ взаимно однозначным и непрерывным образом.

Теорема 3. *Любое множество Z мощности $\aleph_1$, лежащее в полном сепарабельном пространстве $\mathcal{Y}$, есть взаимно однозначный и непрерывный образ некоторого λ-пространства, лежащего в пространстве $\mathcal{N}\times\mathcal{Y}$, следовательно, множества, обладающего свойством Бэра в узком смысле.*

Действительно, согласно III, 2, пространство $\mathcal{N}$ содержит λ-множество E мощности $\aleph_1$. Пусть f — взаимно однозначное отображение множества E на множество Z. Множество $I=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\{y=f(x)\}$ является λ-множеством (согласно теореме 2), и множество Z представляет собой взаимно однозначный непрерывный образ этого множества.

Теорема 4. *Произвольное отображение f пространства заведомо первой категории обладает свойством Бэра в узком смысле.*

Более того, *пусть $A\subset\mathcal{X}$; тогда множество D точек разрыва сужения $f|A$ есть множество первой категории в A*[1]).

Действительно, в множестве A существует счетное множество E, такое, что множество $A-E$ плотно в себе (§ 23, V). Кроме того, множество D не содержит никакой изолированной точки множества A (§ 13, III), поэтому $D\subset(A-E)\cup(E\cap A^d)$.

Так как множество $E\cap A^d$ образовано последовательностью точек накопления, оно представляет собой множество первой катего-

[1]) См. замечание 3, § 31, X.

рии в множестве A; так как, по предположению, множество $A - E$ первой категории в множестве A, то таким же является множество D.

Если принять гипотезу континуума, то можно доказать следующие утверждения.

Теорема 5. *Существуют λ-пространства любой конечной или бесконечной размерности*[1]).

Действительно, согласно § 27, IX, для каждого λ-пространства $\mathcal{X}$ мощности $\mathfrak{c}$ существует пространство $\mathcal{X}^*$ заданной заранее размерности, взаимно однозначным и непрерывным образом которого является пространство $\mathcal{X}$. Согласно теореме 1, пространство $\mathcal{X}^*$ является λ-пространством.

Замечания. 1. *Множество* $I = \underset{x, y}{\mathsf{E}} \{y = f(x)\}$ *может обладать свойством Бэра в узком смысле, в то время как функция f может не обладать этим свойством даже в широком смысле*[2]).

Это утверждение следует из теоремы 2 на основании гипотезы континуума. Действительно, пусть A — множество, не обладающее свойством Бэра, в интервале $\mathcal{J}$, E — несчетное λ-пространство, F — замкнутое подмножество множества E, такое, что множества F и $E - F$ несчетны, и, наконец, f — взаимно однозначное отображение, такое, что $f(\mathcal{J}) = E$ и $f(A) = E$.

2. *Ни свойство Бэра в узком смысле, ни свойство быть λ-множеством не инвариантны относительно взаимно однозначных непрерывных отображений.*

Это утверждение следует из теоремы 3 в силу гипотезы континуума, ибо если бы множество A не обладало свойством Бэра (в широком смысле, см. § 11, IVa), то существовало бы λ-множество, взаимно однозначным и непрерывным образом которого было бы множество A.

***V. Свойство λ'.**

Определение[3]). Подмножество E пространства $\mathcal{X}$ *обладает свойством* λ', если, каково бы ни было счетное множество $X \subset \mathcal{X}$, множество $E \cup X$ является λ-пространством. Иначе говоря, если любое счетное множество $X^* \subset E \cup X$ есть G_δ-множество относительно множества $E \cup X$.

Теорема 1. *Теорема* III, 2 *остается верной, если свойство быть λ-пространством заменить свойством λ'.*

Действительно, множества Q_α в формуле III (1) можно подчинить дополнительному условию (§ 39, II, следствие 4, замечание):

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha < \Omega} Q_\alpha.$$

---

1) См. Мазуркевич и Шпильрайн-Марчевский [1].

2) См. § 32, III, замечание 1. См. также Серпинский [34].

3) См. Серпинский [56].

Тогда соответствующее множество E будет обладать свойством λ' [1]).

В самом деле, так как множество $X^* \subset E \cup X$ счетно, то существует такое $\alpha < \Omega$, что $X^* \subset Q_\alpha$. Тогда $X^* \subset Q_\alpha \cap (E \cup X)$, откуда

$$X^* = Q_\alpha \cap (E \cup X) \cap X^* = (E \cup X) \cap \{Q_\alpha - [Q_\alpha \cap (E \cup X) - X^*]\}.$$

Так как множество $Q_\alpha \cap E$ счетно, так же как и множество $Q_\alpha \cap (E \cup X)$, то множество в фигурных скобках есть G_δ-множество. Следовательно, множество X^* является G_δ-множеством относительно множества $E \cup X$.

Теорема 2. *Для того чтобы подмножество E пространства $\mathcal{X}$ обладало свойством λ', необходимо и достаточно, чтобы для каждого счетного множества $D \subset \mathcal{X}$ существовало G_δ-множество Q, такое, что $Q \cap E \subset D \subset Q$.*

Действительно, если множество E обладает свойством λ', то множество $E \cup D$ является λ-пространством. Тогда $D = Q \cap (E \cup D)$, где Q—некоторое подходящее G_δ-множество. Следовательно, $Q \cap E \subset D \subset Q$.

Обратно, пусть D и X — два счетных множества, а Q — множество типа G_δ, такие, что

(1) $$D \subset E \cup X \quad \text{и} \quad Q \cap E \subset D \subset Q.$$

Положим

$$Q^* = (Q - X) \cup D = Q - (X - D).$$

Тогда Q^* есть G_δ-множество и

$$Q^* \cap (E \cup X) = (Q - X) \cap (E \cup X) \cup (D \cap (E \cup X)) = D,$$

поскольку

$$(Q - X) \cap (E \cup X) \subset Q \cap E \subset D \quad \text{и} \quad D \cap (E \cup X) = D,$$

согласно включениям (1). Равенство $D = Q^* \cap (E \cup X)$ показывает, что множество $E \cup X$ является λ-пространством, следовательно, множество E обладает свойством λ'.

Теорема 3. *Свойство λ' счетно-аддитивно.*

Пусть $E_1, E_2, \ldots$ — (конечная или бесконечная) последовательность подмножеств пространства $\mathcal{X}$, обладающих свойством λ'. Пусть D — счетное подмножество пространства $\mathcal{X}$. Необходимо определить G_δ-множество Q, такое, что $Q \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots) \subset D \subset Q$.

По предположению, существует последовательность $Q_1, Q_2, \ldots$ G_δ-множеств, таких, что $Q_n \cap E_n \subset D \subset Q_n$. Положим $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots$; тогда

$$Q \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots) \subset (Q_1 \cap E_1) \cup (Q_2 \cap E_2) \cup \ldots \subset D \subset Q.$$

Замечания. Свойство быть λ-множеством не аддитивно [2]). Более того: *если к λ-множеству добавить счетное множество, то полученное множество может не быть λ-множеством.*

Чтобы убедится в этом, определим множество $\mathfrak{E}$ (п. III, замечание) следующим образом. Пусть $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \gamma)$ — трансфинитная последовательность, образованная всеми иррациональными числами (рассматриваемыми как последовательности положительных чисел), где γ означает наименьший вполне упорядоченный тип, соответствующий мощности $\mathfrak{c}$. Положим $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{y}_0$. Пусть $\alpha > 0$; предположим, что при $\xi < \alpha$ числа $\mathfrak{z}_\xi$ определены, и пусть $\mathfrak{z}_\alpha$ — первый член последовательности $\{\mathfrak{y}_\beta\}$, $\beta < \gamma$, удовлетворяющий неравенству $\mathfrak{z}_\xi < \mathfrak{z}_\alpha$ при любом $\xi < \alpha$, разумеется, при условии, что такой член существует. В том случае, если ни одного такого члена не существует, множество $\mathfrak{E}$ имеет тип α.

---

[1]) Серпинский [61].

[2]) См. Ротбергер [2].

Можно доказать[1]), что таким образом определенное множество $\mathfrak{C}$ является λ-пространством, тогда как если добавить к нему множество рациональных чисел, получается не λ-пространство.

Следовательно, множество $\mathfrak{C}$ представляет собой в то же время *пример λ-множества, не обладающего свойством λ'*. Существование примеров такого рода вытекает также из топологической инвариантности свойства быть λ-множеством, ибо *существуют множества, гомеоморфные множествам, обладающим свойством λ', но сами им не обладающие*[2]),

Добавим, наконец, что в силу II, 2, множество $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{R}$ *заведомо первой категории, но не является λ-пространством*[3]).

Теорема 4. *Если любое несчетное подмножество множества $E \subset \mathcal{X}$ имеет бесконечную размерность*[4]), *то множество E обладает свойством λ'*[5]).

Действительно, если D — произвольное счетное множество, то оно содержится в 0-мерном G_δ-множестве; пусть это будет множество Q. Положим

$$Q^* = Q - (Q \cap E - D).$$

Так как $\dim Q \cap E = 0$, то, по предположению, $\overline{\overline{Q \cap E}} \leqslant \aleph_0$. Следовательно, Q^* есть G_δ-множество. Так как $D \subset Q$, то

$$Q^* = (Q - E) \cup (Q \cap D) = (Q - E) \cup D \supset D \quad \text{и} \quad Q^* \cap E = Q^* \cap D \subset D.$$

Отсюда, согласно теореме 2, следует, что множество E обладает свойством λ'.

VI. σ-пространства. Так мы назовем любое пространство, каждое *F_σ-подмножество которого есть в то же время G_δ-множество*[6]).

Существование несчетных σ-пространств (содержащихся в пространстве $\mathcal{N}$) вытекает из гипотезы континуума. Доказательство этого факта аналогично доказательству существования λ-пространств. Предположим сначала, в силу гипотезы континуума, что семейство всех G_δ-множеств меры нуль расположено в трансфинитную последовательность типа Ω:

$$(1) \qquad K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_\omega,\ K_{\omega+1},\ \ldots.$$

Среди разностей $K_\alpha - \bigcup_{\xi<\alpha} K_\xi$ существует несчетное множество непустых разностей. В самом деле, в противном случае существовал бы индекс α, начиная с которого имело бы место равенство

$$\bigcup_{\xi<\alpha} K_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha+1} K_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha+2} K_\xi = \ldots.$$

---

[1]) Серпинский [59].

[2]) Серпинский [60].

[3]) Существование множеств, обладающих этим свойством, было установлено Н. Лузиным [10] с помощью гипотезы континуума, а затем Ротбергером [2] без использования этой гипотезы.

[4]) Что касается существования множеств E такого рода, см. § 28, IV, замечание 2.

[5]) См. Мазуркевич и Шпильрайн-Марчевский [1].

[6]) См. Серпинский [17], Шпильрайн-Марчевский [3].

Так как каждое G_δ-множество, состоящее из одной точки, принадлежит последовательности (1), то $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} K_\xi = \mathcal{N}$, что невозможно, поскольку объединение $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} K_\xi$ имеет меру нуль.

Любое множество E, которое содержит по одной точке из каждого непустого множества $K_\alpha - \bigcup\limits_{\xi<\alpha} K_\xi$, есть несчетное σ-множество.

Сначала докажем, что *любое множество H, принадлежащее множеству E и измеримое в смысле Лебега, счетно.*

Действительно, так как множество $E \cap K_\alpha$ счетно, каково бы ни было α, то не существует никакого несчетного G_δ-множества меры нуль, которое принадлежало бы множеству E. Следовательно, множество E имеет внутреннюю меру нуль, и, следовательно, множество H имеет меру нуль. Поэтому существует множество K_α, такое, что $H \subset K_\alpha$, откуда $H \subset E \cap K_\alpha$. Так как множество $E \cap K_\alpha$ счетно, то множество H также счетно.

Пусть теперь B — произвольное F_σ-множество, лежащее в интервале $\mathcal{J} = (0, 1)$. Докажем, что $B \cap E$ есть G_δ-множество относительно множества E. Положим $\mathcal{J} - B = U \cup V$, где U есть F_σ-множество и V — множество меры нуль. Тогда $E - B = (U \cap E) \cup (V \cap E)$. Так как $V \cap E$ — множество меры нуль, то оно счетно, следовательно, $E - B$ есть F_σ-множество в множестве E, а $B \cap E$ есть G_δ-множество в множестве E, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Во всяком σ-пространстве любое борелевское множество есть F_σ- и G_δ-множество одновременно.*

Докажем, что в σ-пространстве объединение и пересечение бесконечной последовательности двусторонних множеств класса 1 являются двусторонними множествами класса 1. Итак, пусть $X_1, X_2, \ldots$ — множества типа F_σ и G_δ, тогда объединение $\bigcup\limits_i X_i$ есть F_σ-множество, и поскольку речь идет о σ-пространстве, то оно является G_δ-множеством. Пересечение $\bigcap\limits_i X_i$ есть G_δ-множество, т. е. дополнение к F_σ-множеству, следовательно, и к G_δ-множеству; значит, оно является F_σ-множеством.

Теорема 2. *Любое σ-пространство конечной размерности нульмерно.*

Пусть $\mathcal{X}$ есть σ-пространство размерности $n > 0$, и пусть S есть F_σ-множество, такое, что (см. § 27, I, 2г)

$$\dim S \leqslant n-1 \quad \text{и} \quad \dim(\mathcal{X} - S) = 0.$$

Как G_δ-множество, множество $\mathcal{X} - S$, согласно теореме 1, есть F_σ-множество, и, следовательно, пространство $\mathcal{X}$ разлагается в объединение двух F_σ-множеств S и $\mathcal{X} - S$ размерности $\leqslant n-1$. Отсюда следует, в силу § 27, I, 2, что $\dim \mathscr{X} \leqslant n-1$, а это приводит к противоречию.

Сопоставляя теорему 2 с теоремой IV, 5, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Существуют λ-пространства, которые не являются σ-пространствами.*

Очевидно, что *любое σ-пространство является λ-пространством.*

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 4. *Любая B-измеримая функция, определенная на σ-пространстве, есть функция первого класса.*

Замечание. Очевидно, что множество E, служившее нам для доказательства существования несчетных σ-пространств, неизмеримо в смысле Лебега. Следовательно, *существуют неизмеримые множества, обладающие свойством Бэра в узком смысле* (так как этим свойством обладает каждое λ-пространство и, следовательно, каждое σ-пространство).

Более общим образом, любое множество, каждое измеримое в смысле Лебега подмножество которого счетно, обладает свойством Бэра в узком смысле [1]).

Добавим, что обратная задача, а именно проблема существования измеримого множества (меры 0), не обладающего свойством Бэра (даже в широком смысле), легко разрешима без использования гипотезы континуума.

VII. ν-пространства, сосредоточенные пространства, свойство C. ν-пространством мы называем любое пространство, каждое нигде не плотное подмножество которого счетно (Лузин [1]).

Существование несчетных ν-пространств (принадлежащих пространству $\mathscr{N}$) вытекает из гипотезы континуума. Установим сначала существование несчетного множества $E \subset \mathscr{N}$, обладающего следующим свойством (называемым *свойством* L):

Каково бы ни было нигде не плотное подмножество N *интервала* $\mathscr{J}$, $\overline{\overline{N \cap E}} \leqslant \aleph_0$.

Предположим, что замкнутые нигде не плотные подмножества интервала $\mathscr{J}$ расположены в трансфинитную последовательность типа Ω:

$$F_0, F_1, \ldots, F_\omega, F_{\omega+1}, \ldots .$$

Как полное пространство, интервал $\mathscr{J}$ не является множеством первой категории. Отсюда (как и в доказательстве п. VI) вытекает существование несчетного множества непустых разностей $F_\alpha - \bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi$.

[1]) См. Сакс [3], Лузин [6].

Пусть E_0 — множество, содержащее по одной точке из каждой из этих разностей. Положим $E = E_0 \cap \mathscr{N}$. Тогда $\overline{\overline{E}} > \aleph_0$. Кроме того, так как N — нигде не плотное подмножество интервала $\mathscr{J}$, то существует такой индекс α, что $F_\alpha = \overline{N}$. Так как $\overline{\overline{E_0 \cap F_\alpha}} \leqslant \aleph_0$ и $N \cap E \subset E_0 \cap F_\alpha$, то $\overline{\overline{N \cap E}} \leqslant \aleph_0$.

Отсюда следует, что E — несчетное ν-пространство, так как очевидно, что свойство ν вытекает из свойства L.

Замечание. Обратная импликация не имеет места (как это видно при рассмотрении подмножеств множества $\mathscr{C}$, обладающих свойством ν). Однако можно доказать [1]), что *любое (метрическое сепарабельное) ν-пространство гомеоморфно множеству, обладающему свойством* L.

Теорема 1. *Любое ν-пространство вполне несовершенно.*

Это следует из того, что канторово множество $\mathscr{C}$ содержит совершенное подмножество, нигде не плотное в $\mathscr{C}$.

Теорема 2. *Любое подмножество ν-пространства, обладающее свойством Бэра, представляет собой объединение $\boldsymbol{G}_\delta$-множества и счетного множества.*

Это предложение следует из того, что это подмножество есть объединение G_δ-множества и множества первой категории (§ 11, IV, 2), а последнее счетно по предположению.

Отсюда следует

Теорема 3. *Любая функция, обладающая свойством Бэра, определенная на ν-пространстве, есть функция второго класса* [2]).

Определение. Пространство $\mathscr{X}$ называется *сосредоточенным вокруг подмножества $A \subset \mathscr{X}$, если, какова бы ни была окрестность G множества A, множество $\mathscr{X} - G$ счетно* [3]).

Теорема 4. *Для того чтобы пространство $\mathscr{X}$ было ν-пространством, необходимо и достаточно, чтобы оно было сосредоточено вокруг каждого плотного в нем множества, или: чтобы оно было сосредоточено вокруг каждого плотного счетного множества* [4]).

Действительно, пусть $\mathscr{X}$ есть ν-пространство. Пусть $\overline{A} = \mathscr{X}$ и E — окрестность множества A. Следовательно, если G — внутренность множества E, то $A \subset G$, откуда $\overline{G} = \mathscr{X}$; это доказывает, что

---

[1]) См. Серпинский и Куратовский [4].

[2]) Попруженко [1].

[3]) Согласно С. Безиковичу [1], подмножество E пространства $\mathscr{X}$ сосредоточено относительно множества $A \subset \mathscr{X}$, если, какова бы ни была окрестность G множества A, множество $E - G$ счетно. Легко показать, что если множество E сосредоточено относительно множества A, то и множество $E \cup A$ сосредоточено относительно множества A.

[4]) Шпильрайн-Марчевский [8].

множество $\mathscr{X}-G$ нигде не плотно, а следовательно, счетно. Так как $\mathscr{X}-E\subset\mathscr{X}-G$, то множество $\mathscr{X}-E$ счетно.

Следовательно, условие необходимо. Для доказательства достаточности допустим, что множество N нигде не плотно и что A — счетное подмножество множества $\mathscr{X}-\overline{N}$, плотное в множестве $\mathscr{X}-\overline{N}$. Тогда $\overline{A}=\overline{\mathscr{X}-\overline{N}}=\mathscr{X}$. Так как множество $\mathscr{X}-\overline{N}$ является окрестностью множества A, то, по условию теоремы, его дополнение, т. е. множество $\overline{N}$, счетно. Следовательно, множество N счетно.

Теорема 5. *Любое пространство $\mathscr{X}$, сосредоточенное вокруг счетного множества A, а следовательно, и любое ν-пространство, обладает следующим свойством, называемым свойством* C″:

если каждой точке $x\in\mathscr{X}$ соответствует последовательность открытых множеств $G_{x,n}$, где $n=1, 2, \ldots$ и где $x\in G_{x,n}$, то существует счетная последовательность $x_1, x_2, \ldots$, такая, что

$$(1)\qquad \mathscr{X}=G_{x_1,1}\cup G_{x_2,2}\cup\ldots\text{[1]}.$$

Действительно, положим $A=[x_1, x_3, x_5, \ldots]$. Так как множество $G_{x_1,1}\cup G_{x_3,3}\cup\ldots$ является окрестностью множества A и пространство $\mathscr{X}$ сосредоточено вокруг множества A, то множество $\mathscr{X}-(G_{x_1,1}\cup G_{x_3,3}\cup\ldots)$ счетно. Расположим его в последовательность $x_2, x_4, x_6, \ldots$ (можно допустить, что это множество, так же как и множество A, не пусто). Последовательность $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ и есть искомая последовательность.

Теорема 6. *Свойство* C″ *инвариантно относительно непрерывных отображений.*

Действительно, пусть $\mathscr{X}$ — пространство, обладающее стойством C″, f — непрерывное отображение пространства $\mathscr{X}$ в пространстве $\mathscr{Y}$ и $H_{y,n}$ — система открытых множеств в пространстве $\mathscr{Y}$, такая, что $y\in H_{y,n}$. Определим последовательность точек $y_1, y_2, \ldots$, такую, что

$$\mathscr{Y}=H_{y_1,1}\cup H_{y_2,2}\cup\ldots.$$

Так как функция f непрерывна, то множества $f^{-1}(H_{y,n})$ открыты. Положим $G_{x,n}=f^{-1}(H_{f(x),n})$. Так как $f(x)\in H_{f(x),n}$, то $x\in G_{x,n}$. Следовательно, существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$, удовлетворяюшая равенству (1), откуда

$$\mathscr{Y}=H_{f(x_1),1}\cup H_{f(x_2),2}\cup\ldots.$$

---

[1]) Ротбергер [1].

