О научном значении математических софизмов *).

Из Астрономического отделения Петроградского Научного Института имени П. Ф. Лесгафта.

Николай Морозов.

Деление угла на три равные части легко производится многими механическими приборами.

Самый старинный прибор приписывается авторами эпохи Возрождения (от которых мы его получили) Никомеду, жившему, как они утверждают, еще в дохристианскую эпоху и подлинных сочинений которого, конечно, нигде нет, и не было во все средние века. Это—трисекция всякого угла посредством линейки, скользящей по прямоугольному наугольнику, приставляемому к одной из сторон делимого угла.

Затем, вплоть до конца XIX века было указано не менее двадцати таких же механических приборов, из которых самым изящным мне представляются ромбически-соединенные линейки Laissant'a (1875 г.).

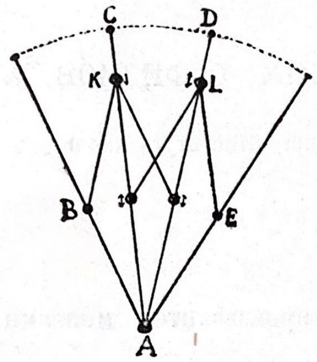
В этом инструменте (фиг. 1) соединены на общем шарнире A четыре линейки (B, C, D и E). Для того, чтобы при всевозможных величинах угла BAE, образуемых двумя внешними, раздвижными линейками BA и EA, средние линейки (C и D) делили его на три равные друг другу угла, первая из них C соединена с BA посредством стержня BK, равного BA, а вторая (D) соединена с EA таким же стержнем E, при чем оба стержня могут свободно сгибаться на шарнирах B и E. В средину этой системы введены еще два, такие же по величине, перекрещивающиеся стержня, так что из всего аппарата выходят два ромба, полуналегающие друг на друга.

Очевидно, что если четыре срединные шарнира (отмеченные стрелками) будут здесь свободно скользить, как кольца, по длинным линейкам

---

*) Несколько мыслей по поводу брошюры Э. Ван-Бейнингена „Трисекция угла" (Петроград, Тип. „Универсаль" М. И. Брикмана, Забалканский пр., 1918 г.), присланной 13 Августа 1918 г. Научным Отделом Народного Комиссариата по Просвещению в Петроградский Научный Институт имени П. Ф. Лесгафта с поручением дать о ней отзыв.

C и D по направлению стрелок, то при всех раздвижениях угла BAE, обе внутренние линейки будут делить его на три равные друг другу части. Очевидно также, что увеличивая число таких внутренних, перекрестно-ромбически-соединенных линеек, как C и D, мы достигнем и всякой вообще полисекции угла BAE при всех его изменениях.

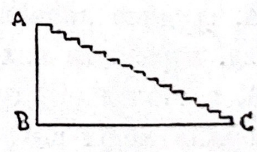


Фиг. 1.

Такого рода способы, конечно, интересны, но они не то, что требуется в общем плане построения Евклидовой геометрии, где циркуль и линейка служат только символами строго выдержанной системы чисто идеальных, а не практических действий, приводящих к самым важным выводам при исследованиях пространственных соотношений. Все попытки добиться трисекции угла этим, т. е., так называемым, „элементарным способом“, не привели ни к чему, и еще в 1775 году Французская Академия наук об'явила задачу мысленной триспекции угла посредством идеального циркуля и линейки неразрешимой и отказалась даже рассматривать предлагаемые ей диллетантами решения в этом роде.

Но всё же такие попытки, как и попытки решения квадратуры круга, до сих пор не прекратились, хотя при близком рассмотрении всегда оказывались софистическими. Человеческий интелект никак не может примириться ни с пространственными несоизмеримостями, ни с неразрешимостями в науке вообще.