Теорема 7. *Из свойства* C'' *вытекает следующее свойство* C[1]):

Для любой последовательности $\{\lambda_n\}$ *положительных чисел существует последовательность множеств* $\{A_n\}$, *такая, что*

$$(2) \qquad \mathscr{X} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad \delta(A_n) < \lambda_n.$$

Следовательно, *любое подмножество вещественной прямой, обладающее свойством* C'', *имеет лебеговскую меру нуль; поэтому любой непрерывный образ* ($\subset\mathscr{E}$) ν-*множества имеет лебеговскую меру нуль* (согласно теоремам 5 и 6)[2]).

Действительно, пусть $G_{x,n}$ — открытый шар с центром в точке x диаметра $< \lambda_n$. По предположению, существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$, удовлетворяющая равенству (1). Если положить $A_n = G_{x_n, n}$, то $\delta(A_n) < \lambda_n$, откуда следует требуемый вывод.

Замечание. Последняя часть теоремы 7 остается верной, если непрерывные отображения заменить *отображениями, обладающими свойством Бэра*. Пусть f — функция, обладающая свойством Бэра, тогда существует множество A, такое, что множество $\mathscr{X} - A$ первой категории и, следовательно, счетно, и что сужение $f|A$ непрерывно (§ 32, II). Поэтому, если множество A обладает свойством ν, то множество $f(A)$ имеет меру нуль. Следовательно, множество $f(\mathscr{X})$ также имеет меру нуль.

Это утверждение легко получить также с помощью теоремы из § 32, V.

Теорема 8. *Любое пространство* $\mathscr{X}$, *обладающее свойством* C, *и, следовательно, любой непрерывный образ* ν-*пространства имеет размерность* 0. (Шпильрайн-Марчевский [7].)

Пусть x_0 — некоторая фиксированная точка пространства $\mathscr{X}$. Положим $f(x) = |x - x_0|$. Докажем сначала, что множество $f(\mathscr{X})$ обладает свойством C. Действительно, пусть $\{\lambda_n\}$ — данная последовательность, и пусть $\{A_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (2). Тогда

$$f(\mathscr{X}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \ldots \quad \text{и} \quad \delta[f(A_n)] \leqslant \delta(A_n),$$

ибо

$$|f(x) - f(x')| = ||x - x_0| - |x' - x_0|| \leqslant |x - x'|.$$

[1]) Проблема существования несчетных множеств, обладающих свойством C, восходит к Борелю. Эти множества совпадают с множествами, которые Борель [3] называет „множествами, имеющими асимптотическую меру, низшую по отношению к любой заданной последовательности". Неизвестно, можно ли установить существование (несчетных) множеств, обладающих свойством C, не используя гипотезу континуума. Многочисленные библиографические ссылки, касающиеся свойства C, можно найти в статье Серпинского [57].

[2]) См. Серпинский [33]. Обобщения этой теоремы на абстрактные меры принадлежат Попруженко и Шпильрайну-Марчевскому [1]. См. также п. IX.

Как множество, обладающее свойством C, $f(\mathscr{X})$ представляет собой граничное множество в пространстве $\mathscr{E}$ (даже меры 0). Следовательно, существует сколь угодно малое число $\eta > 0$, не являющееся значением функции f, т. е. не существует никакой точки x, для которой выполнялось бы равенство $|x - x_0| = \eta$. Поэтому множество $\underset{x}{\mathrm{E}}[|x - x_0| < \eta]$ открыто-замкнуто, содержит точку x_0 и имеет диаметр $\leqslant 2\eta$. Этим доказано, что $\dim_{x_0} \mathscr{X} = 0$.

Теорема 9. *Любое пространство $\mathscr{X}$, обладающее свойством C, и, следовательно, любой непрерывный образ ν-пространства, вполне несовершенно.* (Шпильрайн-Марчевский [2].)

Действительно, предположим, что пространство $\mathscr{X}$ содержит множество P, гомеоморфное канторову множеству $\mathscr{C}$. Пусть f — непрерывное отображение множества P на некоторое множество положительной меры, например, на интервал $\mathscr{J}$ (§ 16, II, следствие 6a). Можно считать, что

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{mes}[f(P)] = 1.$$

Так как функция f равномерно непрерывна, то для любого n существует $\lambda_n > 0$, такое, что из неравенства $|x - x'| < \lambda_n$ вытекает неравенство $|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2^{n+1}}$. Далее, так как множество P обладает свойством C (как подмножество пространства $\mathscr{X}$), то

$$P = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \qquad A_n = \bar{A}_n, \qquad \delta(A_n) < \lambda_n,$$

откуда

$$f(P) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \ldots, \qquad \operatorname{mes}[f(A_n)] \leqslant \delta[f(A_n)] \leqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$

и тогда

$$\operatorname{mes}[f(P)] \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2},$$

вопреки равенству (3).

VIII. Связь со свойством Бэра в узком смысле.

Теорема 1. *Множество E, обладающее свойством ν и расположенное в полном сепарабельном пространстве, обладает свойством Бэра в узком смысле только в том случае, если оно счетно.*

Действительно, пусть E обладает свойством Бэра относительно множества $\bar{E}$, тогда множество E представляет собой объединение G_δ-множества и множества P первой категории в множестве $\bar{E}$ (§ 11, IV, 2), следовательно, в множестве E (§ 10, IV, 2), поэтому P счетно. Поскольку E вполне несовершенно (VII, 1), всякое G_δ-множество в нем счетно. Как объединение двух счетных множеств, множество E счетно.

Теорема 2. *Существует взаимно однозначное и непрерывное отображение $f: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, отображающее любое множество, обладающее свойством* L, *на множество заведомо первой категории.* (Лузин [10].)

Пусть, в соответствии с § 37, I (и) и (к), $f: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ — взаимно однозначное непрерывное отображение, преобразующее любое открытое множество (в пространстве $\mathcal{N}$) на множество первой категории в себе. Пусть E — подмножество пространства $\mathcal{N}$, обладающее свойством L, P — совершенное подмножество пространства $\mathcal{N}$. На основании II (ii) достаточно доказать, что множество $P \cap f(E)$ первой категории в множестве P.

Положим $f^{-1}(P) = Q$. Тогда (см. § 3, III (13))

$$P \cap f(E) = f\left[E \cap f^{-1}(P)\right] = f(E \cap Q).$$

Пусть $\operatorname{Int}(Q) = G$. Так как функция f непрерывна, то множество Q замкнуто и, следовательно, множество $Q - G$ нигде не плотно; поэтому

$$\overline{\overline{(E \cap Q) - G}} \leqslant \aleph_0, \quad \text{откуда} \quad \overline{\overline{f[(E \cap Q) - G]}} \leqslant \aleph_0;$$

следовательно, множество $f[(E \cap Q) - G]$ первой категории в множестве P. Тогда и множество $f(G)$ также первой категории в множестве P. Действительно, поскольку множество G открыто, множество $f(G)$ первой категории в себе, следовательно, и в множестве P, которое содержит его, в силу соотношения $f(G) \subset f(Q) = P$. Отсюда вытекает, что множество $f(E \cap G)$ первой категории в множестве P, а значит, таким же свойством обладает и множество

$$P \cap f(E) = f(E \cap Q) = f(E \cap G) \cup f(E \cap Q - G).$$

Из теоремы 2 вытекают следующие интересные следствия[1]) (в силу гипотезы континуума, из которой следует существование несчетных множеств, обладающих свойством L).

Теорема 3. *Свойство Бэра в узком смысле не инвариантно относительно прямого умножения на ось.*

А именно: *пусть E — несчетное множество, обладающее свойством* L, *а f — функция, рассмотренная в теореме* 2; *тогда множество $\mathcal{N} \times f(E)$ не обладает свойством Бэра в узком смысле.*

Действительно, согласно теореме 1, множество E не обладает свойством Бэра в узком смысле. Следовательно (см. § 35, IV, 2), и гомеоморфное ему множество (см. § 15, V, 1)

$$Z = \underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\left[(y = f(x)) \wedge (x \in E)\right]$$

[1]) Серпинский [53]. См. замечание, § 28, IV.

не обладает этим свойством. Из соотношения эквивалентности

$$\{[y=f(x)] \wedge [y \in f(E)]\} \equiv \{[y=f(x)] \wedge (x \in E)\}$$

следует, что

$$Z = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\, y} [y=f(x)] \wedge [\mathcal{N} \times f(E)].$$

Так как множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\, y} [y=f(x)]$ замкнуто и множесто Z не обладает свойством Бэра в узком смысле, то и множество $\mathcal{N} \times f(E)$ также не обладает этим свойством.

Теорема 4. *Существует функция, определенная на пространстве $\mathcal{N}$, обладающая свойством Бэра в узком смысле, график которой не обладает этим свойством.*

Используя введенные выше обозначения, положим $K=f(E)$ и

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{при} \quad y \in K, \\ -1 & \text{при} \quad y \in \mathcal{N} - K. \end{cases}$$

Так как множество K первой категории в любом совершенном множестве, то функция g непрерывна на любом совершенном множестве с точностью до множества первой категории на этом множестве, т. е. функция g обладает свойством Бэра в узком смысле.

С другой стороны,

$$Z = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\, y} [x=g(y)] - W, \quad \text{где} \quad W = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\, y} [(x=-1) \wedge (y \in \mathcal{N} - K)].$$

Множество W обладает свойством Бэра в узком смысле, так как оно гомеоморфно множеству $\mathcal{N} - K$ (множество K, так же как и множество $\mathcal{N} - K$, обладают им). Поскольку множество Z не обладает этим свойством, множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\, y} [x=g(y)]$ тем более не обладает им.

Теорема 5. *Существует функция h одного переменного, обладающая свойством Бэра в узком смысле, такая, что если положить $g(x, y) = h(y)$, то функция g как функция двух переменных не обладает этим свойством.*

Достаточно в качестве h взять характеристическую функцию множества K, а в качестве g — характеристическую функцию множества $\mathcal{N} \times K$.

Теорема 6. *Существует множество заведомо первой категории, не являющееся λ-пространством.*

Таковым является множество K. Допустим противное, тогда множество E тоже было бы λ-пространством (в силу IV, 1). Но в таком случае множество E обладало бы одновременно свойством ν и свойством Бэра в узком смысле (согласно III, 1), что несовместимо с теоремой 1.

IX. Связь ν-пространств с общей теорией множеств.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное ν-пространство и m — некоторая функция („мера“), которая каждому борелевскому множеству $X \subset \mathscr{X}$ ставит в соответствие число $m(X) \geqslant 0$ следующим образом:*

(i) *$m(X) = 0$, если X состоит из одного элемента;*

(ii) *$m\left(\bigcup\limits_i X_i\right) = \sum m(X_i)$, если $X_i \cap X_j = 0$ при $i \neq j$ (счетная аддитивность).*

В этих условиях мы имеем $m(\mathscr{X}) = 0$ [1].

Покажем (не используя свойства ν), что каждая точка имеет открытую окрестность произвольно малой меры. Действительно, пусть $x_0 \in \mathscr{X}$ и $\varepsilon > 0$; обозначим через S_n открытый шар с центром x_0 радиусом, равным $\frac{1}{n}$. Положим $S_0 = \mathscr{X}$ и $D_n = S_n - S_{n+1}$. Тогда

$$S_n = x_0 \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} D_{n+k}, \qquad D_n \cap D_m = 0 \quad \text{для} \quad n \neq m.$$

Следовательно, $m(S_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} m(D_{n+k})$. В частности,

$$m(\mathscr{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} m(D_n),$$

откуда следует существование n, такого, что $m(D_n) + m(D_{n+1}) + \ldots < \varepsilon$, т. е. что $m(S_n) < \varepsilon$.

Далее, пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность, всюду плотная в пространстве $\mathscr{X}$. Пусть A_k — открытая окрестность точки p_k, такая, что $m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Пусть

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup [A_3 - (A_1 \cup A_2)] \cup \ldots,$$

тогда

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2 - A_1) + m[A_3 - (A_1 \cup A_2)] + \ldots \leqslant \\ \leqslant m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + \ldots \leqslant \varepsilon.$$

Так как множество $\mathscr{X} - A$ нигде не плотно, а потому счетно, то $m(\mathscr{X} - A) = 0$, откуда $m(\mathscr{X}) = m(A)$, следовательно, $m(\mathscr{X}) \leqslant \varepsilon$. Так как число ε произвольно, то $m(\mathscr{X}) = 0$.

Из сопоставления предыдущей теоремы с теоремой существования ν-пространств мощности континуума вытекает *отрицательное решение обобщенной проблемы меры*, а именно:

---

[1]) См. Шпильрайн-Марчевский [5], стр. 307. Предположение $m(X) \geqslant 0$ несущественно.

Теорема 2. *Не существует никакой неотрицательной функции, за исключением тождественно равной нулю, удовлетворяющей условиям* (i) *и* (ii) *и определенной на каждом подмножестве интервала* $\mathcal{J}$ [1]).

С одной стороны, последнее утверждение, как теорема общей теории множеств, имеет место для каждого пространства мощности континуума, если только оно имеет место хотя бы для одного из таких пространств; с другой стороны, существуют пространства мощности $\mathfrak{c}$, для которых выполняется это предложение (а именно, ν-пространства).

Замечание. Предыдущее рассуждение позволяет вывести из топологической предпосылки (существования ν-пространства мощности $\mathfrak{c}$) некоторую теорему общей теории множеств. Обратно, можно доказать (не используя гипотезу континуума), что существование ν-пространства мощности $\mathfrak{c}$ эквивалентно одной теореме общей теории множеств. (См. Куратовский [26].)

Подобно этому, из существования несчетных множеств, обладающих свойством ν, можно вывести следующие две замечательные теоремы [2]).

Существует непрерывная функция f, *определенная на множестве мощности* $\mathfrak{c}$, *которая не является равномерно непрерывной ни на каком несчетном множестве.*

Существует сходящаяся последовательность функций f_1, f_2, ..., *определенных на пространстве* $\mathscr{E}$, *которая не является равномерно сходящейся ни на каком несчетном множестве.*

---

[1]) Теорема Банаха — Куратовского [1]. См. также Улам [1], стр. 140. Шпильрайн-Марчевский [5] отметил, что из существования несчетных ν-пространств вытекает решение обобщенной проблемы меры.

[2]) См. Серпинский [52]. Эти две теоремы доказаны с использованием гипотезы континуума; на самом деле они эквивалентны. Добавим, что вторая теорема была подсказана теоремой Егорова, согласно которой любая сходящаяся последовательность измеримых функций равномерно сходится, если пренебречь множеством сколь угодно малой (внешней) меры.

ДОБАВЛЕНИЕ

I. Некоторые приложения топологии к математической логике

А. Мостовский

1. Классификация определимых множеств. В логических исследованиях часто бывает важно определить структуру некоторых множеств, составленных из положительных целых чисел или из объектов, которые могут быть перечислены с помощью положительных чисел. Примером может служить проблема разрешимости в системе аксиом (S), эквивалентная проблеме: является ли множество теорем системы (S) рекурсивным, т. е. существует ли алгоритм, позволяющий автоматически проверить, является ли некоторое выражение теоремой системы (S). Аналогичным образом, проблема, является ли множество выражений E аксиоматизируемым, эквивалентна проблеме: является ли это множество *рекурсивно перечислимым*, т. е. существуют ли в множестве E конечное число выражений $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_m$ (аксиом) и конечное число финитных операций $O_1, \ldots, O_n$ (правил), таких, что множество E совпадает с множеством выражений, которое получается посредством применения произвольного числа операций $O_1, \ldots, O_n$ в произвольном порядке к выражениям $E_1, \ldots, E_m$.

Для исследований такого рода построена классификация множеств положительных целых чисел, которая напоминает классификацию проективных множеств (см. Клини [1], Мостовский [1]).

Согласно этой классификации, низший класс P_0 образуется рекурсивными множествами, а высшие классы получаются с помощью проекций и дополнений точно так же, как в теории проективных множеств (см. § 34, I). Все полученные таким образом множества называются *определимыми.*

В классификации, которую мы только что описали, рекурсивно перечислимые множества соответствуют аналитическим множествам. Точно так же как в теории аналитических множеств, можно доказать, что класс P_1 рекурсивно перечислимых множеств отличен от класса P_0. Тем не менее аналогия между классом P_1 и классом аналитических множеств не является полной. Например, первая теорема отделимости (§ 39, III) не верна для множеств P_1 (см. Клини [2]).

Укажем на некоторые приложения классификации определимых множеств. Можно доказать [1]), что теорема Гёделя о неполном характере арифметики в принципе эквивалентна неравенству $P_0 \neq P_1$.

Рекурсивно перечислимые рекурсивно несепарабельные множества используются для построения многочисленных контрпримеров, а также для того, чтобы получить усиление упомянутой теоремы Гёделя [2]).

Формальные системы арифметики или теории множеств сравниваются с помощью определения места, занимаемого в классификации определимых множеств множеством истинных предложений этих систем [3]).

Классификацию определимых множеств можно трансфинитно продолжить. (См. Дэвис [1], Клини [3], Мостовский [3].)

Рассматриваются также множества положительных целых чисел, определенные с помощью выражений, содержащих переменные более высокого типа. (См. Клини [3].) Очевидно, что эти множества выходят за пределы описанной выше классификации.

Таким образом, мы видим, что хотя теория проективных множеств не находит прямого приложения в теории определимых множеств, она может служить для этой теории моделью, согласно которой строится большая часть рассуждений. Недавно были отмечены также аналогии между теорией борелевских и проективных множеств, с одной стороны, и теорией определимых элементарным или неэлементарным путем множеств, с другой стороны. См. Адисон [1].

2. Пространство идеалов и доказательство полноты логики предикатов. Одной из наиболее важных теорем математической логики является *теорема Гёделя о полноте*, согласно которой любая непротиворечивая система (U) аксиом первого порядка (т. е. аксиом, все переменные которых имеют тип индивидуумов) допускает по крайней мере одну модель.

Тот факт, что существует даже счетная модель (например, модель, элементами которой являются положительные целые числа). известен под названием *теоремы Лёвенгейма — Сколема*. Любая модель системы (U), образованная положительными целыми числами, определяет разбиение выражений (без свободных переменных) на два класса: истинные выражения и ложные выражения в данной модели. Если расположить переменные, фигурирующие в рассматриваемых выражениях, в последовательность $x_1, x_2, \ldots$ и допустить, что свободная переменная x_j интерпретируется в модели как целое число j, то указанное разбиение выражений на истинные и ложные можно

---

[1]) См. Клини [1], Мостовский [1].

[2]) См. Гжегорчик [2], Клини [1], Мостовский [1], [4], Успенский [1].

[3]) Клини [1], Мостовский [3].

распространить на класс всех выражений, даже на выражения, которые содержат свободные переменные. Тогда множество J истинных выражений в модели образует главный идеал алгебры Буля выражений. Это означает, что множество J обладает следующими свойствами:

1° если выражения A и B принадлежат множеству J, а C — произвольное выражение, то выражения $A \vee C$ (т. е. A или C) и $A \wedge B$ (т. е. A и B) принадлежат множеству J;

2° если $(X \vee Y) \in J$, то по крайней мере одно из выражений X, Y принадлежит множеству J.

Таким образом, любая модель определяет главный идеал, но, вообще говоря, идеал может не соответствовать модели.

Согласно известной теореме Стоуна[1]), множество главных идеалов произвольной алгебры Буля можно рассматривать как бикомпактное хаусдорфово нульмерное пространство.

Используя эту теорему, Расёва и Сикорский [1] показали, что множество идеалов, которые не соответствуют моделям, есть множество первой категории. Применяя теорему Бэра, получаем *топологическое* доказательство теорем Гёделя и Лёвенгейма — Сколема[2]).

Хотя существуют доказательства (таким является доказательство Гёделя), которые обходятся без топологии, топологические доказательства (и особенно метод Расёвой и Сикорского) представляют интерес не только в связи с их методологическим аспектом, впрочем, весьма примечательным, но благодаря возможности получать теоремы существования более сильные, чем те, которые выводятся с использованием других методов. Кроме того (см. § 34, VIII), чрезвычайно эффективен „метод категорий".

Так, например, Рыль-Нардзевский, применяя метод категорий, доказал очень изящным способом теорему, независимо от него найденную и опубликованную Ореем [1], согласно которой любая аксиоматическая система, содержащая арифметические обозначения и непротиворечивая по отношению к правилу бесконечной индукции[3]), обладает по крайней мере одной моделью, целые числа которой изоморфны обыкновенным целым числам.

Идея этого доказательства была использована в дальнейшем в топологических доказательствах существования различных патологических моделей для аксиоматической системы теории множеств. (См. Мостовский [5].)

---

[1]) См. Стоун М. [1].

[2]) Известны также топологические доказательства, не использующие теорему Бэра; см. Бет [1], Блейк [1], Ригер [1].

[3]) Это правило имеет нефинитный характер; оно позволяет принять в качестве теоремы любое общее высказывание: „для любого целого числа n имеет место $F(n)$", если доказаны высказывания $F(1)$, $F(2)$, ...

3. Неклассические логики. Кроме классической логики, в математической логике рассматриваются также неклассические (многозначные) системы логики. Рассмотрим сначала исчисление высказываний. В обычной логике такие логические функции, как отрицание, конъюнкция и т. д., определяются на множестве $\{0, 1\}$, состоящем из двух элементов, и не принимают других значений, кроме 0 и 1 (см. § 1, I). Здесь 0 имеет логическое значение „ложно", а 1 — „истинно". Теоремы исчисления высказываний представляют собой выражения, образованные из переменных высказываний и символов для логических функций, которые принимают значение 1 для всех значений переменных.

Чтобы определить *многозначную* логику, множество $\{0, 1\}$ заменяют другим множеством, которое может быть конечным или бесконечным. Это множество вместе с операциями, которые определяют логические операторы, называется *характеристической матрицей* рассматриваемой многозначной логики.

Любую многозначную логику можно охарактеризовать также с помощью аксиоматического метода: достаточно перечислить аксиомы и правила рассуждения.

Применение топологии к многозначным логикам становится возможным благодаря тому, что наиболее известные многозначные логики, которые сначала определялись аксиоматическим путем, обладают характеристическими матрицами, определяемыми в топологических терминах. Приведем два примера.

Одной из наиболее интересных многозначных логик является *интуиционистская логика*, созданная Брауэром, а затем аксиоматизированная Гейтингом [1]. Простая характеристическая матрица для этой логики была найдена Тарским [3]. Ее элементами служат открытые подмножества плотного в себе нормального сепарабельного пространства E (например, открытые подмножества евклидова пространства произвольной размерности). В этой матрице конъюнкция и дизъюнкция интерпретируются, как обычно, с помощью операций теории множеств. Интерпретация других логических функций отличается от классической булевской интерпретации; отрицание выражается с помощью функции $\operatorname{Int}(E - X)$, а импликация $X \Rightarrow Y$ — с помощью функции $\operatorname{Int}[(E - X) \cup Y]$ [1]).

Рассмотрим теперь *модальную логику* $S4$ Льюиса и Лангфорда [1]. Кроме обычных логических функций, эта логика допускает функции Pp (= возможно, что p), Np (= необходимо, что p) и некоторые другие функции, определяемые с помощью функций P и N.

Характеристическая матрица логики $S4$ образуется произвольными подмножествами плотного в себе нормального сепарабельного топологического пространства, причем элементарные логические функции

[1]) См. МакКинси и Тарский [1], М. Стоун [4], Тарский [3].

интерпретируются как обычно, а функции P и N — как операции $\overline{X}$ и $\mathrm{Int}(X)$ [1]).

Чисто математические определения интуиционистской логики и модальной логики $S4$, которые мы только что дали, были источником многочисленных метаматематических теорем об этих логиках [2]). Большинство из них не было известно до открытия топологической интерпретации.

Перейдем теперь к функциональному исчислению 1-*го порядка*, основанному на многозначной логике; например, для интуиционистской [3]), модальной [4]) и некоторых других логик [5]) можно найти топологическую интерпретацию функциональных исчислений, основанных на этих логиках. В этой интерпретации предикаты $f(x_1, \ldots, x_n)$ рассматриваются как функции, заданные на некотором абстрактном множестве, со значениями в некоторой матрице рассматриваемой многозначной логики. В случае интуиционистской логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ — открытое подмножество некоторого топологического пространства E, в случае модальной логики — произвольное подмножество пространства E. Квантор общности интерпретируется в интуиционистской логике как внутренность пересечения (в топологическом смысле), а квантор существования — как объединение. В модальной логике эти кванторы интерпретируются как пересечение и объединение в смысле теории множеств.

Можно показать, что в подходящим образом выбранном пространстве E логические теоремы совпадают с выражениями, которые в описанной выше интерпретации тождественно равны пространству E [6]).

Этот результат соответствует цитированной выше теореме Тарского [1], связанной с исчислением высказываний. Однако важно заметить, что в случае модальной логики класс пространств E, для которых эта теорема имеет место, более узок, чем в элементарном случае исчисления высказываний. (Расёва и Сикорский [2], Сикорский [6].) Аналогичный вопрос для интуиционистской логики остается открытым.

Топологическая интерпретация неклассических функциональных исчислений изучалась главным образом Расёвой и Сикорским; с ее помощью они получили значительное число метаматематических теорем для этих исчислений и для исчисления высказываний с кванторами [7]).

---

[1]) См. МакКинси и Тарский [3], Тан Цяо-чен [1].

[2]) См. МакКинси и Тарский [1], [2], [3], Тарский [3].

[3]) См. Мостовский [2].

[4]) См. Расёва [1].

[5]) См. Расёва и Сикорский [1].

[6]) См. Расёва [1].

[7]) См. Расёва [2], Расёва и Сикорский [2], [3], [4].

Заметим, наконец, что топологическая интерпретация некоторых разделов интуиционистской математики была дана также Менгером [5]; исследования в этом направлении не были продолжены.

4. Другие приложения. В логической литературе можно найти и различные другие приложения топологии к математической логике. В качестве примера отметим данное Куратовским [33] доказательство теоремы Тарского, согласно которой *вполне упорядоченность* нельзя определить без использования переменных более высокого логического типа, чем логика первого порядка. Как показал Куратовский, эта теорема следует непосредственно из существования аналитических неборелевских множеств (см. § 38, VI).

Другое приложение топологического метода представляет собой данное Гжегорчиком [1] доказательство следующей теоремы об „однородности" рекурсивных функций: пусть дан функционал F, ставящий рекурсивным образом в соответствие любому целому положительному числу x и любой бесконечной последовательности f целых положительных чисел целое положительное число $F(f, x)$; тогда существует функционал $H(h, x)$, такой, что из условий:

(1) $f_t \leqslant h_t$, $g_t \leqslant h_t$ для любого t,

(2) $f_t = g_t$ для $t \leqslant H(h, x)$

вытекает равенство $F(f, x) = F(g, x)$, каковы бы ни были последовательности f и g.

Другое доказательство этой теоремы, не прибегающее к топологическим методам, а использующее теорему Брауэра — Кёнига (теорема о „веере") было дано Клини[1]).

II. О приложениях топологии к функциональному анализу

Р. Сикорский

Предметом функционального анализа является изучение линейных топологических пространств. Под *линейным пространством* понимается любое множество, в котором имеются операции сложения $x+y$ и умножения λx (где λ — число), причем эти операции подчинены некоторым простым аксиомам[2]).

Линейное пространство называется *линейным топологическим*, если оно наделено некоторой топологией, относительно которой функции $x+y$ и λx, рассматриваемые как функции двух переменных, непрерывны.

---

[1]) См. Клини [4]. Что касается других приложений топологических понятий к теории рекурсивных функций, см. Успенский [2].

[2]) См. Банах [9]. Эта книга представляет собой первое систематическое изложение функционального анализа, одним из основателей которого является автор.

В первый период развития функционального анализа ограничивались случаем, когда введенная топология была метризуемой (линейные метризуемые пространства), причем главным образом рассматривали линейные нормированные пространства [1]), понимая под нормой функцию $\|x\|$ с неотрицательными конечными значениями, такую, что

$$(\|x\|=0)\equiv(x \text{ есть нулевой элемент пространства}),$$

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|, \quad \|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|.$$

Если положить $|x-y|=\|x-y\|$, то нормированное пространство становится метрическим.

В последующие годы большую роль стали играть неметризуемые линейные топологические пространства. (См., например, Бурбаки [2].) Таковы, в частности, пространства обобщенных функций Соболева — Шварца [2]) и пространство операторов Микусинского [1], [2]. Другими важными примерами неметризуемых пространств являются нормированные пространства со *слабой топологией*, т. е. слабейшей из возможных топологий, сохраняющих непрерывность всех линейных функционалов (иными словами, с топологией, допускающей минимальное количество открытых множеств). Упорядоченные пространства, топология которых определяется порядком [3]), и пространства сходимости с двумя нормами [4]) в общем случае также неметризуемы.

Непрерывность операций в линейных топологических пространствах недостаточно связывает линейность пространства и его топологическую структуру. Ее дополняет аксиома существования сколь угодно малых выпуклых окрестностей. Таким образом, мы приходим к *локально выпуклым пространствам* [5]); если они, кроме того, метризуемы, то они называются $\overset{*}{B}_0$-пространствами [6]).

Фундаментальным понятием в теории линейных метризуемых пространств является понятие *полного* пространства (см. § 33, I). Это понятие может быть применено и к неметризуемым пространствам, однако там оно менее полезно, так как в этом случае теорема Бэра (см. § 34, IV) неверна. При изучении метризуемых линейных пространств обычно предполагают, что они полны. Полное нормированное пространство известно также под названием *пространства Банаха*. Полнота пространства и, в частности, теорема Бэра (вытекающая из нее), существенным образом используются в доказа-

---

[1]) См., например, Банах [1].

[2]) См. Соболев [1], Шварц [1], [2].

[3]) См. Канторович [2], Канторович, Вулих и Пинскер [1].

[4]) См. Алексевич [2].

[5]) Принципы теории линейных топологических пространств и локально выпуклых пространств были независимо друг от друга обоснованы Мазуром [1], фон Нейманом [1] и Колмогоровым [1].

[6]) Теория $\overset{*}{B}_0$-пространств разработана Мазуром и Орличем [1], [3], [4].

тельствах таких важных теорем функционального анализа, как теоремы об открытом отображении [1]) и замкнутом графике [2]), о непрерывности предела сходящейся последовательности линейных непрерывных отображений [3]) и известной теоремы Банаха — Штейнгауза [4]).

Теорема Бэра часто используется в доказательствах теорем существования, использующих теорему Банаха — Штейнгауза (например, в доказательстве существования непрерывной функции с расходящимся рядом Фурье [5])).

Хотя линейные пространства (не сводящиеся к одному элементу) никогда не являются компактными, а локально компактные линейные пространства можно отождествить с евклидовыми пространствами $\mathscr{E}^n$, понятие компактности приносит большую пользу. Так, например, в теории линейных операторов важную роль играют вполне непрерывные операторы, т. е. линейные операторы, переводящие ограниченные множества [6]) в компактные множества [7]).

Понятие компактности играет важную роль в теории *нормированных колец* [8]) (банаховых алгебр), т. е. в теории банаховых пространств, наделенных, наряду с принятыми в этих пространствах операциями, операцией умножения, которая предполагается непрерывной и подчиненной обычным аксиомам.

Основным понятием теории нормированных колец является понятие аддитивного и мультипликативного функционала (или эквивалентное ему понятие максимального идеала). Множество этих функционалов (или, что то же самое, множество максимальных идеалов) образует компактное топологическое пространство.

Замкнутые шары в бесконечномерном пространстве Банаха не компактны. Тем не менее при дополнительных предположениях относительно пространства они становятся компактами в слабой топологии (рефлексивные пространства). Отсюда частое использование понятия компактности при переходе к слабой топологии.

Свойство Бэра (см. § 11, I) также используется в функциональном анализе (Банах [9]). Так, например, согласно одной замечательной теореме о пространствах (F), любое линейное множество, обладающее свойством Бэра, либо является множеством первой категории, либо совпадает со всем пространством (Банах [9]; см. также § 13, XII).

---

[1]) Банах [9].
[2]) Там же.
[3]) Там же.
[4]) Банах и Штейнгауз [1], Банах [9].
[5]) Зигмунд [1].
[6]) Подмножество линейного топологического пространства называется *ограниченным*, если любая последовательность $x_1, x_2, \ldots$ элементов этого множества ограничена, т. е. если $\lambda_n x_n$ сходится к 0 при $\lambda_n \to 0$.
[7]) Банах [9].
[8]) См. Мазур [2]. Это первая фундаментальная работа о нормированных кольцах. Теория нормированных колец была развита Гельфандом [1].

Теоремы о *неподвижной точке* играют важную роль в нелинейном функциональном анализе и его приложениях к дифференциальным и интегральным уравнениям. Отметим в первую очередь теорему Банаха [0] о сжатых отображениях: пусть f — непрерывное отображение полного пространства в себя, такое, что $|f(x)-f(x')| \leqslant \leqslant \lambda|x-x'|$, где $\lambda<1$; тогда существует одна и только одна точка x_0, для которой $f(x_0)=x_0$.

Другой фундаментальной теоремой, часто используемой в приложениях, является теорема Шаудера [1]: *любое непрерывное отображение замкнутого выпуклого подмножества A банахова пространства в компактное подмножество множества A имеет неподвижную точку*. Доказательство этой теоремы опирается на классическую теорему Брауэра для n-мерных симплексов (§ 28, III).

Топологические теоремы, использующие *гомологические* и *гомотопические* понятия, позволяют получить глубокие результаты, из которых отметим метод Лере — Шаудера, касающийся *степени отображения* (некоторого подмножества банахова пространства в себя) вида $I+A$, где I — тождественный, а A — вполне непрерывный оператор (см. Лере и Шаудер [1]).

Далее отметим теорему Борсука [2] об *антиподах*, а также теорему Люстерника — Шнирельмана [1], согласно которой сферу $\mathscr{S}_n$ нельзя представить в виде объединения $n+1$ множеств диаметра $<\delta(\mathscr{S}_n)$. Эти результаты касаются случая конечной размерности, однако их можно также применять к бесконечномерным подмножествам банаховых пространств, поскольку любое вполне непрерывное отображение можно приблизить отображениями на конечномерные множества [2].

В этом обзоре приложений топологии к функциональному анализу мы ограничились в основном некоторыми общими методами. Однако существуют многочисленные приложения более специального характера. В качестве примера отметим теорему Александрова, согласно которой любое метрическое компактное пространство является непрерывным образом канторова множества $\mathscr{C}$, и ее приложение к теореме Банаха—Мазура [3] об эквивалентности любого сепарабельного пространства Банаха линейному замкнутому подмножеству пространства $\mathscr{C}^{\mathscr{I}}$ (см. § 22, II, замечание 2).

Наконец, отметим приложение понятия аналитического множества (§ 38, I) к одному обобщению теоремы Сакса на линейные операторы [4].

---

[1]) См. Шаудер [2]. Обобщение на случай неметризуемых пространств было дано Тихоновым [4]. Обобщение теорем Банаха и Шаудера см. также в работе Красносельского [1].

[2]) См. Красносельский [2], Гранас [1]—[7], Генба, Гранас и Янковский [1].

[3]) См. Банах [9].

[4]) См. Алексевич [1], Сакс [6], [7].

ЛИТЕРАТУРА

Адисон (Addison J. W.)

1. Analogies in the Borel, Lusin and Kleene hierarchies, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955).
2. Separation principles in the hierarchies of classical and effective set theory. *Fund. Math.*, **46** (1958), 123—135.
3. Some consequences of the axiom of constructibility, *Fund. Math.*, **46** (1959), 338—357.

Адисон и Клини (Addison J. W., Kleene S. C.)

1. A note on function quantification, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957).

Александров П. С.

1. *C. R. Paris*, **162** (1916).
2. Sur les ensembles complémentaires aux ensembles (*A*), *Fund. Math.*, **5** (1924), 160—165.
3. Sur les ensembles de la première classe et les espaces abstraits, *C. R. Paris*, **178** (1924), 185—187.

3a. Über die Metrisation der in kleinen kompakten topologischen Räume, *Math. Ann.*, **92** (1924), 294—301.

4. Zur Begründung der *n*-dimensionalen mengentheoretischen Topologie, *Math. Ann.*, **94** (1925), 296—308.
5. Über stetige Abbildungen kompakter Räume, *Proc. Akad. Amsterdam*, **28** (1926), 997.
6. Sur la dimension des ensembles fermés, *C. R. Paris*, **183** (1926), 640—643.
7. Sur les multiplicités cantoriennes et le théorème de Phragmen-Brouwer généralisé, *C. R. Paris*, **183** (1926), 722—724.
8. Über stetige Abbildungen kompakter Räume, *Proc. Akad. Amsterdam*, **28** (1925), 997.

8a. Über stetige Abbildungen kompakter Räume, *Math. Ann.*, **96** (1927), 555—571.

9. Une définition des nombres de Betti pour un ensembles fermé quelconque, *C. R. Paris*, **184** (1927), 317—320.
10. Darstellung der Grundzüge der Urysohn'shen Dimensionstheorie, *Math. Ann.*, 98 (1928), 31—63.
11. Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung, *Math. Ann.*, **98** (1928), 617—638.
12. Utnersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. *Ann. Math.*, **30** (1929), 101—187.
13. Einfachste Grundbegriffe der Topologie, Berlin, 1932.
14. Dimensionstheorie, *Math. Ann.*, **106** (1932).
15. Теорема сложения в теории размерности бикомпактных пространств, *Сообщ. груз. фил. АН*, **2** (1941), 1—6.

16. On the dimension of normal spaces, *Proc. R. Soc.,* A. **189** (1947), 11—39.
17. Комбинаторная топология, М., 1947.
18. Современное состояние теории размерности, *УМН,* **6,** № 5 (1951), 43—68.
19. О некоторых результатах в теории топологических пространств, полученных за последние двадцать пять лет, *УМН,* **15,** № 2 (1960), 25—96.
20. On the metrization of topological spaces, *Bull. Acad. Polon. Sc.,* **8** (1960), 135—140.

Александров П. С. и Урысон П. С.

1. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (*L*) soit une classe (*D*), *C. R. Paris,* **177** (1923), 1274—1276.
2. Zur Theorie der topologischen Räume, *Math. Ann.,* **92** (1924), 258—266.
3. Über nulldimensionale Punktmengen, *Math. Ann.,* **98** (1928), 89—106.
4. Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. K. Akad. Amsterdam,* **14** (1929), 1—96.

Александров и Хопф (Alexandroff P. und Hopf H.)

1. Topologie, I, Berlin, Springer, 1935.

Алексевич (Alexiewicz A.)

1. A theorem on the structure of linear operations, *Studia Math.,* **14** (1953), 1—12.
2. On the two-norm convergence, *Studia Math.,* **14** (1953), 49—56.

Алексич (Alexits G.)

1. Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion, *Fund. Math.,* **15** (1930).

Альбукерк (Albuquerque J.)

1. La notion de «frontière» en topologie, *Portug. Math.,* **2** (1941), 280—289.

Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А.

1. Метрические пространства над полуполями, Тр. ТашГУ, вып. 191, мат., 1961.
2. Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963.

Аренс и Дугундьи (Arens R., Dugundji J.)

1. Remark on the concept of compactness, *Portug. Math.,* **9** (1950), 141—143.

Аронштайн (Aronszajn N.)

1. Sur les invariants des transformations continues d'ensembles, *Fund. Math.,* **19** (1932).

Архангельский А. В.

1. On the metrization of topological spaces, *Bull. Acad. Polon. Sc.,* **8** (1960), 589—595.
2. Новые критерии паракомпактности и метризуемости произвольного T_1-пространства, *ДАН СССР,* **141,** № 1 (1961), 13—15.
3. Об открытых и почти открытых отображениях топологических пространств, *ДАН СССР,* **147** (1962), № 5, 999—1002.
4. Некоторые метризационные теоремы, *УМН,* **18** (1963), 139—145.
5. Бикомпактные множества и топология пространств, *ДАН СССР,* **150,** № 1 (1963), 9—12.

Ауль и Трон (Aull C. E., Thron W. J.)

1. Separation axioms between T_0 and T_1, *Scandin. Math.,* **24** (1962).

Банах (Banach S.)

1. Sur les opération dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, *Fund. Math.,* **3** (1922), 7—33.

2. *Fund. Math.*, **6** (1924), 236—239.
3. Sur les fonctionnelles linéares II, *Studia Math.*, **1** (1929).
4. Théorème sur les ensembles de première catégorie, *Fund. Math.*, **16** (1930).
5. Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, *Studia Math.*, **3** (1931).
6. Über metrische Gruppen, *Studia Math.*, **3** (1931).
7. Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen, *Fund. Math.*, **17** (1931).
8. Théorie des opérations linéaires, Monogr. Math., Warszawa—Lwów, 1932. (Украинский перевод: Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.)
9. *Fund. Math.*, **19** (1932), 10.

Банах и Куратовский (Banach S., Kuratowski K.)
1. Sur une généralisation du probleme de la mesure, *Fund. Math.*, **14** (1930).
2. Sur la structure des ensembles linéaires, *Studia Math.*, **4** (1933).

Банах и Штейнгауз (Banach S., Steinhaus H.)
1. Sur le principe de la condensation de singularités, *Fund. Math.*, **9** (1927), 50—61.

Безикович С.
1. *Acta Math.*, **62** (1934).

Бендиксон (Bendixson L.)
1. *Acta Math.*, **2** (1883), 415.

Берж (Berge C.)
1. *Mémorial Sc. Math.*, **138.**
2. Espaces topologiques, Dunod, 1959.

Бернштейн (Bernstein F.)
1. *Leipzig. Ber.*, **60** (1908).