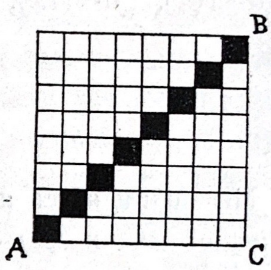
Однако и софизмы в математике нередко имеют научный интерес, так как обращают наше внимание на важные особенности математических методов или самих наших математических представлений и генезиса этих представлений в наших головах.



Фиг. 2.

Таков, например, софизм, которым доказывается, что гипотенуза прямоугольного треугольника равна сумме его катетов. Предположим, говорят нам, что вся она состоит из прямоугольных зигзагов (фиг. 2). Очевидно, что сумма ее мелких горизонтальных линий равна, при всяком их числе и величине, катету BC, а сумма вертикальных мелких линий равна катету AB; сумма же обоих этих родов зигзагов равна сумме обоих катетов. Предположим, говорят нам далее, что эти зигзаги, бесконечно увеличиваясь в своем числе, например, удвоением, все уменьшаются соответственно, стремясь стать бесконечно малыми, т. е. обратиться в *математические точки*. Тогда наша гипотенуза в пределе обратится в прямую линию, т. е. вряд соприкасающихся друг с другом, геометрических точек, и притом все эти точки в пределе, очевидно, станут в один непрерывный ряд, что не трудно видеть, мысленно уменьшая зигзаги. Значит, говорят нам, гипотенуза прямоугольного треугольника равняется не корню квадратному из суммы квадратов обоих его катетов, как учит теорема Пифагора, а сумме их самих.

Такого рода софизмы, повторяю имеют значительный теоретический интерес. Из данного, например, ясно видно, что в количественные соотношения между собою могут быть приводимы только *однородные величины*, и что получаемая таким способом, как только что показано на чертеже, гипотенуза никогда не будет *однородной* с катетами, въ которых, все *линейные элементы* расположены *в одном и том же направлении* даже когда мы их считаем за простые геометрические точки.



Фиг. 3.

Особенно ясно это становится, когда в дополнение к только что приведенному софизму мы добавим еще такой.

Разделим квадрат клеточками на призвольное число квадратных единичек (фигура 3). Очевидно, что как малы ни были бы эти клеточки, все равно. Число их в диагональном ряду будет равно числу таких же клеточек в любой из сторон квадрата. Пределом уменьшения здесь будет доведение их до геометрических точек, и очевидно, что если мы будем продолжать считать здесь линию состоящей из соприкасающихся друг с другом геометрических точек или точечных элементов, то и диагональ квадрата, как линия, будет в пределе равна только одной его стороне, а не корню квадратному из суммы квадратов, построенных на двух его сторонах. Значит и всякая другая линия BA, наклоненная к линии AC, будет всегда равна опущенному на нее же перпендикуляру BC, стоит только сделать клеточки соответственно продолговатыми.

А вот и третий софизм. Допустив что наш квадрат служит основанием построенного на нем куба, мы получим по этому способу, что и диагональ куба равна его стороне, а не корню квадратному из суммы квадратов, построенных на трех его ребрах.

Все это, повторяю, имеет специфический теоретический интерес, отвергать который не следует.

Такие софизмы, как три только что приведенные, бросают для нас свет, между прочим, и на относительность наших представлений о величине всех об'ектов нашего математического исследования. Особенно ясно обнаруживается это в дифференциальной символистике. Возьмем например, от какой либо функции ряд дифференциалов все возрастающего порядка:

$$f(x); \qquad d\,f(x); \qquad d^2 f(x); \qquad d^3 f(x) \ldots\ldots$$

Не трудно заметить, что пользуясь этой условной транскрипцией (d^1, $d^2, d^3 \ldots$) для обозначения дифференциально-малых величин все более и более возрастающих порядков, мы можем на сколько угодно членов протянуть толко что приведенную строку не только вправо, как обычно делают, но и влево, введя отрицательные порядки дифференцирования (что, конечно, сводится ни к чему другому, как к интегрированию), то есть написав

$$\ldots\; d^{-3} f(x); \quad d^{-2} f(x); \quad d^{-1} f(x); \quad d^{0} f(x); \quad d^1 f(x); \quad d^2 f(x); \quad d^3 f(x); \ldots$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| $$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad f(x)$$