Бет (Beth W. E.)
1. A topological proof of the theorem of Löwenheim — Skolem — Gödel., *Proc. Nederl. Acad. Wetensch.*, A, **54** (1951), 436—444.

Бинг (Bing R. H.)
1. Metrization of topological spaces, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 175—186.

Биркгоф (Birkhoff G.)
1. Lattice Theory, Coll. Publ. **25**, New York, 1940.
2. Lattice theory, 2-me ed., New York, 1948. (Русский перевод: Теория структур, М., 1952.)
3. Moore — Smith convergence in general topology, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 39—56.

Блейк (Blake A.)
1. Canonical expressions in Boolean algebra, Chicago, 1938.

Бокштейн М. Ф.
1. Un théorème de séparabilité pour les produits topologiques, *Fund. Math.*, **35** (1948), 242—246.

Борель (Borel E.)
1. *Ann. Ecole Norm.* (3), **12** (1895) (Thesis).
2. Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, 1898.
3. Sur la classification des ensembles de mesure nulle, *Bull. Soc. Math. France*, **47** (1919).

Борсук (Borsuk K.)

1. Sur les rétractes, *Fund. Math.*, **17** (1931).
2. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177—190.
3. *Bull. Acad. Pol.*, 1933.
4. *Fund. Math.*, **28** (1937).

Браcслер и Сион (Brassler D. W., Sion M.)

1. The current theory of analytic sets, *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 207—230.

Браун (Braun S.)

1. Quelques théorèmes sur les cribles boreliens, *Fund. Math.*, **20** (1933), 168—172.

Браун и Серпинский (Braun S. et Sierpiński W.)

1. *Fund. Math.*, **19** (1932).

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

1. Über die natürlichen Dimensionsbegriff, *J. Math.*, **142** (1913).
2. On linear inner limiting sets, *Proc. Akad. Amsterdam*, **20** (1917).
3. *Proc. Akad. Amsterdam*, **26** (1923).

Брюнс и Шмидт (Bruns G. and Schmidt J.)

1. Zur Äquivalentz von Moore — Smith-Folgen und Filtern, *Math. Nachr.*, **13** (1955), 169—186.

Булиган (Bouligand G.)

1. *Ens. Math.*, 1932.

Бурбаки (Bourbaki N.)

Eléments de mathématique, Actualitxes Sci. et Ind., Paris.

1. Topologie générale, ASI 1045, 1084, 1142, 1143, 1235 и след. (Русский перевод: Общая топология. Основные структуры, 1—3, М., 1958. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, гл. IV—VII, М., 1959.)
2. Espaces vectoriels topologiques, ASI 1189 (1953). ASI 1129 (1955). (Русский перевод: Топологические векторные пространства, М., 1959.)
3. Théorie des ensembles, Paris, 1958. (Русский перевод: Теория множеств, М., 1965.)

Бэр (Baire R.)

1. Thése, *Ann. di Math.*, (3), **3** (1899).
2. *C. R. Paris*, **129** (1899).
3. Sur la représentation des fonctions discontinues, *Acta Math.*, **30** (1905).
4. *Acta Math.*, **30** (1906).
5. *Acta Math.*, **32** (1909).

Важевский (Ważewski T.)

1. *Ann. Soc. Pol. Math.*, 2 (1923).
2. *Fund. Math.* **4** (1923).

Вайдинатхасвами (Vaidyanathaswamy R.)

1. Treatise on set topology I., Madras, 1947.

Вайнштейн И. А.

1. О замкнутых отображениях, *Учен. зап. МГУ*, **155**, матем. (1952), 3—53.

Валле-Пуссен (Vallée-Poussin Ch. de la)

1. Integrales de Lebesgue.

Варашкевич (Waraszkiewicz Z.)
1. Sur une famille des types de continuité qui remplit un intervalle, *Fund. Math.*, **18** (1932).
2. Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre, *Fund. Math.*, **18** (1932).

Веденисов Н. Б.
1. Sur les fonctions continues dans les espaces topologiques, *Fund. Math.*, **27** (1936).
2. Замечания о размерности топологических пространств, *Учен. зап. МГУ*, **30** (1939), 131—146.
3. *Compos. Math.*, 7 (1940), 194—200.
4. О размерности в смысле Е. Чеха, *ИАН СССР*, **5** (1941), 211—216.

Вейль (Weil A.)
1. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1937.

Витали (Vitali G.)
1. Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, Bologna, 1905.

Вопенка (Vopenka P.)
1. On the dimension of compact spaces, *J. Math. Tchecoslov.*, **8** (1958), 319—326.

Вьеторис (Vietoris L.)
1. *Monat Math. Ph.*, **31** (1921), 173—204.
2. *Fund. Math.*, **19** (1932).

Гагаев (Gagaeff B.)
1. Sur les suites convergentes de fonctions mesurables *B*, *Fund. Math.*, **18** (1932).

Гейтинг (Heyting A.)
1. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sgb. Preuss. Akad. Wiss.*, 1930, 42—56.

Гельфанд И. М.
1. Normierte Ringe, *Матем. сб.*, **9** (51) (1941), 3—24.

Генба, Гранас, Янковский (Gęba K., Granas A., Jankowski A.).
1. Some theorems on the sweeping in Banach spaces, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, 7 (1959), 539—544.

Гёдель (Gödel K.)
1. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis., *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **24** (1938).
2. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, Ann. Math. Studies 3, Princeton, 1951.

Гжегорчик (Grzegorczyk A.)
1. Computable functionals, *Fund. Math.*, 42 (1955), 168—202.
2. Some proofs of undecidability of arithmetic, *Fund. Math.*, **43** (1956), 166—177.

Гилман и Джерисон (Gillman L. and Jerison M.)
1. Rings of continuous functions, New York, 1960.

Гильберт (Hillbert D.)

1. *Göttingen Nachr.*, 1902.
2. *Göttingen Nachr.*, 1906.
3. Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1913. (Русский перевод: Основания геометрии, М., 1947.)

Гранас (Granas A.)

1. Über einem Satz von K. Borsuk, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **5** (1957), 959—962.
2. On continuous mappings of open sets in Banach spaces, *Bull Acad. Pol. Sc.*, **6** (1958), 25—29.
3. Homotopy extension theorem in Banach spaces and some of its applications to the theory of nonlinear equations, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **7** (1959), 387—394.
4. On the disconnection of Banach spaces, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **7** (1959), 395—399.
5. A note on compact deformations in functional spaces, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **10** (1962), 87—90.
6. An extension to Functional Spaces of Borsuk — Ulam Theorem on Antipodes, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **10** (1962), 81—86.
7. On the Schauder theorem on the invariance of domains, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **10** (1962), 233—238.

Гримайзен (Grimeisen G.)

1. *Math. Ann.*, **141** (1960), 318—342.
2. *Math. Ann.*, **144** (1961), 386—417.

Гроот (de Groot J.)

1. A note on 0-dimensional spaces, *Indag. Math.*, **9** (1947), 94.

Гросс (Gross W.)

1. Zur Theorie der Mengen in denen ein Distanzbegriff definiert ist, *Weiner Ber.*, **123** (1914), 801.

Гуревич (Hurewicz W.)

1. Über stetige Bilder von Punktmengen, *Proc. Acad. Amsterdam*, **29** (1926), 1014—1017.
2. Normalbereiche und Dimensionstheorie, *Math. Ann.*, **96** (1927).
3. *Math. Ann.*, **100** (1928).
4. Über unendlich-dimensionale Punktmengen, *Proc. Akad. Amsterdam*, **31** (1928).
5. *Math. Ann.*, **101** (1929).
6. Über den sogenannten Produktsatz der Dimensionstheorie, *Math. Ann.*, **102** (1929).
7. Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (*A*), *Fund. Math.*, **12** (1928), 78—109.
8. Zur Theorie der analytischen Mengen, *Fund. Math.*, **15** (1930), 4—17.
9. *Mon. Math. Phys.*, **37** (1930).
10. Une remarque sur l'hypothèse du continu, *Fund. Math.*, **19** (1932).
11. *Sgb. Preuss. Akad.*, **24** (1933).
12. Ein Satz über stetige Abbildungen, *Fund. Math.*, **23** (1934).
13. *Fund. Math.*, **24** (1935).

Гуревич и Уолмен (Hurewicz W., Wallman H.)

1. Dimension theory, Princeton University Press, 1941. (Русский перевод: Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, М., 1948.)

Данжуа (Denjoy A.)

1. *Journ. de Math.*, (7), **1** (1915), 123—125.
2. *Journ. de Math.*, 1916.

Данциг (van Dantzig)

1. Über topologisch homogene Kontinua, *Fund. Math.*, **15** (1930).

Даукер (Dowker C. H.)

1. An embedding theorem for paracompact metric spaces, *Duke Math. J.* **14** (1937), 639—645.
2. On a theorem of Hanner, *Arkiv Math.*, 2 (1952), 307—313.
3. Inductive dimension of completely normal spaces, *Quart. J.*, **4** (1953), 267—281.
4. Local dimension of normal spaces, *Quart. J.*, **6** (1955), 101—120.

Даукер и Гуревич (Dowker C. H., Hurewicz W.)

1. Dimension of metric spaces, *Fund. Math.*, **43** (1956), 83—88.

Дей (Day M. M.)

1. Convergence, closure and neighbourhoods, *Duke Math. J.*, **11** (1944), 181—199.

Диксмье (Dixmier J.)

1. Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, *Summa Brasil. Math.*, 2 (1951), 151—181.

Дугундьи (Dugundji J.)

1. An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 353—367.

Дьедонне (Dieudonné J.)

1. Une généralisation des espaces compacts, *J. Math.*, **23** (1944), 65—76.
2. Un critère de normalité pour les produits, *Coll. Math.*, **6** (1958), 29—32.
3. Foundations of modern analysis, New York, 1960. (Русский перевод: Основы современного анализа, М., 1964.)

Дэвис (Davis M.)

1. Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy, Proc. Int. Congr. of Math. Cambridge, 1950, vol. 1 (1952).

Дюбуа-Реймон (du Bois-Reymond P.)

1. Die allgemeine Funktionentheorie, I, Tübingen, 1882.

Ефремович В. А.

1. Инфинитезимальные пространства, *ДАН СССР*, **76** (1951), 341—343.
2. Геометрия близости I, *Матем. сб.* **31** (73), № 1 (1952), 189—200.

Жордан (Jordan C.)

1. *Journ. de Math.* (4), **8** (1892).

Зальцвассер (Zalcwasser Z.).

1. Un théorème sur les ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ, *Fund. Math.*, 3 (1922), 44—45.

Заранкевич (Zarankiewicz K.)

1. *Fund. Math.*, **9** (1927).
2. *Fund. Math.*, **11** (1928).
3. O zbiorach lokalnie mierzalnych (B), *Wiadomości Matematyczne*, **30** (1928), 115.

Зарелуа А.

1. *ДАН СССР*, **141** (1961).

Зарицкий (Zarycki M.)

1. Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, *Fund. Math.*, **9** (1927), 3—15.

2. Über den Kern einer Menge, *Jahresber. d. D. Math. Ver.*, **39** (1930).
3. Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30**.

Зейферт и Трельфалль (Seifert H. und Threlfall W.)

1. Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934. (Русский перевод: Топология, М., 1947.)

Зигмунд (Sygmund A.)

1. Trigonometrical series, Monogr. Mat., Warszawa — Lwów, 1935. (Русский перевод: Тригонометрические ряды, т. I, II, М., 1965.)

Зоргенфрей (Sorgenfrey R. H.)

1. On the topological product of paracompact spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 631—632.

Зоретти (Zoretti L.)

1. *J. Math.* (5), **1** (1905).

Исбелл (Isbell J. R.)

1. Uniform spaces, Providence, 1964.

Исеки (Iseki K.)

1. On definition of topological space, *Journ. Osaka Inst.*, **1** (1949), 97—98.

Ист и Фрейденталь (van Eest W. T. and Freudenthal H.)

1. Trennung durch stetigen Funktionen in topologischen Räumen, *Indag. Math.*, **13** (1951).

Кантор (Cantor G.)

1. *Math. Ann.*, **5** (1872).
2. *Math. Ann.*, **15** (1879).
3. *Göttinger Nachr.* (1879).
4. *Math. Ann.*, **17** (1880).
5. *Math. Ann.*, **21** (1883).
6. *Math. Ann.*, **23** (1884).
7. *Acta Math.*, **7** (1885).

Канторович Л. В.

1. Sur les fonctions du type (U), *C. R. Paris*, **192**.
2. Линейные полуупорядоченные пространства, *Матем. сб.*, 2 **(1937)**, 121—168.

Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.

Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М.

1. *C. R. Paris*, **190** (1930).
2. Memoir on the analytical operations and projective sets, *Fund. Math.*, **18** (1932), 214—279.

Катетов (Katětov M.)

1. Complete normality of cartesian products, *Fund. Math.*, **36** (1948), 271—274.
2. On real-valued functions in topological spaces, *Fund. Math.*, **38** (1951), 85—91.
3. О размерности метрических пространств, *ДАН СССР*, **79**, № 2 (1951), 189—191.

4. О размерности несепарабельных пространств, *Tchecoslov. Math., J.*, **2** (1952), 333—368.
5. *Coll. Math.*, **6** (1958), 145—151.

Келдыш Л. В.

1. Об открытых отображениях *A*-множеств, *ДАН СССР*, **49** (1945), 646—648.

Келли (Kelley J. L.)

1. General topology, 1955.

Кемписти (Kempisty S.)

1. *Fund. Math.*, 2 (1921).

Кернс (Cairns S. S.)

1. Introductory topology, New York, 1961.

Кли (Klee V.)

1. On the borelian and projective types of linear subspaces, *Math. Scand*, **6** (1958), 189.

Клини (Kleene S. C.)

1. Recursive predicates and quantifiers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 41—73.
2. A symmetric form of Gödel's theorem, *Proc. Nederl. Akad. Wetensch*, **53** (1950), 800—802.
3. Arithmetical predicates and function quantifiers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 312—340.
4. A note on computable functionals, *Indag. Math.*, **18** (1956), 275—280.

Кнастер и Куратовский (Knaster B., Kuratowski K.)

1. *Fund. Math.*, 2 (1921).

Кнастер, Мазуркевич и Куратовский (Knaster B., Mazurkiewicz S., Kuratowski K.)

1. Ein Beweis des Fixpunktsatzes für *n*-dimensionale Simplexe, *Fund. Math.*, **14** (1929).

Ковальский (Kowalsky H. J.)

1. *Math. Nachr.*, **12** (1954), 301—340.
2. Topologische Räume, Basel, 1961.

Колмогоров А. Н.

1. Об операциях над множествами, *Матем. сб.*, **35** (1928), 414—422.

Кондо (Kondô M.)

1. Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe, *Japan J. Math.*, **15** (1938), 197—230.

Красносельский М. А.

1. Два замечания о методе последовательных приближений, *УМН*, **10**, № 1 (63), (1955), 123—128.
2. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.

Кунугуи (Kunugui K.)

1. Sur la théorie du nombre de dimensions, Thése, Paris, 1930.
2. *Proc. Imp. Acad. Japan.*, **11** (1936).

Куратовский (Kuratowski K.)

1. Topologie I, II.
2. *Fund. Math.*, **1** (1920).

3. *Fund. Math.*, **2** (1921).
4. Un problème sur les ensembles homogènes, *Fund., Math.,* **3** (1922), 14—19.
5. Une remarque les classes $\mathscr{L}$ de M. Fréchet, *Fund. Math.*, **3** (1922), 41—43.
6. Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fund. Math.*, **3** (1922), 76—108.
7. Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs, *Fund. Math.*, **3** (1922), 182—199.
8. Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire, *C. R. Paris*, **176** (1923).

8a. Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie, *Fund. Math.*, **5** (1924).

9. Contribution à l'étude de continus de Jordan, *Fund. Math.*, **5** (1924), 112—122.
10. Sur la puissance de l'ensemble des «nombres de dimension» au sens de M. Fréchet, *Fund. Math.*, **8** (1926).
11. Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts, *Fund. Math.*, **11** (1928), 169.
12. Über topologische homogene Kontinua, *Fund. Math.*, **15** (1930).
13. Sur les espaces complets, *Fund. Math.*, **15** (1930), 300—309.
14. Sur la propriété de Baire dans les espaces métriques, *Fund. Math.*, **16** (1930), 390—394.
15. Evaluation de la classe borélienne ou projective à l'aide des symboles logiques, *Fund. Math.*, **17** (1931), 240—272.
16. Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques, *Fund. Math.*, **17** (1931).
17. Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, *Fund. Math.*, **18** (1931), 148—159.
18. Sur le problème de la mesurabilité des ensembles définissables, Congr. Int. Math. Zürich, 1932, vol. II.
19. Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singulièrs, *Mathematica*, **6** (1932).
20. Sur les théorèmes topologiques de la théorie des fonctions de variables réelles, *C. R. Paris*, **197** (1933).
21. Sur le prolongement de l'homéomorphie, *C. R. Paris*, **197** (1933).
22. Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles, *Fund. Math.*, **20** (1933), 191—196.
23. Sur une famille d'ensembles singulièrs, *Fund. Math.*, **21** (1933).
24. Sur la propriété de Baire dans les groupes métriques, *Studia Math.*, **4** (1933).
25. Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie, *Fund. Math.*, **22** (1934).
26. Sur le rapport des ensembles de M. Lusin a la Théorie générale des Ensembles, *Fund. Math.*, **22** (1934).
27. Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes, *Fund. Math.*, **24** (1935).
28. Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables, *Fund. Math.*, **25** (1935).
29. Sur les théorèmes de séparation dans la Théorie des ensembles, *Fund. Math.*, **26** (1936), 183—191.
30. Les ensembles projectifs et l'induction transfinie, *Fund. Math.*, **27** (1936).
31. Sur un problème concernant l'induction transfinie, *C. R. Paris*, **202** (1936).
32. Les ensembles projectifs et l'opération $(\mathscr{A})$, *C. R. Paris*, **203** (1936).
33. Les types d'ordre definissables et les ensembles boreliens, *Fund. Math.*, **28** (1937), 97—100.

34. Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable, *Fund. Math.*, **28** (1937), 167.
35. Les suites transfinis d'ensembles et les ensembles projectifs, *Fund. Math.*, **28** (1937), 179—185.
35a. *Fund. Math.*, **28** (1937).
36. Sur les suites analytiques d'ensembles, *Fund. Math.*, **29** (1937).
37. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **16** (1937).
38. Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications á la théorie des espaces connexes, *Fund. Math.*, **30** (1938), 17—24.
39. Remarques sur les transformations continues des espaces métriques, *Fund. Math.*, **30** (1938).
40. Sur l'extension de deux théorèmes topologiques à la Théorie des ensembles, *Fund. Math.*, **34** (1947), 34—38.
41. Ensembles projectifs et ensembles singulièrs, *Fund. Math.*, **35** (1948), 131—140.
42. Sur l'espace des fonctions partielles, *Annali di Mat.*, **40** (1955), 61—67.
43. Un théorème sur les espaces complets et ses applications à l'étude de la connexité locale, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, Cl. III, **3** (1955), 75—80.
44. Sur une méthode de métrisation complète de certains espaces d'ensembles fermés, *Fund. Math.* **43** (1956), 114—138.
45. Introduction to set theory and topology, Warszawa and Oxford, 1961.
46. Mappings of topological spaces into lattices and into Brouwerian algebras, *Bull. Polish Acad. Sc.*, **12** (1964), 9—16.
47. *ДАН СССР*, **155** (1964).

Лаврентьев М. А.

1. Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes, *Fund. Math.*, **6** (1924).
2. *C. R. Paris*, **178** (1924).
3. Sur les sous-classes de la classification de M. Baire, *C. R. Paris*, 1925.

Лебег (Lebesgue H.)

1. *J. de Math.* (6), **1** (1905).
2. Contributions à l'étude des correspondances de M. Zermelo, *Bull. Soc. Math. France*, **35** (1907), 202—212.
3. *Fund. Math.*, **2** (1921).

Левин (Levine N.)

1. On the commutivity of the closure and interior operators in topological spaces, *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961), 474—477.

Левшенко Б. Т.

1. О пространствах бесконечной размерности, *ДАН СССР*, **139** (1961), 286.

Лере и Шаудер (Leray J., Schauder J.)

1. Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, **13** (1934), 45—78.

Лефшец (Lefschetz S.)

1. *Ann. Math.*, **35** (1934).
2. Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1942. (Русский перевод: Алгебраическая топология, М., 1947.)
3. Introduction to topology, Princeton, 1949.

Линделёф (Lindelöf E.)

1. *C. R. Paris*, **137** (1903).
2. *Acta Math.*, **29** (1905).

Линденбаум (Lindenbaum A.)

1. Contributions à l'étude de l'espace métrique I, *Fund. Math.*, **8** (1926).
2. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **10** (1932).
3. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **15** (1937).

Локуциевский О. В.

1. О размерности бикомпактов, *ДАН СССР*, **67** (1949), 217—219.

Лузин Н. Н.

1. *C. R. Paris*, **158** (1914).
2. *C. R. Paris*, **164** (1917).
3. Sur l'existense d'un ensembles non denombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait, *Fund. Math.*, **2** (1921), 155—157.
4. *Fund. Math.*, **5** (1924).
5. Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue, *C. R. Paris*, **180** (1925).
6. Sur une question concernant la propriété de Baire, *Fund. Math.*, **9** (1927), 117.
7. Sur les ensembles analytiques, *Fund. Math.*, **10** (1927), 1—95.
8. Ensembles analytiques, Paris, 1930.
9. *Fund. Math.*, **12** (1928), 158.
10. Sur les ensembles toujours de première catégorie, *Fund. Math.*, **21** (1933), 114—119.
11. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций, М.—Л., 1935.

Лузин Н. Н., Новиков П. С.

1. Choix effectif d'un point dans un complementaire analytique arbitraire, donné par un crible, *Fund. Math.*, **25** (1935).

Лузин и Серпинский (Lusin N., Sierpiński W.)

1. Sur quelques propriétés des ensembles (*A*), *Bull. Acad. Sc. Cracovie*, 1918.
2. *C. R. Paris*, **175** (1922).
3. *J. de Math.*, II (1923).
4. *R. Acc. Lincei*, **6**, VII (1928).
5. *C. R. Paris*, **189** (1929).

Лунц А. Л.

1. Бикомпакт, индуктивная размерность которого больше размерности, определенной посредством покрытий, *ДАН СССР*, **66** (1949), 801—803.

Льюис и Лангфорд (Lewis C. I., Langford C. H.)

1. Symbolic logic, New York — London, 1932.

Любен (Lubben R. G.)

1. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1928).

Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г.

1. Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

Ляпунов А. А.

1. Об отделимости аналитических множеств, *ДАН СССР*, **2** (1934), 276—280.
2. *R*-множества, Тр. Матем. ин-та АН, **40** (1953), 1—68.
3. Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы, Тр. Моск. матем. об-ва, **6** (1957), 195—230.

Мазур (Mazur S.)
1. Sur les ensembles et fonctionnelles convexes dans les espaces linéares (по-польски), Lwów, 1936.
2. Sur les anneaux linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **207** (1938), 1025—1027.

Мазур и Орлич (Mazur S., Orlicz W.)
1. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **12** (1933), 119—120.
2. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **16** (1938), 195.
3. Sur les espaces métriques linéaires, *Studia Math.*, **10** (1948), 184—208.
4. *Studia Math.*, **13** (1953), 137—179.

Мазуркевич (Mazurkiewicz S.)
1. Über Borelsche Mengen, *Bull. Acad. Cracovie*, 1916, 490—494.
2. Teorja zbiorów G_δ, Wektor, 1918.
3. *Fund. Math.*, **1** (1920).
4. Sur l'invariance de la notion d'ensemble $F_{\sigma\delta}$, *Fund. Math.*, **2** (1921).
5. Sur une propriété des ensembles $C(A)$, *Fund. Math.*, **10** (1927).
6. Sur les ensembles de dimension faible, *Fund. Math.*, **13** (1929).
7. Sur les transformations intérieures, *Fund. Math.*, **19** (1932).
7a. *Fund. Math.*, **26** (1936), 153.
8. Über die Menge der differenzierbaren Funktionen, *Fund. Math.*, **27** (1936), 244.
9. Eine projektive Menge der Klasse PCA im Funktionalraum, *Fund. Math.*, **28** (1937).

Мазуркевич и Серпинский (Mazurkiewicz S., Sierpiński W.)
1. Sur un problème concernant les fonction continues, *Fund. Math.*, **6** (1924).

Мазуркевич и Шпильрайн-Марчевский (Mazurkiewicz S., Szpilrajn-Marczewski E.)
1. Sur la dimension de certains ensembles singulièrs, *Fund. Math.*, **28** (1937), 306.

Майкл (Michael E.)
1. Topologies on spaces of subsets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 152—183.
2. A note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 831—838.
2a. *Duke Math. J.*, **21** (1954), 163.
3. Another note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 822—828.
4. *Bull. Math. Soc.*, **69** (1963).

Макки (Mackey G. W.)
1. Les ensembles boreliens et les extensions des groupes, *J. de Math.*, **36** (1957).

МакКинси и Тарский (McKinsey J. C. C., Tarski A.)
1. The Algebra of Topology, *Ann. Math.*, **45** (1944), 141—191,
2. On closed elements in closure algebras, *Ann. Math.*, **47** (1946), 122—162.
3. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, *J. Symb. Logic.*, **13** (1948), 1—13.

МакШейн (McShane E. J.)
1. Partial orderings and Moore-Smith limits, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 1—11.

Мало (Mahlo P.)
1. *Leipzig. Ber.*, **63** (1911).

Мамузич (Mamuzič Z. P.)
1. Introduction to general topology, Nordhoff, 1963.

Мартин (Martin A. V.)
1. Decompositions and quasi-compact mappings, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 463—469.

Марчевский (Marczewski E.)
1. Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques, *Fund. Math.*, **34** (1947), 127—143.
2. *ДАН СССР*, **31** (1941), 525.

Менгер (Menger K.)
1. Über die Dimension von Punktmengen, II Teil, *Mon. Math. Phys.*, **34** (1924).
2. *Math. Ann.*, **95** (1925).
3. Das Hauptproblem über die dimensionelle Struktur der Räume, *Proc. Akad. Amsterdam*, **30** (1926).
4. Dimensionstheorie, Leipzig — Berlin, 1928.
5. Bemerkungen über dimensionelle Feinstruktur und Produktsatz, *Prace Mat.-Fiz.*, **37** (1930).
6. Ergebnisse Math. Koll., 1, Wien, 1931.
7. Bemerkungen zu Grundlagenfragen, *Jahresb. Deutscher Math. Ver.*, **37** (1938), 81—112.

Микусинский (Mikusiński J.)
1. Sur les fondements du calcul opératoire, *Studia Math.*, **11** (1950), 41—70.
2. Calcul des opérateurs (по-польски), Monogr. Math., Warszawa — Wroclaw, 1953.

Монтгомери (Montgomery D.)
1. Non-separable metric spaces, *Fund. Math.*, **25** (1935).

Монтгомери и Циппин (Montgomery D. et Zippin L.)
1. Topological transformations groups, Interscience Tracts, New York, 1955.

Монтейро (Monteiro A.)
1. Caractérisation de l'opération de fermeture par un seul axiome, *Portugaliae Math.*, **4** (1945), 158—160.
2. Les ensembles fermés et les fondements de la Topologie, *Portug. Math.*, **2** (1941), 56—66.

Морита (Morita K.)
1. Star-finite coverings and the star-finite property, *Math. Japan.*, **1** (1948), 60—68.
2. On the dimension of normal spaces I, *J. Math. Soc. Japan*, **20** (1950), 5—36.
3. Normal families and dimension theory for metric spaces, *Math. Ann.*, **128** (1954), 350—362.
3a. On closed mappings, *Proc. Japan. Acad.*, **32** (1956), 539—543.
4. *Proc. Japan Academy*, **39** (1963).

Морита, Ханаи (Morita K., Hanai S.)
1. Closed mappings and metric spaces, *Proc. Japan. Acad.*, **32** (1956), 10.

Мостовский (Mostowski A.)

1. On definable sets of positive integers, *Fund. Math.*, **34** (1946), 81—112.
2. Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus, *J. Symb. Logic*, **13** (1948), 204—207.
3. A classification of logical systems, *Studia Philosophica*, **4** (1951), 237—274.
4. Development and applications of the projective classification of sets of integers, Proc. Int. Congr. of Math. Amsterdam, vol. I, 1954.
5. On models of axiomatic set-theory, *Bull. Ac. Pol. Sci.*, Cl. III, **4** (1956), 663—668.

Мрувка (Mrówka S.)

1. On almost-metric spaces, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, Cl. III, **4** (1956).
2. On the notion of completeness in proximity spaces, *Bull. Acad. Pol. Sc.* Cl. III, **4** (1956), 477—478.
3. О полных пространствах близости, *ДАН СССР*, **108** (1956), 587.
4. On almost metric spaces, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **5** (1957), 123—127.
5. Some properties of *Q*-spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **5** (1957), 947—950.
6. On the convergence of nets of sets, *Fund. Math.*, **45** (1958), 237—246.
7. On the convergence classes of sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 918—921.

Мур Р. (Moore R. L.)

1. Concerning upper semi-continuous collections of continua..., *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **10** (1924), 350.
2. Foundations of point set theory, Coll. Publ., 1932.

Мур Э. (Moore E. H.)

1. On a form of General analysis, Yale Coll., 1910.

Мур и Смит (Moore E. H. and Smith H. L.)

1. A general theory of limits, *Amer. J. Math.*, 44 (1922), 102—121.

Нагами (Nagami K.)

1. *Proc. Japan. Acad.*, 32 (1956), 320.

Нагата (Nagata J.)

1. On a necessary and sufficient condition of metrizability, *J. Inst. Polyt. Osaka City Univ.*, **1** (1950), 93—100.
2. A theorem for metrizability of a topological space, *Proc. Japan. Acad.*, **33** (1957), 128—130.

Нейбауер (Neubauer M.)

1. Über die partiellen Derivierten unstetiger Funktionen, *Mon. Math. Phys.*, 38 (1931).

фон Нейман (von Neumann J.)

1. On complete topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37** (1935), 1—20.

фон Нейман и Куратовский (von Neumann J., Kuratowski K.)

1. On some analytic sets defined by transfinite induction, *Ann. Math.*, **38** (1937), 521—525.

Нёбелинг (Nöbeling G.)

1. Grundlagen der analytischen Topologie, Berlin (Springer), 1954.

Никодим (Nikodym O.)

1. *Fund. Math.*, **4** (1920).
2. Sur une propriété de l'opération $(\mathcal{A})$, *Fund. Math.*, **7** (1925).

3. *C. R. Soc. Sc. de Varsovie*, **19** (1926).
4. *Fund. Math.*, **11** (1928).
5. Sur la condition de Baire, *Bull. Acad. Pol.*, 1929.
6. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **7** (1929).
7. *Fund. Math.*, **14** (1929).

Нитка (Nitka W.)

1. *Indag. Math.*, 21 (1959), 36.

Новак (Novák J.)

1. Regular space on which every continuous function is constant, *Casopis Pěstov. Mat. Fys.*, **73** (1948).
2. On the cartesian product of two compact spaces, *Fund. Math.*, **40** (1953).

Новиков П. С.

1. *Fund. Math.*, **17** (1931).
2. Об одном свойстве аналитических множеств, *ДАН СССР*, **2** (1934), 273—276.
3. Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, *Fund. Math.*, **25** (1935).
4. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 38 (1951), 279—316.

Ньюман (Newman M. H. A.)

1. Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge, 1939.

Окстоби (Oxtoby J. C.)

1. Cartesian products of Baire spaces, *Fund. Math.*, **49** (1961), 157—166.

Окстоби, Улам (Oxtoby J. C., Ulam S. M.)

1. On the equivalence of any set of first category to a set of measure zero, *Fund. Math.*, **31** (1938).

Орей (Orey S.)

1. On ω-consistency and related properties, *J. Symb. Logic.*, **21** (1956), 246—252.

Орлич (Orlicz)

1. *Bull. Acad. Polon.*, 1932, 221—228.

Отто и Эйленберг (Eilenberg S., Otto E.)

1. Quelques propriétés caractéristiques de la dimension, *Fund. Math.*, **31** (1938).

Пасынков Б. А.

1. О полиэдральных спектрах и размерности бикомпактов, в частности, бикомпактных групп, *ДАН СССР*, **121**, № 1 (1958), 45—48.

Паттерсон (Patterson E. M.)

1. Topology, Intersc. Publ., 1956.

Пеано (Peano G.)

1. *Math. Ann.*, **36** (1890).

Пенлеве (Painlevé P.)

1. *C. R. Paris*, **148** (1909).

Позамент и Куратовский (Posament T. et Kuratowski K.)

1. Sur l'isomorphie algébrologique et les ensembles relativement boreliens, *Fund. Math.*, **22** (1934).

Помпейю (Pompéju D.)

1. *Ann. de Toulouse* (2), **7** (1905).

Пондичери (Pondiczery E.)

1. Power problems in abstract spáces, *Duke Math. J.*, **11** (1944).

Пономарев В. И.

1. Новое пространство замкнутых множеств и многозначные отображения бикомпактов, *Матем. сб.*, **48** (90), № 2 (1959), 191—212.

Понтрягин Л. С.

1. Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension, *C. R. Paris,* **190** (1930).
2. Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.

Попруженко (Poprougénko G.)

1. Sur un problème de M. Mazurkiewicz, *Fund. Math.*, **15** (1930), 285.
2. Sur la dimension de l'espace et l'extension des fonctions continues, *Mon. Math. Phys.*, **33** (1931).

Попруженко и Шпильрайн-Марчевский (Poprougénko et Szpilrajn-Marczewski)

1. Remarques sur les fonctions complétement additives, *Fund. Math.*, **22** (1934).

Проскуряков Ю. М.

1. К теории размерности топологических пространств. *Ученые зап. МГУ*, **148** (1951), 219—223.

Пуанкаре (Poincaré H.)

1. *Journ. Ec. Polyt.* (2), **1** (1895).
2. Complément à l'analysis situs, § VII, *Rendic, Palermo,* **13** (1899).
3. *Revue de métaph. et de mor.*, **20** (1912).
4. Dernières pensées, Paris, 1926 (édition posthume).

Расёва (Rasiowa H.)

1. Algebraic treatment of the functional calculi of Lewis and Heyting, *Fund. Math.*, 38 (1951), 99—126.
2. Algebraic models of axiomatic theories, *Fund. Math.*, **41** (1955), 291—310.

Расёва и Сикорский (Rasiowa H., Sikorski R.)

1. A proof of the completeness theorem of Gödel, *Fund. Math.*, **37** (1950), 193—200.
2. Algebraic treatment..., *Fund. Math.*, **40** (1953).
3. On existential theorems in non-classical functional calculi, *Fund. Math.*, **41** (1954), 21—28.
4. An application of lattices to logic, *Fund. Math.*, **42** (1955), 83—100.
5. The mathematics of metamathematics, Mon. Mat., Warszawa, 1963.

Ренни (Rennie B. C.)

1. The theory of lattices, Cambridge, 1951.

Рибейро (Ribeiro H.)

1. Une extension de la notion de convergence, *Portug. Math.*, **2** (1941), 153—161.
2. Caractérisations des espaces réguliers normaux et compètement normaux au moyen de l'operation de dérivation, *Portug. Math.*, **2** (1944), 13—19.

Ригер (Rieger L.)

1. О счетных обобщенных δ-алгебрах и новом доказательстве теоремы Гёделя о полноте, *Czechoslovak Math. J.*, **1** (1951), 33—49.

Р и с с (R i e s z F.)
1. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti del IV Congr. Int. d. Mat., vol. II, Roma, 1909.

Р о б е р т с (R o b e r t s J. H.)
1. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932).

Р о д ж е р с (R o g e r s C. A.)
1. Analytic sets in Hausdorff spaces, *Mathematica*, **11** (1964), 1—8.

Р о з е н т а л ь и З о р е т т и (R o s e n t h a l A., Z o r e t t i L.)
1. Encyklopädie d. Math. Wiss. II. GGA, Leipzig, 1924.

Р о й (R o y P.)
1. Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 609—613.

Р о т б е р г е р (R o t h b e r g e r F.)
1. Eine Verschärfung der Eigenschaft *C*, *Fund. Math.*, **30** (1938), 50.
2. Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ, *Fund. Math.*, **32** (1939), 294.

Р у н г е (R u n g e)
1. *Acta Math.*, **6** (1884).

Р ы л ь - Н а р д з е в с к и й (R y l l - N a r d z e w s k i C.)
1. On Borel measurability of orbits, *Fund. Math.*, **56** (1964), 120—136.

С а к с (S a k s S.)
1. Sur l'équivalence de deux théorèmes de la Théorie des ensembles, *Fund. Math.*, **2** (1921).
2. *Fund. Math.*, **10** (1927), 186—196.
3. Sur un ensemble non mesurable jouissant de la propriété de Baire, *Fund. Math.*, **11** (1928).
4. *Fund. Math.*, **19** (1932), 211—219.
5. Théorie de l'intégrale, Monogr. Mat., 2, 1932.
6. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1932), 549—556.
7. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 160—170.
8. Theory of the integral, Monogr. Mat., 7, 1937. (Русский перевод: Теория интеграла, М., 1949.)

С а м п е и (S a m p e i Y.)
1. On the uniformization of the complement of an analytic set, *Comment. Math. Univ. S. Paul.*, **10** (1960), 57—62.
2. *Comm. Math. Univ. S. Pauli*, **9** (1961), 91.

С е б а ш т и а н - и - С и л ь в а (S e b a s t i a õ - e - S i l v a)
1. Sur l'axiomatique des espaces de Hausdorff, *Portug. Math.*, **2** (1941), 93—109.

С е л и в а н о в с к и й (S e l i v a n o w s k i E.)
1. *C. R. Paris*, **184** (1927), 1311.
2. Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques, *Fund. Math.*, **21** (1933).

С е м а д е н и (S e m a d e n i Z.)
1. Sur les ensembles clairsemés, *Rozpr. Mat.*, **19** (1954).

С е р п и н с к и й (S i e r p i ń s k i W.)
1. Wektor, 1915.
2. Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables (*B*), *Bull. Acad. Cracovie*, 1918.

3. *C. R. Paris*, **171** (1920).
4. Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles des points, *Fund. Math.*, **1** (1920), 1—6.
5. Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi, *Fund. Math.*, **1** (1920), 11—16.
6. Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellment, *Fund. Math.*, **1** (1920), 112—115.
7. Sur la décomposition des ensembles de points en parties homogènes, *Fund. Math.*, **1** (1920), 28—34.
8. *Fund. Math.*, **2** (1921), 81—95.
9. Sur les images des fonctions représentables analytiquement, *Fund. Math.*, **2** (1921), 74—80.
10 Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits, *Fund. Math.*, **2** (1921), 179—188.
11. Les exemples effectifs et l'axiome du choix, *Fund. Math.*, **2** (1921), 112—118.
12. *Bull. de l'Acad. Polon. Sc.* (1921), 62.
13 Sur l'inversion des fonctions représentables analytiquement, *Fund. Math.*, **3** (1922), 26—34.
14. Sur une properiété des ensembles clairsemés, *Fund. Math.*, **3** (1922), 46—49.
15. Sur quelques invariants d'Analysis Situs, *Fund. Math.*, **3** (1922), 119—122.
16. Sur l'invariance topologique de la propriété de Baire, *Fund. Math.*, **4** (1923), 319—323.
17. Sur l'hypothese du continu, *Fund. Math.*, **5** (1924), 177—187.
18. *Fund Math.*, **6** (1924).
19. Sur une propriété des ensembles ambigus, *Fund. Math.*, **6** (1924), 1—5.
20. Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$ et Sur une définition topologique des ensembles $F_{\sigma\delta}$, *Fund. Math.*, **6** (1924), 21—29.
21. Un exemple effectif d'un ensemble mesurable (B) de classe α, *Fund. Math.*, **6** (1924), 39—44.
22. Sur les images biunivoques et continues de l'ensembles de tous les nombres irrationnels, *Mathematica*, **2** (1924).
23. Funkcje przedstawialne analitycznie, Lwów, 1925.
24. *Math. Ann.*, **97** (1926).
25. Sur l'invariance topologique des ensembles G_δ, *Fund. Math.*, **8** (1926), 135—136.
26. Sur une propriété des ensembles (A), *Fund. Math.*, **8** (1926), 362—369.
27. Les ensembles boreliens abstraits, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **6** (1927).
28. Sur une classification des ensembles mesurables (B), *Fund. Math.*, **10** (1927), 320—327.
29. Topologia, 1928.
30. *Fund. Math.*, **11** (1928), 118.
31. Le crible de M. Lusin et l'operation $(\mathcal{A})$ dans les espaces abstraits, *Fund. Math.*, **11** (1928), 16—18.
32. Sur les ensembles complets d'un espace (D), *Fund. Math.*, **11** (1928), 203—205.
33. Sur un ensembles non dénombrable dont toute image continue est de mesure nulle, *Fund. Math.*, **11** (1928), 302—304.
34. La propriété de Baire des fonctions et de leurs images, *Fund. Math.*, **11** (1928), 305—307.
35. Zazys teorii mnogości, t. I, II, Warszawa, 1928.
36. Sur les familles inductives et projectives d'ensembles, *Fund. Math.*, **13** (1929), 228—239.
37. *Fund. Math.*, **14** (1929).