Мы видим здесь ясно, что каждый последующий дифференциал „безконечно“ мал в сравнении с предыдущим и „безконечно“ велик в сравнении с последующим, а сам по себе в отдельности от других, ни мал ни велик, а совершенно „конечен“. Кроме того, благодаря тому что строка эта продолжается без конца в обе стороны, правая часть ее как бы безконечно приближается к центру какой то трансцендентной спирали, никогда до него не достигая, а левая часть удаляется без конца в нериферию. Спирали этой (как и абсолютно прямой линии, на которой мы можем представить себе вытянутой эту строку) нет нигде конца, а потому нет и абсолютной точки опоры. Значит и область величин $d^0 f(x)$ то есть величин обычной, доступной нам функции $f(x)$ ничем исключительным не выделяется из остальных областей. Она выделяется нами только суб‘ективно, она конечна только для нашего мышления, а не абсолютно. А потому и делать по ней какие либо абсолютные выводы нельзя. „Абсолютным“ оказывается только закон „относительности“ всех „величин“ вообще.

Отсюда ясно, что если мы определим геометрическую линию как нечто, сложенное из „безконечно большого“ числа дифференциально малых линий первого порядка, то каждая из этих линий может быть рассматриваема в воображаемой „безконечно увеличивающій“ микроскоп, как совершенно такая же линия, сложенная из „безконечно большого“ числа дифференциальных линий следующего порядка, и т. д. и т. д. И никакого конца этому процессу нет, а также нигде нет и непрерывной, то есть окончательной, не дифференцируемой более, линейной единицы. Между дифференциалом самого высокого порядка и абсолютным пределом всегда лежит непроходимая бездна: тоже самое расстояние как и между обычной для нас величиной и полным ее отсутствием.

Понятие о сплошности линии получается только определением ее, как следа точки, движущейся в пространстве, но и здесь мы не выходим из заколдованного круга. Если геометрическая точка есть абсолютный нуль, т. е. „отсутствие всякого присутствия“, то „ничто“ не может оставить по себе и следа в пространстве, оно не может даже и двигаться. Если же геометрическая точка есть предел, к которому стремится бесконечно уменьшающийся об‘ем, то всякий об‘ем должен иметь какие нибудь очертания в пространстве, вроде куба, октаэдра, сферы и т. д. Но на основании только что сказанного всякое уменьшение такого об‘ема есть лишь относительное явление. Фигура стала меньше лишь по сравнению с предшествовавшим ее отражением в нашем уме, и при рассматривании ее в наш воображаемый микроскоп она осталась такой же точно, как была и прежде. Даже более того. Если увеличение этого микроскопа возрастает сильнее, чем воображаемое уменьшение фигуры, то она, вместо уменьшения, будет даже бесконечно возрастать, становясь более всякой, доступной нам величины. Как же мы можем здесь сказать, что исследуемый нами об‘ем стремится к абсолютному нулю, как к своему пределу? Нуль от него всегда остается „бесконечно“ далек. Приближение к нулю здесь только относительное сравнительно с расстоянием от него нашей исходной фигуры, оно только кажущееся.