38. Sur l'existence de diverses classes d'ensembles, *Fund. Math.*, **14** (1929), 82—91.
39. Sur les images continues des ensembles de points, *Fund. Math.*, **14** (1929), 234—236.
40. Sur les images continues des ensembles analytiques linéares ponctiformes, *Fund. Math.*, **14** (1929), 345—349.
41. Sur les images de Baire des ensembles linéaires, *Fund. Math.*, **15** (1930), 195—198.
42. Sur l'extension des fonctions de Baire définies sur les ensembles linéaires quelconques, *Fund. Math.*, **16** (1930), 81—89.
43. Sur deux complementaires analytiques non separables *B*. *Fund. Math.*, **17** (1931), 296—297.
44. Sur une problème concernant les types de dimensions, *Fund. Math.*, **19** (1932), 65—71.
45. Un théorème concernant les transformations continues des ensembles linéaires, *Fund. Math.*, **19** (1932), 205.
46. Sur les rapports entre les classification des ensembles de MM. F. Hausdorff et Vallée Poussin, *Fund. Math.*, **19** (1932), 257—264.
47. *Fund. Math.*, **20** (1933).
48. *Fund. Math.*, **21** (1933).
49. *Fund. Math.*, **21** (1933), 107—113.
50. Sur un ensemble linéaire non dénombrable qui est de premiere catégorie sur tout ensemble parfait, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, 1933.
51. *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, 1934.
52. Hypothèse du continu, Monogr. Mat., 4, 1934.
53. Sur un problème de C. Kuratowski concernant la propriété de Baire des ensembles, *Fund. Math.*, **22** (1934), 54—56.
54. Sur la dualité entre la première categorie et la mesure nulle, *Fund. Math.*, **22** (1934), 276—280.
55. Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables *B*, *Fund. Math.*, **23** (1934), 292—303.
56. Sur une propriété additive d'ensembles, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, **30** (1937).
57. Sur le rapport de la propriété (C) à la théorie générale des ensembles, *Fund. Math.*, **29** (1937), 91—96.
58. Sur une propriété des espaces métriques séparables, *Fund. Math.*, **30** (1938).
59. Sur un ensemble a propriété λ, *Fund. Math.*, **32** (1939), 306—309.
60. Sur la non-invariace topologique de la propriéte λ', *Fund. Math.*, **33** (1945), 264—268.
61. Sur deux conséquences d'un théorème de Hausdorff, *Fund. Math.*, **33** (1945), 269—272.
62. Sur un espace métrique separable universel, *Fund. Math.*, **33** (1945).
63. Deux théorèmes sur les familles des transformations, *Fund. Math.*, **34** (1947), 30—33.
64. General topology, Toronto, 1952.
65. Cardinal and ordinal numbers, Warszawa, 1958.

Серпинский и Зигмунд (Sierpiński W., Zygmund A.)

1. *Fund. Math.*, **4** (1923).

Серпинский и Куратовский (Sierpiński W., Kuratowski K.)

1. Le théoreme de Borel — Lebesgue dans la theorie des ensembles abstraits, *Fund. Math.*, **2** (1921).
2. Sur les différences de deux ensembles fermés, *Tôhoku Math. J.*, **20** (1921).
3. Sur un probléme de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires, *Fund. Math.*, **8** (1926).

4. Sur les ensembles qui ne contiennent aucun sousensembles indénombrable non-dense, *Fund. Math.*, **26** (1936).
5. Sur l'existence des ensembles projectifs non mesurables, Academie Bulgare, **61** (1941), 207—212.

Сикорский (Sikorski R.)

1. *Fund. Math.*, **19** (1932).
2. On the cartesian products of metric spaces, *Fund. Math.*, **34** (1947), 289.
3. On the representation of Boolean algebras as fields of sets, *Fund. Math.*, **35** (1948).
4. Closure algebras, *Fund. Math.*, **36** (1949), 165—206.
5. Closure homeomorphisms and interior mappings, *Fund. Math.*, **41** (1955).
6. *Bull. Acad. Pol. Sci.*, III, **4** (1956), 649—650.
7. Boolean algebras, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.

Симмонс (Simmons G. F.)

1. Introduction to topology and modern analysis, Mc. Graw-Hill, 1963.

Сион (Sion M.)

1. On analytic sets in topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 341—354.

Сирота (Shirota T.)

1. A class of topological spaces, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 23—40.

Скляренко Е. Г.

1. *ДАН СССР*, **126** (1959), 1200.
2. *ДАН СССР*, **143** (1962), 1053.

Скотт (Scott D.)

1. Invariant Borel sets, *Fund. Math.*, **56** (1964), 117—128.

Словиковский и Завадовский (Slowikowski W. et Zawadowski W.)

1. A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand, *Fund. Math.*, **42** (1955), 215—231.

Смирнов Ю. М.

1. О метризации топологических пространств, *УМН*, **6** (46), (1951), 100—111.
2. Некоторые соотношения в теории размерности, *Матем. сб.*, **29** (71), № 1 (1951), 157—172.
3. Необходимое и достаточное условие метризуемости топологического пространства, *ДАН СССР*, **77**, № 2 (1951), 197—200.
4. О пространствах близости, *Матем. сб.*, **31** (73), № 1 (1952), 543—574.
5. О полноте пространств близости, *ДАН СССР*, **88** (1953), 761—764.
6. О полноте равномерных пространств и пространств близости, *ДАН СССР*, **91**, № 6 (1953), 1281—1284.
7. О полноте пространств близости, 1, 2, Тр. Моск. матем. о-ва, 3 (1954), 271—308 и 4 (1955), 421—438.
8. О размерности пространств близости, *Матем. сб.*, **38** (80), № 3 (1956), 283—302.
9. On dimensional properties of infinite-dimensional spaces, Proc. Symposium on general topology, Prague, 1961.
10. О трансфинитной размерности, *Матем. сб.*, **58** (1962).

Соболев С. Л.

1. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales, *Матем. сб.*, **1** (43) (1936), 39—72.

2. Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques., *Ann. Univ. Grenoble,* **21** (1945), 57—74.

Стинрод, Эйленберг (Steenrod N. and Eilenberg S.)

1. Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952. (Русский перевод: Основания алгебраической топологии, М., 1958).

Стоилов (Stoïlow S.)

1. *Ann. Ec. Norm. Sup.* III, **45** (1928).

Стоун А. (Stone A. H.)

1. Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **54** (1948), 977—982.
2. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **65** (1949).
3. Metrizability of decomposition space, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **7** (1956), 690—700.
4. Non-separable Borel sets, *Rozprawy Mat.,* 28 (1962).

Стоун М. (Stone M. H.)

1. Boolean algebras and their application to topology, *Proc. Nat. Acad. Sci,* **20** (1934), 107—202.
2. The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **40** (1936), 37—111.
3. *Fund. Math.,* **29** (1937).
4. Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics, *Časopis pro pestrovani mat. a fys.,* **67** (1937), 1—25.
5. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **41** (1937), 375—481.

Стразер (Strother W. L.)

1. Continuous multi-valued functions. *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo,* **10** (1958), 87—120.

Судзуки (Suzuki J.)

1. On the uniformization principle, Proc. Symp. on the Foundations of Mathematics, Katada (Japan), 1962, p. 137—144.

Суслин М.

1. *C. R. Paris,* **164** (1917).

Суслин М. и Лузин Н.

1. Sur une définition des ensembles mesurables *B* sans nombres transfinis, *C. R. Paris,* **164** (1917).

Тайманов А. Д.

1. Об открытых образах борелевских множеств, *Матем. сб.,* **37** (79), (1955), 293—300.
2. О замкнутых отображениях, I, **36** (78), (1955), 349—352, II, **52** (1960), 579—588.

Таккй (Tukey J. W.)

1. Convergence and uniformity in topology, *Ann. of Math. Studies,* **2** (1940).

Тан Цяо-чен (Tang Tsao-Chen)

1. Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis Calculus of strict implication, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **44** (1938), 737—744.

Тарский (Tarski A.)

1. *Fund. Math.,* **6** (1924).

2. *Fund. Math.*, **24** (1935).
3. Der Aussagenkalkül und die Topologie, *Fund. Math.*, **31** (1938), 103—134.
4. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its application, *Pacific J. Math.*, **5** (1955).

Тарский и Куратовский (Tarski A., Kuratowski K.)
1. Les opérations logiques et les ensembles projectifs, *Fund. Math.*, **17** (1931).

Титце (Tietze H.)
1. Über Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *J. Math.*, **145** (1915), p. 9—14.
2. Beiträge zur allgemeinen Topologie, *Math. Ann.*, 88 (1923).

Титце и Вьеторис (Tietze H. und Vietoris L.)
1. Encyklopädie d. Math. Wiss, III AB 13, Leipzig, 1931.

Тихонов А. Н.
1. Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn, *Math. Ann.*, **95** (1925), 139—142.
2. Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, **102** (1930), 544—561.
3. Über einen Funktionenraum, *Math. Ann.*, **111** (1935).
4. Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.*, III (1935).
5. Об универсальном топологическом пространстве, *ДАН СССР*, **3** (1936), 49—52.

Тугуе (Tugué T.)
1. Sur les fonctions qui sont définies par l'induction transfinie, *J. Math. Soc. Japan*, 7 (1955), 94—122.

Тулмин (Toulmin C. H.)
1. Shufling ordinals and transfinite dimension, *Proc. London Math. Soc.*, **3** (1954), 177—190.

Тумаркин Л. А.
1. *Fund. Math.*, 8 (1926).
2. Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen, *Math. Ann.* (1928).
3. *Math. Ann.*, **98** (1928).

Уайберн (Whyburn G. T.)
1. Open mappings on locally compact spaces, Memoires Amer. Math. Soc.
2. *Fund. Math.*, **16** (1930).
3. Analytic topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1942.
4. Open and closed mappings, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 69—74.

Уилсон (Wilson W. A.)
1. On quasi-metric spaces, *Amer. J. Math.*, **53** (1931).

Улам (Ulam S.)
1. *Fund. Math.*, **16** (1930).
2. Über gewisse Zerlegungen von Mengen, *Fund. Math.*, **20** (1933).

Улам и Куратовский (Ulam S., Kuratowski K.)
1. Quelques proriétés topologiques du produit combinatoire, *Fund. Math.*, **19** (1932).

Уоллес (Wallace A. D.)
1. On non-boundary sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939).
2. Some characterizations of interior transformations, *Amer. Journ. Math.*, **61** (1939), 757—763.

Уолмен (Wallman H.)

1. Lattices and topological spaces, *Ann. Math.*, **39** (1938).

Урысон П. С.

1. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, **94** (1925), 262—295.
2. Zum Metrisationsproblem, *Math. Ann.*, **94** (1925), 309—315.
3. *Proc. Acad. Amsterdam*, 28 (1925).
4. *Fund. Math.*, 7 (1925).
5. *Fund. Math.*, 8 (1926).
6. Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes, *Fund. Math.*, 7—8 (1925—1926).
7. Sur les classes ($\mathscr{L}$) de M. Fréchet, *Ens Math.*, 25 (1926), 77—83.
8. *Fund. Math.*, 9 (1927), 119—121.
9. Sur un espace métrique universel, *Bull. Sc. Math.*, **151** (1927), 1—38.
10. *Verhandl. Akad. Amsterdam*, 13 (1927).

Успенский В. А.

1. Теорема Гёделя и теория алгоритмов, *ДАН СССР*, 91 (1953), № 4, 737—740.
2. О вычислимых операциях, *ДАН СССР*, **103**, № 5 (1955), 773—776.

Фересс (Veress P.)

1. Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen, *Fund. Math.*, 7 (1925).

Флаксмайер (Flachsmeyer J.)

1. *Math. Nachr.*, 24 (1962), 1—12.

Фокс (Fox R. H.)

1. On topologies of function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945).

Франц (Franz W.)

1. Allgemeine Topologie I, Göschen, 1906.

Фреше (Fréchet M.)

1. Sur quelques points du Calcul fonctionnel, Thése, *Rend. del Circolo Matem. di Palermo*, **22** (1906).
2. *Math. Ann.*, **68** (1910), 145—168.
3. Relations entre les notions de limite et de distance, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **19** (1918).
4. Quelques propriétés des ensembles abstraits, *Fund. Math.*, **10** (1927).
5. Les espaces abstraits, Monogr. Borel, Paris, 1928.

Фринк (Frink O.)

1. Topology in lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 569—582.

Фролик (Frolik Z.)

1. Concerning Topological convergence of sets, *Tchehosl. Mat. J.*, **10** (1960), 168—180.
2. On the descriptive theory of sets, *Tchehosl. Math. J.*, **13** (1963), 335—352.
3. On bianalytic spaces, *Tchehosl. Math. J.*, **13** (1963), 561—572.

Халмош (Halmos P. R.)

1. Lectures on Boolean algebras, Princeton, 1963.

Хан (Hahn H.)

1. Theorie der reellen Funktionen I, Berlin, 1921.
2. Reelle Funktionen I, Leipzig, 1932.

Хан и Розенталь (Hahn H., and Rosenthal A.)

1. Set funktions, Albuquerque, 1948.

Ханаи (Hanai S.)

1. On closed mappings, *Proc. Japan. Acad.*, **30** (1954), 285—288.

Ханнер (Hanner O.)

1. Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces, *Arkiv. Math.*, 2 (1952), 315—360.

Хартман (Hartman S.)

1. Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen, *Fund. Math.*, **29** (1937).

Хаусдорф (Hausdorff F.)

1. Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Vien), 1914.
2. *Math. Ann.*, **77** (1916).
3. *Math. Zft.*, **5** (1919).
4. Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen, *Fund. Math.*, **6** (1924).
5. Теория множеств, М.—Л., 1934.

5a. Über innere Abbildungen, *Fund. Math.*, **23** (1934), 279—291.

6. Summen von $\aleph_1$ Mengen, *Fund. Math.*, **26** (1936).
6. Summen von Mengen, *Fund. Math.*, **26** (1936).
7. Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums, *Fund. Math.*, **29** (1937).
8. Erweiterung einer stetigen Abbildung, *Fund. Math.*, **30** (1938).

Хедрик (Hedrick E. R.)

1. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 12 (1911).

Хелмберг (Helmberg G.)

1. On convergence classes of sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 918—921.

Хеммер (Hammer P. C.)

1. Kuratowski's closure theorem, *Nieuw Archief*, **8** (1960), 74—80.
2. Extended topology, Nieuw Archief, **9** (1961), **10** (1962).
3. *Proc. Acad. Amsterdam*, 1963.
4. *Indag. Math.* (1963).
5. Extended topology (Structure of isotonic functions), *J. reine angew. Math.*, **213** (1964), 174—186.

Хилгерс (Hilgers A.)

1. Bemerkungen zur Dimensionstheorie, *Fund. Math.*, **28** (1937).

Хилтон (Hilton P. J.)

1. Homotopy and duality (mimeographed), Cornell University, 1959.

Хокинг и Юнг (Hocking J. G. and Young G. S.)

1. Topology, Addison — Wesley, 1961.

Холл и Спенсер (Hall D. W. and Spencer G. L.)

1. Elementary topology, New York, 1955.

Хьюит (Hewitt E.)

1. On two problems of Urysohn, *Ann. of Math.*, **47** (1946).
2. A remark on density characters, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 641—643.
3. Rings of real-valued continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 54—99.

Циппин (Zippin L.)

1. Topological transformations groups, Interscience Tracts, New York, 1955.

Чассар (Császár A.)

1. Sur une classe de structures topologiques génerals, *Revue Math. pure et appl.*, **2** (1957), 399—407.
2. Fondements de la topologie générale, Budapest, 1960.

Чепмен (Chapman T. A.)

1. An extension of the Kuratowski closure and complementation problem, *Math. Magaz.*, **35** (1962), 31—35.
2. A further note on closure and interior operators, *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962), 524—529.

Чех (Čech E.)

1. Sur la dimension des espaces parfaitement normaux, *Bull. Acad. Sc. Bohème*, **33** (1932), 38—55.
2. Contribution à la theorie de la dimension, *Čas. Pest. Math. a Fys.*, **62** (1933), 277—291.
3. On bicompact spaces, *Ann. Math.* (2), **38** (1937), 823—844.
4. Topologickè prostory, Praha, 1959.

Читтенден (Chittenden)

1. On the equivalence of écart and voisinage, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18** (1917).

Чода и Матоба (Choda H., Matoba K.)

1. On a theorem of Levine, *Proc. Japan. Acad.*, **37** (1961), 462—463.

Шаудер (Schauder J.)

1. Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, *Studia Mat.*, **2** (1930).
2. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **2** (1930), 171—180.

Шварц (Schwartz L.)

1. Généralisation de la notion de fonction de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques, *Ann. Univ. Grenoble*, **21** (1945), 57—74.
2. Théorie des distributions, vol. I, Paris, 1950, vol. II, Paris, 1951.

Шеффер (Scheeffer L.)

1. *Acta Math.*, **5** (1884).

Шёнфлис (Schönflies A.)

1. Entwicklung der Mengenlehre I, Leipzig, 1913.

Шмидт (Schmidt J.)

1. Eine Studie zum Begriff der Teilfolge, *Jahresber. Deutsche Math. Ver.*, **63** (1960), 28—50.

Шнейдер В. Е.

1. Дескриптивная теория множеств в топологических пространствах, *ДАН СССР*, **50** (1945), 81—84.

Шоке (Choquet G.)

1. Convergences, *Ann. Univ. Grenoble*, **23** (1948), 55—112.
2. Cours d'analyse, t. II, Topologie, Paris, 1964.
3. Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5** (1953—1954), 131—294.
4. Ensembles K-analytiques et K-Susliniens, Cas général et cas métrique, *Ann. Inst. Fourier*, **9** (1959), 75—81.

Шпернер (Sperner E.)

1. *Abh. Math. Seminar Hamburg*, **6** (1928).

Шпильрайн-Марчевский (Szpilrajn-Marczewski E.)

1. O mierzalności i warunku Baire'a, C. R. du I Congrès des Math. des Pays Slaves, Varsovie, 1929.
2. Sur une hypothèse de M. Borel, *Fund. Math.*, **15** (1930).
3. Sur un problème de S. Banach, *Fund. Math.*, **15** (1930).
4. *Fund. Math.*, **21** (1933).
5. Remarques sur les fonctions complètement additives, *Fund. Math.*, **22** (1934).
6. *Fund. Math.*, **26** (1936).
7. La dimension et la mesure, *Fund. Math.*, **28** (1937).
8. *Fund. Math.*, **31** (1938).
9. On the equivalence of some classes of sets, *Fund. Math.*, **30** (1938).

Шпильрайн-Марчевский и Куратовский (Szpilrajn-Marczewski E., Kuratowski K.)

1. Sur les cribles fermés et leurs applications, *Fund. Math.*, **18** (1931).

Шрёдер (Schröder E.)

1. Vorlesungen über die Algebra der Logik, B. III (1890—1905).

Штейнгауз (Steinhaus H.)

1. *Studia Math.*, **1** (1929), 51—83.

Энгелькинг (Engélking R.)

1. General topology.
2. *Bull. Acad. Pol. Sc.*, **4** (1956).
3. Quelques remarques concernant les operations sur les fonctions semi-continues dans les espaces topologiques, *Bull. Acad. Polon.*, **11** (1963), 719—726.

Энгелькинг и Мрувка (Engelking R. and Mrówka S.)

1. On *E*-compact spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **6** (1958), 429—436.

Эрдёш (Erdös P.)

1. The dimension of rational points in Hilbert space, *Ann. Math.*, **41** (1940).

Юнг (Young W. H.)

1. *Ber. Ges. Wiss. Leipzig*, **55** (1903).
2. *Proc. London Math. Soc.* (1), **35** (1903).
3. *Quart. J. Math.*, **25** (1903).
4. *Leipziger Ber.*, **55** (1903).
5. The theory of sets of points, Cambridge, 1906.
6. *Proc. London Math. Soc.* (2), **12** (1913), 260.

Янишевский (Janiszewski S.)

1. Thesis (1911).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Антоновский М. Я.

1*. К аксиоматике топологических полуполей, *ДАН УзССР,* № 10 (1961).

Ефимов Б. А.

1*. О мощности хаусдорфовых пространств, *ДАН СССР,* **164**, № 5 (1965).

Коэн (Cohen P. J.)

1* The independence of the axiom of choice, Mimeographed notes, Mathematics Department, Stanford University (May, 1963).

2*. The independence of the continuum hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **50** (1963), 1143—1148 (Part I) and **51** (1964), 105—110 (Part II).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома выбора 34
— топологического пространства 44

Аналитические множества (A-множества) 464, 489

База пространства 58
Барицентрические координаты 314
Бесконечный комплекс 336
— полиэдр 337
Большая индуктивная размерность ($\operatorname{Ind} \mathscr{X}$) 313
Борелевские множества 53, 352—381
Борелевский изоморфизм 462
Брауэровская алгебра 180

Верхний предел последовательности множеств ($\operatorname{Ls} A_n$) 344
Взаимно непрерывное отображение 125
— однозначное отображение 20
Внутреннее отображение 122
Внутренний инвариант 118
Внутренность множества 60
Вполне несовершенное пространство 523
— нормальное (наследственно нормальное) пространство 136
— ограниченное пространство 224
— регулярное пространство 126
— упорядоченное множество 34
Всюду плотное множество 71
Выпуклое множество 314
Высказывание (предложение) 9
Вычет множества 70
— трансфинитного порядка 107

Геометрическая размерность симплекса 314
Гильбертов куб 32
Гипотеза континуума 35
Гомеоморфизм 116
— обобщенный класса (α, β) 382
Граница множества 60
Граничное множество 71
— — в точке 77
Грань симплекса 314
График отображения 148

Двойственность 10, 66
Двустороннее множество класса α 355
Диагональ 146
Диаграмма бикоммутативная (точная) 26
— коммутативная 25
Диаметр множества ($\delta(A)$) 216
Дизъюнкция 9
Дискретное множество 83
— семейство подмножеств топологического пространства 243
Дополнение множества 10

Закон двойного отрицания 9
— исключенного третьего 9
— ложного положения 9
— противоречия 9
Законы Моргана 9
Замкнутая область 79
Замкнутое множество 49
— отображение 122
Замыкание 44
— в метрическом пространстве 215
— комплекса 316

Идеал 14
— максимальный 14
— собственный 14
σ-идеал 19
Измельчение покрытия 54
B-измеримое отображение класса α 382
Изолированная точка 81
Индуктивная размерность пространства ($\operatorname{ind} \mathscr{X}$) 313

Канторов дисконтинуум (канторово совершенное множество) $\mathscr{C}$ 32

Кардинальное число 28
Квазикомпактное отображение 125
Класс эквивалентности 19
Классы F_α и G_α борелевских множеств 353
Колебание функции 217
Комбинаторная размерность пространства ($\dim \mathscr{X}$) 313
Компактное (бикомпактное) пространство 55
Комплекс 316
Композиция отображений 20
Конгруэнтность по модулю идеала 19
Конфинальное множество 33
Конъюнкция 9

Лемма Урысона 132
— Цорна 34
Линейно упорядоченное множество 33
Линейное множество 473
Локализация свойства 68
Локальная база 59
Локально борелевское множество 366
— замкнутое множество 70
— конечное семейство 55
σ-локально конечное семейство 55

Малые классы Бореля 463
n-мерный комплекс 317
Метризационная теорема Бинга — Нагата — Смирнова 245
Метризуемое топологическое пространство 215
Метрическое пространство 213
Многозначная функция 27
Множество Лебега 483
— открытое (замкнутое) по модулю множеств первой категории 92
— — — — — нигде не плотных множеств 74
— первой категории 86
— типа F_σ (типа G_σ) 52
— $E_{(n)}$ 284
F_σ- и G_σ -множество 428
Монотонное семейство множеств 33, 261, 272

Направленное множество 33
Наследственно нормальное (вполне нормальное) пространство 136
Насыщенная последовательность множеств 87
Нерв системы множеств 326
Непрерывное разбиение 194
— отображение 108, 109
Непрерывное отображение $\mathscr{L}^*$-пространств 200
Непрерывно сходящаяся последовательность 206
— — — в узком смысле 210
Несравнимые подмножества 444
Нигде не плотное множество 71, 77
Нижний предел последовательности множеств ($\mathrm{Li}\, A_n$) 343
Нормальное топологическое пространство 128

Область определения отображения 20
Обобщенная теорема продолжения Титце 158
Обобщенное прямое произведение 30
Обобщенный гомеоморфизм класса (α, β) 382
— шар 219
Образ множества 21
Обратный спектр 36
Объединение множеств 10
Ограниченное множество 216
Однородное множество 119
Окрестность точки 66
Операция Хаусдорфа 486
— $\underset{x}{\mathsf{E}}$ 12
— $\mathsf{S}\,(\boldsymbol{R})$ 13
— $\mathsf{P}\,(\boldsymbol{R})$ 13
$(\mathscr{A})$-операция 37
$\mathscr{M}$-операция Монтгомери 367
Отделимые множества 64
B-отделимые множества 495
Открытая область 80
— окрестность точки 66
Открытое множество 49
— отображение 121
Относительная окрестность точки 66
Относительно борелевские множества 53
— замкнутое множество 51
— открытое множество 51
Относительное замыкание 47
Отношение множеств 10
— рефлексивное 18
— симметричное 18
— транзитивное 18
— эквивалентности 18
— $\prec$ 478
Отображение (функция) 20
— B-измеримое класса α 382
— подобия 33
Отображение-произведение 24, 31
Отрицание 9

Паракомпактное пространство 56
Пересечение множеств 10

Плотное в себе множество 83
Подбаза топологического пространства 58
Подобные (в комбинаторном смысле) системы множеств 131
— упорядочения 33
Подпокрытие 54
Покрытие пространства 54
Полиэдр 317
Полное метрическое пространство 415
Полунепрерывная многозначная функция 181
Полунепрерывное разбиение 194
Пополнение метрического пространства 420
Порядковое число 34
Порядковый тип 34
— — четный (нечетный) 375
Порядок значения B-измеримой функции 504
Предел обратного спектра 36, 166
— последовательности множеств ($\operatorname{Lim} A_n$) 347
— фильтра 68
Предельный порядковый тип 34
Продолжение отображения 20
Проективные множества 464
— функции высказываний 473
Проекция 193
Производное множество 81, 270
Прообраз множества 21
Просеивание через решето 41
Простой (невырожденный) комплекс 317
— — симплекс 314
Пространство 9
— близости 239
— веса $\aleph_0$ 59
— заведомо первой категории 525
— Линделёфа 56
— Тихонова 126
— удовлетворяющее первой аксиоме счетности 59
— Фреше 32
— $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 228, 418
— $2^{\mathscr{X}}$ 168
— $(2^{\mathscr{X}})_L$ 349
$\mathscr{L}^*$-пространство 197
$\mathscr{T}_0$-пространство 57
$\mathscr{T}_1$-пространство 44
$\mathscr{T}_3$-пространство 58
λ-пространство 526
ν-пространство 534
σ-пространство 532
Прямое произведение множеств 14
Прямолинейно достижимая точка 475
Псевдометрика 241
Псевдометрическое пространство 241

Равномерная структура 240
Равномерно непрерывное отображение пространств близости 240
Разбиение 21
— пространства 192
Разложение границы 73, 74
Разложимое множество 102, 267
Размерностное ядро пространства 307
Размерность пространства 282, 313
Разность множеств 10
— — симметричная 10
Разреженное множество 84
Расстояние 213
— между множествами (dist (A, B)) 223
Регулярная система множеств 37
Регулярное пространство 57
Результат $(\mathscr{A})$-операции 37
— $\mathscr{M}$-операции 367
Ретракт 112
Ретракция 112
Решето Лузина 41, 476

Свойство Бэра в узком смысле 98
— — — — — для отображений 412
— — — широком смысле 93
— — отображения 408
— C 537
— C″ 536
— L 534
— λ' 530
Семейство аналитически представимых функций 401
— определяющее размерность пространства 308
— подмножеств данного множества 13
— — — — аддитивное 14
— — — — наследственное 14
Сепарабельное пространство 72
Сеть 212
Сечение прямого произведения 150
Сильно непрерывное отображение 125
Симплекс 314
Слабо n-мерное пространство 308
Совершенное множество 83
Сосредоточенное пространство 535
Составляющая высказывания 329
Составляющие (конституанты) (CA)-множества 509
Составное отображение 24, 31
Строго монотонное семейство множеств 274, 275

Структурно нормальная структура 180
— регулярная структура 180
Сужение отображения 20
Существование неборелевских множеств 355
Сходящийся фильтр 68
Счетно-компактное пространство 55
— $\mathscr{L}^*$-пространство 202

Теорема Александрова 419
— Александрова — Хаусдорфа 459
— Банаха — Куратовского 542
— Банаха — Мазура 250
— Бернштейна 524
— Больцано — Вейерштрасса обобщенная 348
— Бэра 425
— Веденисова 141
— Егорова 542
— Кантора 424
— Кантора — Бендиксона 261, 271
— Лаврентьева 439
— Лебега — Хаусдорфа 402
— Линделёфа 60
— Лузина 92
— — о покрытии 511
— Лузина — Серпинского 510
— Мазуркевича 453
— Никодима — Урысона 476
— обобщенная Пеано 158
— о полной метризации 419
— отделимости 289, 358, 495, 502
— — обобщенной (первая и вторая) 520
— Понтрягина — Нёбелинга 431
— продолжение Титце 134, 339
— — — обобщенная 158
— редукции 288, 358
— Серпинского — Зигмунда 433
— А. Стоуна 245
— Улама 91
— Урысона 249
— Хаусдорфа 420, 496
— Цермело 34
Тип непрерывности 439
Тихоновская топология 154
Топологическая группа 121
— эквивалентность 118
Топологически полное пространство 415
Топологический автоморфизм 117
— ранг 119
Топологическое пространство 44
Топологическое свойство 117
$\varkappa$-топология 183
λ-топология 183
Точка конденсации множества 260
— накопления 81
— порядка m 262
Трансфинитная индукция 34

Ультрафильтр 14
Универсальная функция 376, 471
Уолменовская структура 180
Упорядочение 33
Упорядоченное множество 33
Условие Хедрика 63
— D_n 304

Факторсемейство 19
Фактортопология 193
Фильтр 14
— максимальный (ультрафильтр) 14
— собственный 14
Формулы Моргана 10
— — обобщенные 11, 13
Фундаментальная последовательность 415
Функции высказываний 11
— — многих переменных 15
— — класса F_α (G_α) 371
— классов A и CA 522

Характеристическая функция множества 29, 115
Хаусдорфово пространство 56

Центрированное семейство множеств 14

Частично упорядоченное множество 33
Число $\alpha(A)$ 422
— $\rho(A, B)$ 218

Шар в метрическом пространстве 213

Эквивалентные множества 28
Экспоненциальная топология 168
Элемент полунепрерывности разбиения 194
Элементарные функции высказываний 517
Эффективность 261, 380, 405, 427, 525

Ядро пространства 84

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адисон (Addison J. W.) 479, 490, 495, 544, 552
Александров П. С. 36, 50, 57, 72, 118, 125, 128, 136, 183, 194, 197, 245, 282, 313, 315, 316, 326, 327, 337, 419, 453, 459, 473, 552, 553
Алексевич (Alexiewicz A.) 549, 551, 553
Алексич (Alexits G.) 446, 553
Альбукерк (Albuquerque J.) 66, 553
Антоновский М. Я. 199, 553, 579
Аренс (Arens R.) 56, 553
Ароншайн (Aronszajn N.) 439, 553
Архангельский А. В. 122, 245, 553
Ауль (Aull C. E.) 57, 553
Ауэрбах (Auerbach) 431

Банах (Banach S.) 87, 119, 120, 250, 397, 403, 431, 443, 473, 501, 542, 548—554
Безикович С. 508, 535, 554
Бендиксон (Bendixson L.) 261, 554
Берж (Berge C.) 183, 554
Бернштейн (Bernstein F.) 262, 524, 525, 554
Бет (Beth W. E.) 545, 554
Бинг (Bing R. H.) 139, 245, 554
Биркгоф (Birkhoff G.) 80, 212, 554
Блейк (Blake A.) 545. 554
Бокштейн М. Ф. 264, 554
Болтянский В. Г. 311, 553
Борель (Borel E.) 53, 203, 262, 537, 554
Борсук (Borsuk K.) 112, 252, 431, 551, 555
Бресслер (Brassler D. W.) 489, 555
Браун М. (Brown M.) 186
Браун С. (Braun S.) 428, 439, 508, 555
Брауэр (Brouwer L. E. J.) 282, 320, 321, 453, 546, 555
Брюнс (Bruns G.) 212, 555
Булиган (Bouligand G.) 183, 555
Бурбаки (Bourbaki N.) 14, 30, 56, 57, 68, 193, 240, 549, 555
Бэр (Baire R.) 86, 93, 97, 183, 220, 266, 379, 401, 403, 409, 425, 430, 555

Важевский (Wazewski T.) 348, 555
Вайдинатхасвами (Vaidyanathaswamy R.) 555
Вайнштейн И. А. 434, 443, 555
Валле-Пуссен (Vallée-Poussin Ch. de la) 397, 405, 555
Варашкевич (Waraszkiewicz Z.) 434, 439, 556
Веденисов Н. 140, 313, 556
Вейерштрасс (Weierstrass K. F.) 228
Вейль (Weil A.) 240, 556
Витали (Vitali G.) 96, 556
Вопенка (Vopenka P.) 313, 556
Вулих Б. З. 549, 559
Вьеторис (Vietoris L.) 57, 168, 556, 574

Гагаев (Gagaeff B.) 384, 396, 556
Галчинская-Карлович (Gałczyńska-Karłowicz) 71
Гейтинг (Heyting A.) 546, 556
Гельфанд И. М. 550, 556
Генба (Gęba K.) 551, 556
Гёдель (Gödel K.) 490, 556
Гжегорчик (Grzegorczyk A.) 544, 548, 556
Гилман (Gillman L.) 164, 556
Гильберт (Hilbert D.) 67, 214, 557
Гранас (Granas A.) 551, 556, 557
Гримайзен (Grimeisen G.) 212, 557
де Гроот (de Groot J.) 248, 557
Гросс (Gross W.) 271, 557
Гуревич (Hurewicz W.) 131, 184, 282, 297, 299, 300, 302, 308, 309, 311, 313, 323—325, 327, 431, 457, 490, 557, 558

Данжуа (Denjoy A.) 85, 86, 557
Данциг (van Dantzig) 119, 558
Даукер (Dowker C. H.) 134, 313, 558
Дей (Day M. M.) 68, 558

Джерисон (Jerison M.) 164, 556
Диксмье (Dixmier J.) 76, 558
Дугундьи (Dugundji J.) 56, 134, 553, 558
Дьедонне (Diedonné J.) 152, 558
Дэвис (Davis M.) 544, 558
Дюбуа-Реймон (du Bois-Reymond P.) 71, 558

Ефимов Б. А. 262, 579
Ефремович В. А. 219, 239, 558

Жордан (Jordan C.) 60, 558

Завадовский (Zawadowski W.) 572
Зальцвассер (Zalcwasser Z.) 268, 527, 558
Заранкевич (Zarankiewicz K.) 348, 366, 558
Зарелуа А. 325, 558
Зарицкий (Zarycki M.) 61, 66, 81, 84, 558
Зейферт (Seifert H.) 559
Зигмунд (Sygmund A.) 433, 550, 559, 571
Зоргенфрей (Sorgenfrey R. H.) 152, 559
Зоретти (Zoretti L.) 343, 559, 569

Исбелл (Isbell J. R.) 239, 559
Исеки (Iseki K.) 44, 559
Ист (Van Eest) 128, 559

Кантор (Cantor G.) 32, 49, 60, 81, 83, 84, 158, 203, 261, 262, 270, 380, 424, 559
Канторович Л. В. 464, 479, 486, 522, 549, 559
Картан (Cartan H.) 14
Катетов (Katetov M.) 131, 139, 152, 164, 313, 559
Качмаж (Kaczmarz) 431
Келдыш Л. В. 379, 443, 560
Келли (Kelley J. L.) 34, 58, 82, 86, 136, 152, 193, 195, 212, 560
Кемписти (Kempisty S.) 397, 560
Кернс (Cairns S. S.) 560
Кли (Klee V.) 473, 560
Клини (Kleene S. C.) 479, 543, 544, 548, 552, 560
Кнастер (Knaster B.) 64, 262, 309, 318, 321, 560
Ковальский (Kowalsky H. J.) 135, 212, 560
Колмогоров А. Н., 57, 486, 549, 560
Кондо (Kondô M.) 502, 560
Коэн (Cohen P. J.) 35, 579
Красносельский М. А., 551, 560
Кунугуи (Kunugui K.) 233, 309, 560
Куратовский (Kuratowski K.) 9, 17, 34, 44, 48, 63, 79, 94, 120, 131, 153, 180, 181, 183, 194, 229, 233, 239, 253—257, 259, 262, 270—273, 288, 318, 321, 327, 329, 339, 361, 363, 367, 371, 380, 382, 383, 387, 388, 393, 405, 408, 409, 419, 422, 431, 436, 443—447, 458, 461, 462, 471, 473, 476—480, 483, 486, 490, 506, 510, 513, 518, 521, 524, 526, 535, 542, 548, 554, 560—562, 566, 567, 571, 574, 578

Лаврентьев М. А. 439, 441, 442, 464, 562
Лангфорд (Langford C. H.) 546, 563
Лебег (Lebesque H.) 79, 93, 96, 97, 158, 262, 323, 354, 373, 377, 382, 384, 387, 402, 483, 493, 500, 562
Левин (Levine N.) 76, 562
Левшенко Б. 325, 562
Лере (Leray J.) 551, 562
Лефшец (Lefschetz S.) 339, 562
Лнвенсон Е. М. 464, 479, 486, 559
Линделёф (Lindelöf E.) 60, 260, 261, 562
Линденбаум (Lindenbaum A.) 213, 434, 436, 563
Локуциевский О. 313, 563
Лузин Н. Н. 37, 41, 92, 99, 265, 356, 373, 379, 458, 464, 471, 476, 477, 479, 483, 493, 495, 500, 502, 504, 508—513, 528, 532, 534, 539, **563**, 573
Лунц А. 313, 563
Льюис (Lewis C. I.) 546, 563
Любен (Lubben R. G.) 348, 563
Люстерник Л. А. 551, 563
Ляпунов А. А. 486, 521, 563

Мазур (Mazur S.) 250, 549, 550, 564
Мазуркевич (Mazurkiewicz S.) 64, 318, 321, 431, 434, 441, 453, 455, 476, 490, 491, 530, 532, 560, 564
Майкл (Michael E.) 152, 168, 169, 176, 180, 183, 245, 367, 564
Макки (Mackey G. W.) 462, 564
МакКинси (McKinsey J. C. C.) **44**, 48, 180, 546, 547, 564
МакШейн (McShane E. J.) 212, 564
Мало (Mahlo P.) 119, 524, 565
Мамузич (Mamuzič Z. P.) 565
Мартин (Martin A. V.) 245, 565
Марчевский (Marczewski E.) 164, 264, 565
Матоба (Matoba K.) 76, 577

Менгер (Menger K.) 138, 282, 285, 297, 299, 303, 307—311, 565
Микусинский (Mikusiński J.) 549, 565
Монтгомери (Montgomery D.) 121, 127, 367, 388, 393, 565
Монтейро (Monteiro A.) 44, 50, 565
Морита (Morita K.) 131, 152, 245, 313, 565
Мостовский (Mostowski A.) 544, 545, 566
Мрувка (Mrówka S.) 164, 212, 239, 241, 242, 566, 578
Мур Р. (Moore R. L.) 194, 415, 566
Мур Э. (Moore E. H.) 44, 183, 212, 566

Нагами (Nagami K.) 367, 566
Нагата (Nagata J.) 245, 566
Нейбауэр (Neubauer M.) 523, 566
фон Нейман (von Neumann J.) 486, 549, 566
Немыцкий В. В. 128
Нёбелинг (Nöbeling G.) 44, 58, 180, 566
Никодим (Nikodym O.) 99, 408, 476, 479, 566, 567
Нитка (Nitka W.) 253, 567
Новак (Novák J.) 127, 567
Новиков П. С. 490, 493, 495, 520, 521, 563, 567
Ньюман (Newman M. H. A.) 221, 567

Окстоби (Oxtoby J. C.) 86, 151, 567
Орей (Orey S.) 545, 567
Орлич (Orlicz) 431, 549, 564, 567
Отто (Otto E.) 301, 303, 567

Пасынков Б. А. 313, 567
Паттерсон (Patterson E. M.) 567
Пеано (Peano G.) 158, 567
Пенлеве (Painlevé P.) 343, 567
Пинскер А. Г. 549, 559
Позамент (Posament T.) 361, 363, 567
Помпейю (Pompéju D.) 223, 568
Пондичери (Pondiczery E.) 164, 568
Пономарев В. И. 183, 568
Понтрягин Л. С. 121, 127, 311, 568
Попруженко (Poprougénko G.) 303, 535, 537, 568
Проскуряков Ю. М. 313, 568
Пуанкаре (Poincaré H.) 116, 282, 326, 568

Расёва (Rasiowa H.) 44, 545, 547, 568
Ренни (Rennie B. C.) 180, 568
Рибейро (Ribeiro H.) 68, 568
Ригер (Rieger L.) 545, 568
Рисс (Riesz F.) 44, 569
Робертс (Roberts J. H.) 415, 569
Роджерс (Rogers C. A.) 489, 569
Розенталь (Rosenthal A.) 569, 576
Рой (Roy P.) 313, 569
Ротбергер (Rothberger F.) 531, 532, 536, 569
Рунге (Runge) 337, 569
Рыль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.) 480, 545, 569

Сакс (Saks S.) 204, 259, 431, 506, 507, 534, 551, 569
Сампеи (Sampei I.) 493, 502, 513, 569
Сарымсаков Т. А. 553
Себаштиан-и-Сильва (Sebastiaõ-e-Silva) 56, 569
Селивановский (Selivanowski E.) 264, 569
Семадени (Semadeni Z.) 84, 569
Серпинский (Sierpiński W.) 37, 39, 50, 63, 72, 86, 92, 94, 99, 239, 248, 250, 262, 264, 265, 270, 271, 274, 290, 292, 296, 352, 354, 356, 358, 364, 373, 376, 380, 382, 390, 393, 397, 413, 415, 428, 433, 434, 436, 438, 439, 441, 443, 444, 446, 458, 464, 466, 477, 490, 491, 493, 495, 501, 506, 510, 513, 519, 524, 527, 528, 530, 531, 532, 535, 537, 539, 542, 563, 564, 569—572
Сикорский (Sikorski R.) 44, 124, 256, 545, 547, 568, 572
Симмонс (Simmons G. F.) 572
Сион (Sion M.) 489, 555, 572
Сирота (Shirota T.) 164, 572
Скляренко Е. 325, 572
Скотт (Scott D.) 480, 572
Словиковский (Słowikowski W.) 572
Смирнов Ю. М. 239, 241, 245, 313, 325, 572
Смит (Smith H. L.) 183, 212, 566
Соболев С. Л. 549, 572
Спенсер (Spencer G. L.) 576
Стинрод (Steenrod N.) 36, 573
Стоилов (Stoïlow S.) 122, 573
Стоун А. (Stone A. H.) 61, 245, 458, 501, 573
Стоун М. (Stone M. H.) 80, 545, 546, 573
Стразер (Strother W. L.) 183, 573
Судзуки (Suzuki J.) 502, 573
Суслин М. 37, 464, 490, 497, 500, 573

Тайманов А. Д. 443, 573
Такки (Tukey V. W.) 212, 573
Тан Цяо-чен (Tang Tsao-Chen) 547, 573

Тарский (Tarski A.) 17, 44, 48, 80, 84, 180, 371, 473, 546, 547, 564, 573, 574
Титце (Tietze H.) 57, 128, 134, 136, 574
Тихонов А. Н. 126, 129, 154, 183, 551, 574
Трельфалль (Threlfall W.) 559
Трон (Thron W. J.) 57, 553
Тугуе (Tugué T.) 486, 574
Тулмин (Toulmin C. H.) 325, 574
Тумаркин Л. А. 285, 297, 299, 300, 307, 308, 441, 574

Уайберн (Whyburn G. T.) 122, 125, 194, 195, 309, 574
Уилсон (Wilson W. A.) 213, 574
Улам (Ulam S.) 86, 91, 92, 153, 255—257, 542, 567, 574
Уоллес (Wallace A. D.) 72, 122, 124 574
Уолмен (Wallman H.) 180, 282, 311, 557, 575
Урысон П. С. 72, 126, 132, 134, 136, 139, 140, 197, 199, 245, 249, 250, 282, 285, 295, 297, 300, 303, 308, 348, 453, 476, 553, 575
Успенский В. А. 544, 548, 576

Ферсс (Veress P.) 384, 575
Флаксмайер (Flachsmeyer J.) 212, 575
Фокс (Fox R. H.) 209, 575
Франц (Franz W.) 575
Фрейденталь (Freudenthal H.) 128, 559
Фреше (Fréchet M.) 44, 63, 67, 72, 85, 119, 197, 198, 213, 222, 228, 245, 415, 575
Фринк (Frink O.) 168, 176, 180, 575
Фролик (Frolik Z.) 212, 489, 575

Халмош (Halmos P. R.) 80, 575
Хан (Hahn H.) 93, 183, 206, 220, 229, 396, 417, 509, 575, 576
Ханаи (Hanai S.) 245, 565, 576
Ханнер (Hanner O.) 134, 576
Хартман (Hartman S.) 480, 576
Хаусдорф (Hausdorff F.) 37, 53, 59, 67, 101, 106, 108, 213, 218, 220, 223, 224, 253, 263, 268, 342, 343, 345, 348, 353, 393, 394, 402, 405, 415, 419, 420, 424, 428, 443, 445, 454, 457, 459, 464, 486, 495, 522, 527, 576
Хедрик (Hedrick E. R.) 63, 576
Хелмберг (Helmberg G.) 212, 576
Хеммер (Hammer P. C.) 44, 48, 49, 61, 576
Хилгерс (Hilgers A.) 311, 576
Хилтон (Hilton P. J.) 26, 576
Хокинг (Hocking J. D.) 576
Холл (Hall D. W.) 576
Хопф (Hopf H.) 57, 125, 128, 315, 316, 337, 553
Хьюит (Hewitt E.) 127, 164, 576

Циппин (Zippin L.) 121, 127, 565, 577

Чассар (Császár A.) 240, 577
Чепмен (Chapman T. A.) 48, 76, 577
Чех (Čech E.) 47, 130, 139, 140, 313, 577
Читтенден (Chittenden) 245, 577
Чода (Choda H.) 76, 577

Шаудер (Schauder J.) 501, 551, 562, 577
Шварц (Schwartz L.) 549, 577
Шенфлис (Schönflies A.) 524, 577
Шеффер (Scheeffer L.) 524, 577
Шмидт (Schmidt J.) 212, 555, 577
Шнейдер В. Е. 489, 577
Шнирельман Л. Г. 551, 563
Шоке (Choquet G.) 168, 212, 489, 578
Шпернер (Sperner E.) 318, 578
Шпильрайн-Марчевский (Szpilrajn-Marczewski E.) 33, 86, 94, 95, 99, 101, 264, 370, 396, 471, 530, 532, 535, 537, 538, 541, 542, 564, 568, 578
Шрёдер (Schröder E.) 17, 578
Штейнгауз (Steinhaus H.) 431, 550, 554, 578

Эйленберг (Eilenberg S.) 36, 301, 567, 573
Энгелькинг (Engélking R.) 164, 190, 345, 379, 578
Эрдёш (Erdös P.) 311, 578

Юнг (Young W. H.) 52, 60, 82, 260, 267, 353, 455, 576, 578

Янишевский (Janiszewski S.) 73, 578
Янковский (Jankowski A.) 551, 556

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 5
Предисловие к первому тому 7

ВВЕДЕНИЕ 9

§ 1. Операции логики и теории множеств 9

I. Алгебра логики. II. Алгебра множеств. III. Функции высказываний. IV. Операция **E**. V. Бесконечные операции на множествах. VI. Семейство всех подмножеств данного множества. VII. Идеалы. Фильтры.

§ 2. Прямое произведение множеств 14

I. Определение. II. Свойства прямого произведения. III. Оси, координаты, проекции. IV. Функции высказываний многих переменных. V. Связь между операторами **E** и **V**. VI. Умножение на ось. VII. Отношения. Факторсемейство. VIII. Конгруэнтность по модулю идеала.

§ 3. Отображения. Упорядочения. Кардинальные и порядковые числа 20

I. Терминология и обозначения. II. Образы и прообразы. III. Операции над образами и прообразами. IV. Коммутативные диаграммы. V. Многозначные отображения. VI. Множества одинаковой мощности. Кардинальные числа. VII. Характеристические функции. VIII. Обобщенное прямое произведение. IX. Примеры счетных произведений. X. Упорядочение. XI. Вполне упорядоченные множества. Порядковые числа. XII. Множество $X^{\aleph_\alpha}$, XIII. Обратные спектры и их пределы. XIV. ($\mathcal{A}$)-операция. XV. Решето Лузина. XVI. Применение к канторову дисконтинууму $\mathcal{C}$.

ГЛАВА 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА 44

§ 4. Определения. Операция замыкания 44

I. Определения. II. Геометрическая интерпретация. III. Правила топологического исчисления. IV. Относительное замыкание. V. Логический анализ системы аксиом.

§ 5. Замкнутые и открытые множества 49

I. Определения. II. Операции. III. Свойства. IV. Относительно замкнутые и относительно открытые множества. V. Множества типа F_σ и G_δ. VI. Борелевские множества. VII. Покрытие пространства. Измельчение. VIII. Хаусдорфовы пространства. IX. $\mathcal{T}_0$-пространства. X. Регулярные пространства. XI. База и подбаза.

§ 6. Граница и внутренность множества 60

I. Определения. II. Некоторые формулы. III. Связь с замкнутыми и открытыми множествами. IV. Теорема аддитивности. V. Отделимые множества. VI. Двойственность между операциями замыкания и взятия внутренности множества.

§ 7. Окрестность точки. Локализация свойств 66

I. Определение. II. Необходимые и достаточные условия. III. Сходящиеся фильтры. IV. Локализация. V. Локально замкнутые множества.

§ 8. Всюду плотные, граничные и нигде не плотные множества . . 71

I. Определения. II. Необходимые и достаточные условия. III. Операции. IV. Разложение границы. V. Множества, открытые по модулю нигде не плотных множеств. VI. Относительные свойства. VII. Локализация. VIII. Замкнутые области. IX. Открытые области.

§ 9. Точки накопления 81

I. Определения. II. Необходимые и достаточные условия. III. Некоторые формулы. IV. Дискретные множества. V. Множества, плотные в себе. VI. Разреженные множества.

§ 10. Множества первой категории 86

I. Определение. II. Свойства. III. Теорема единственности. IV. Относительные свойства. V. Локализация. VI. Формулы разложения.

§ 11. Множества, открытые относительно множеств первой категории. Свойства Бэра 92

I. Определение. II. Общие замечания. III. Операции. IV. Необходимые и достаточные условия. IVa. Теорема существования. V. Относительные свойства. VI. Свойство Бэра в узком смысле. VII. $(\mathcal{A})$-операция.

§ 12. Знакочередующиеся ряды замкнутых множеств 101

I. Формулы общей теории множеств. II. Определение. III. Теоремы отделимости. Разложение в знакочередующийся ряд. IV. Свойства остатка. V. Необходимые и достаточные условия. VI. Свойства разложимых множеств. VII. Вычеты. VIII. Вычеты трансфинитного порядка.

§ 13. Непрерывность. Гомеоморфизм 108

I. Определение. II. Необходимые и достаточные условия. III. Множество $D(f)$ точек разрыва. IV. Непрерывные отображения. V. Относительные свойства. Сужение. Ретракция. VI. Вещественнозначные функции. Характеристические функции. VII. Взаимно однозначные непрерывные отображения. Сравнение топологий. VIII. Гомеоморфизм. IX. Топологические свойства. X. Топологический ранг. XI. Однородные множества. XII. Приложения к топологическим группам. XIII. Открытые отображения. Замкнутые отображения. XIV. Отображения, открытые и замкнутые в данной точке. XV. Взаимно непрерывные отображения.

§ 14. Вполне регулярные пространства. Нормальные пространства . 126

I. Вполне регулярные пространства. II. Нормальные пространства. III. Системы множеств, подобные в комбинаторном смысле, в нормальных пространствах. IV. Действительные функции, определенные на нормальных пространствах. V. Наследственно нормальные пространства. VI. Совершенно нормальные пространства.

§ 15. Прямое произведение $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ топологических пространств . . 143

I. Определение. II. Проекции и непрерывные отображения. III. Действия над прямыми произведениями. IV. Диагональ. V. Свойства отображения f, рассматриваемого как подмножество пространства $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$. VI. Горизонтальные и вертикальные сечения. Цилиндр на множестве $A\subset\mathscr{X}$. VII. Инварианты прямого произведения.

§ 16. Обобщенные прямые произведения 154

I. Определение. II. Проекции и непрерывные отображения. III. Действия над прямыми произведениями. IV. Диагональ. V. Инварианты прямого произведения. VI. Пределы обратных спектров.

§ 17. Пространство $2^{\mathscr{X}}$. Экспоненциальная топология 168

I. Определение. II. Основные свойства. III. Непрерывные многозначные отображения. IV. Случай, когда пространство $\mathscr{X}$ регулярно. V. Случай, когда пространство $\mathscr{X}$ нормально. VI. Связь пространства $2^{\mathscr{X}}$ со структурами и брауэровскими алгебрами.

§ 18. Полунепрерывные функции 181

I. Определения. II. Примеры. Связь с действительными полунепрерывными функциями. Замечания. III. Основные свойства. IV. Объединение полунепрерывных отображений. V. Пересечение полунепрерывных отображений. VI. Разность полунепрерывных отображений.

§ 19. Пространство разбиения. Фактортопология 192

I. Определение. II. Проекции. Связь с взаимно непрерывными отображениями. III. Примеры и замечания. IV. Связь фактортопологии с экспоненциальной топологией.

ГЛАВА 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА 197

А. Связь с топологическими пространствами. $\mathscr{L}^*$-пространства 197

§ 20. $\mathscr{L}^*$-пространства (в которых определено понятие предела) . . 197

I. Определение. II. Связь с топологическими пространствами. III. Понятие непрерывности. IV. Прямое произведение $\mathscr{L}^*$-пространств. V. Счетно-компактные $\mathscr{L}^*$-пространства. VI. Непрерывная сходимость. Множество $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ как $\mathscr{L}^*$-пространство. VII. Операции над пространствами $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ с $\mathscr{L}^*$-топологией. VIII. Непрерывная сходимость в узком смысле. IX. Сходимость Мура — Смита (основные определения).

§ 21. Метрические пространства. Общие свойства 213

I. Определения. II. Топология в метрических пространствах. III. Диаметр. Непрерывность. Колебание. IV. Число $\rho(A, B)$. Обобщенный шар. Нормальность метрических пространств. V. Ограничивающее отображение. VI. Метризация прямого произведения. VII. Расстояние между двумя множествами. Пространство $(2^{\mathscr{X}})_m$. VIII. Вполне ограниченные пространства. IX. Эквивалентность между счетно-компактными и компактными метрическими пространствами. X. Равномерная сходимость. Метризация пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. XI. Продолжение относительно замкнутых и относительно открытых множеств. XII. Измельчение бесконечных покрытий. XIII. G_δ-множества в метрических пространствах. XIV. Пространства близости. Равномерные пространства (основные определения). XV. Псевдометрические пространства. XVI. Паракомпактность метрических пространств. XVII. Проблемы метризации.

§ 22. Пространства со счетной базой 247

I. Общие свойства. II. Метризация и введение координат. III. Сепарабельность пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. IV. Отождествление замкнутых множеств. V. Произведение пространств со счетной базой. Множества первой категории. VI. Произведения пространств со счетной базой. Свойство Бэра.

Б. Проблемы мощности 259

§ 23. Мощность пространства. Точки конденсации 259

I. Мощность пространства. II. Плотное подмножество. III. Точки конденсации. IV. Основные свойства операции $\odot$. V. Разреженные множества. VI. Объединения разреженных множеств. VII. Точки порядка $\mathfrak{m}$. VIII. Понятие эффективности.

§ 24. Мощность различных семейств множеств 263

I. Семейства открытых множеств. Семейства множеств, обладающих свойством Бэра. II. Вполне упорядоченные монотонные семейства. III. Разложимые множества. IV. Производные множества порядка α. V. Логический анализ. VI. Семейства непрерывных функций. VII. Структура монотонных семейств замкнутых множеств. VIII. Строго монотонные семейства. IX. Связь строго монотонных семейств с непрерывными функциями. X. Строго монотонные семейства замкнутого порядкового типа.

В. Проблемы размерности 282

§ 25. Определения. Общие свойства 282

I. Определение размерности. II. Размерность подмножеств. III. Множество $E_{(n)}$.

§ 26. Нульмерные пространства 286

I. База пространства. II. Теоремы редукции и отделимости. III. Теоремы об объединении нульмерных множеств. IV. Продолжежение нульмерных множеств. V. Счетные пространства.

§ 27. Пространства размерности n 297

I. Теоремы об объединении. II. Отделимость замкнутых множеств. III. Разложение n-мерного пространства. Условие D_n. IV. Продолжение n-мерных множеств. V. Размерностное ядро. VI. Слабо n-мерное пространство. VII. Семейства, определяющие размерность. VIII. Размерность прямого произведения. IX. Непрерывные и взаимно однозначные отображения n-мерных пространств. X. Замечания по поводу теории размерности в применении к произвольным метрическим пространствам.

§ 28. Симплексы, комплексы, полиэдры 314

I. Определения. II. Топологическая размерность симплекса. III. Приложения к задаче о неподвижных точках. IV. Приложения к кубам $\mathcal{I}^n$ и $\mathcal{I}^{\aleph_0}$. V. Нерв системы множеств. VI. Отображения метрических пространств в полиэдры. VII. Аппроксимация непрерывных отображений отображениями $\varkappa$. VIII. Бесконечные комплексы и полиэдры. IX. Продолжение непрерывных функций.

Г. Счетные операции. Борелевские множества. B-измеримые функции . 343

§ 29. Нижний и верхний пределы 343

I. Нижний предел. II. Правила действий. III. Верхний предел. IV. Правила действий. V. Связь между пределами Li и Ls. VI. Предел. VII. Относительные свойства. VIII. Обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса. IX. Пространство $(2^{\mathcal{X}})_L$.

§ 30. Борелевские множества 352

I. Эквивалентность. II. Классификация борелевских множеств. III. Свойства классов $\boldsymbol{F}_\alpha$ и $\boldsymbol{G}_\alpha$. IV. Двусторонние борелевские множества. V. Разложение борелевских множеств на непересекающиеся множества. VI. Знакочередующиеся ряды борелевских множеств. VII. Теоремы редукции и отделимости. VIII. Относительно двусторонние множества. IX. Предельное множество двусторонних множеств. X. Локально борелевские множества.

$\mathcal{M}$-операция Монтгомери. XI. Вычисление классов с помощью логических символов. XII. Приложения. XIII. Универсальные функции. XIV. Существование множеств класса G_α не являющихся множествами класса F_α. XV. Проблема эффективности.

§ 31. B-измеримые отображения 382

I. Классификация. II. Необходимые и достаточные условия. III. Суперпозиция функций. IV. Сужения функций. V. Функции многих переменных. VI. Сложные функции. VII. График отображения $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. VIII. Предел функций. IX. Аналитическое представление. X. Теоремы Бэра о функциях первого класса.

§ 32. Функции, обладающие свойством Бэра 408

I. Определение. II. Необходимые и достаточные условия. III. Операции над функциями, обладающими свойством Бэра. IV. Функции, обладающие свойством Бэра в узком смысле. V. Связь с мерой Лебега.

ГЛАВА 3. ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА 415

§ 33. Определения. Общие свойства 415

I. Определения. II. Сходимость и фундаментальные последовательности. III. Прямое произведение IV. Пространство $(2^{\mathcal{X}})_m$. V. Функциональное пространство. VI. Полная метризация G_δ-множеств. VII. Пополнение метрического пространства.

§ 34. Последовательности множеств. Теорема Бэра 422

I. Коэффициент $\alpha(A)$. II. Теорема Кантора. III. Приложение к непрерывным функциям. IV. Теорема Бэра [1]. V. Приложения к множествам типа G_δ. VI. Приложения к множествам типа F_σ и G_δ. VII. Приложения к функциям первого класса. VIII. Приложения к теоремам существования.

§ 35. Продолжение функций 432

I. Продолжение непрерывных функций. II. Продолжение гомеоморфизмов. III. Топологическая характеризация полных пространств. IV. Внутренняя инвариантность различных семейств множеств. V. Приложения к топологическим рангам. VI. Продолжение B-измеримых функций. VII. Продолжение гомеоморфизма класса (α, β).

§ 36. Связь полных сепарабельных пространств с пространством $\mathcal{N}$ иррациональных чисел 448

I. $(\mathcal{A})$-операция. II. Отображения множества $\mathcal{N}$ в полные пространства. III. Взаимно однозначные отображения. IV. Теоремы разложения. V. Связь с канторовским множеством $\mathcal{C}$.

§ 37. Борелевские множества в полных сепарабельных пространствах 458

I. Связь борелевских множеств с пространством $\mathcal{N}$. II. Характеризация борелевских классов множеств с помощью обобщенных гомеоморфизмов. III. Разложение двусторонних множеств в знакочередующиеся ряды. IV. Малые классы Бореля.

§ 38. Проективные множества 464

I. Определения. II. Соотношения между проективными классами. III. Свойства проективных множеств. IV. Проекции. V. Универсальные функции. VI. Теорема существования. VII. Инвариантность. VIII. Проективные функции высказываний. IX. Инвариантность проективных классов относительно просеивания через решето и относительно $(\mathcal{A})$-операции. X. Трансфинитная индукция. XI. Операции Хаусдорфа.

§ 39. Аналитические множества 489

I. Общие теоремы. II. Аналитическое множество как результат $(\mathcal{A})$-операции. III. Первая теорема отделимости. IV. Приложения к борелевским множествам. V. Приложения к B-измеримым функциям. VI. Вторая теорема отделимости. VII. Порядок значения B-измеримой функции. VIII. Составляющие, или конституанты. CA-множества. IX. Проективные классы функций высказываний, включающих переменные порядковые типы. X. Теоремы редукции. XI. Функции классов A и CA.

§ 40. Вполне несовершенные и другие сингулярные пространства . . 523

I. Вполне несовершенные пространства. II. Пространства заведомо первой категории. III. λ-пространства. IV. Отображения. V. Свойство λ'. VI. σ-пространства. VII. ν-пространства, сосредоточенные пространства, свойство C. VIII. Связь со свойством Бэра в узком смысле. IX. Связь ν-пространств с общей теорией множеств.

ДОБАВЛЕНИЕ 543

I. Некоторые приложения топологии к математической логике. А. Мостовский 543

II. О приложениях топологии к функциональному анализу. Р. Сикорский 548

Литература 552

Предметный указатель 580

Именной указатель 584

К. Куратовский

ТОПОЛОГИЯ

Том 1

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художник *И. Д. Кричевский*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *М. П. Грибова*
Корректор *Е. С. Терентьева*

Сдано в производство 2/XI 1965 г.
Подписано к печати 7/IX 1966 г.
Бумага $60 \times 90^{1}/_{16}$ = 18,63 бум. л.
37,25 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 36,32. Изд. № 1/1756
Цена 2 р. 84 к. Зак. 2011
(Темплан 1966 г. изд-ва «М И Р», пор. № 9)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете
Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

2р. 84к.