Значит мир геометрических точек также богат формами и размерами, как и мир доступных для нашего непосредственного наблюдения конфигураций. А потому и следы от движения точек, т. е. геометрические линии, при той же самой своей длине, так же разнообразны, как и следы реально движущихся физических тел, и их нельзя сравнивать между собою, не принимая во внимание конфигурации их поперечных сечений, разнообразных в зависимости от того, от какой „точечной фигуры“ след они представляют. Да и вообще это динамическое определение линий хуже статического, так как геометрия a priori исключает из себя всякую динамику, впервые появляющуюся лишь в механике, когда к пространственным координатам мы прибавляем еще координату *времени* и от моментального состояния вселенной переходим к вечным изменениям ее жизни: к скачкам из одного элемента времени в другой элемент его, как на кинематографическом экране. Очень вероятно, что самое сознание наше кинематографично, т. е. перескакивает из одного элемента времени в другой, и все перемены происходят в промежутки между его потуханиями. С каждым новым элементом времени мы как бы пробуждаемся от сна и видим мир уже несколько изменившимся в промежуток нашей бессознательности, но неподвижным до новаго потухания нашего сознания. Иначе *настоящего времени* не было бы совсем: оно было бы лишь щель между рядами прошлых и будущих времен, т. е. совсем даже и не *время*. К такому же выводу приводит и математическая обработка астрономической хронологии: для правильности перехода в вычислении движений планет *до* и *после* начала какой либо эры летосчисления приходится вводить между ними специальный *нулевой год*, такой же как и все остальные т. е. с двенадцатью месяцами или 365 с дробью днями. Если же употреблять обычный исторический счет лет, т. е. за первым годом вперед, считать прямо первый год назад, без промежуточного нулевого, то в положении светил выходит *перечет* на один годъ назад. Тоже самое должно быть и в линиях при переходе от положительного счета их элементов к отрицательному, если сами элементы не повернулись при этом на полуоборот.

Проще всего было бы представлять себе прямую линию, как „бесконечно большой“ ряд соприкасающихся друг с другом дифференциально малых кубиков, а плоскость, как пластинку из „бесконечно большого“ числа таких же кубиков, вроде паркета, но тогда математическое выражение линий всегда окажется с двумя дифференциальными множителями ldydz.

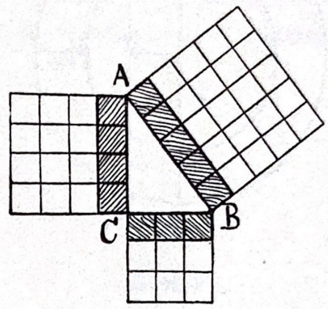
Если же мы не желаем вводить всюду таки дифференциальные коэффициенты, то нам, повидимому, ничего не остается делать, как признать у линий поперечные измерения равными условной, и в анализе даже переменной, единице их длины. В таком виде и получаются нами ребра куба, когда мы их определяем извлечением кубического корня из его об'ема, измеряемого все более и более малыми единицами. Грани же (поверхности) куба, вычисляемые, как вторые степени числа единиц в его ребрах, обязательно получаются, как пластинки, что не трудно видеть, рассекши первоначальную фигуру куба по трем осям на слои единичных кубиков.

Когда мы совершаем такой же процесс с квадратом на чертеже (фиг. 4), то в стороне его АВ, конечно, получаются не кубические, а квадратные единицы. Однако, третье измерение их тотчас же обнаруживается, как только мы помножим такой квадрат еще раз на число единиц в его основании, чтобы перейти от него к геометрическому кубу. Без третьяго измерения квадратных единиц мы, конечно, никакими помножениями не получили бы здесь куба.

К интересным результатам мы приходим, когда применяем это представление о геометрических линиях к некоторым пространственным их соотношениям. Возьмем хоть такой пример.

Среди подавляющего числа случаев, когда гипотенузы прямоугольных треугольников несоизмеримы с их катетами, есть целый ряд и других, где наблюдается рациональное соотношение. Таков простейший случай, когда в одном катете три, а в другом четыре единицы. Тогда гипотенуза будет в точности равна пяти единицам, а квадраты (фиг. 4), построенные на них, будут $9 + 16 = 25$.

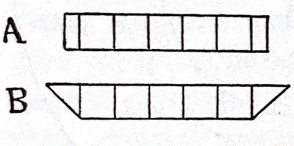
В результате извлечения корней из каждого члена в отдельности, здесь получаются три „ленточные“ линии. И как бесконечно ни дробили бы мы их единичные квадратики на новые, меньшие, все равно: при их рассматривании в наш воображаемый микроскоп на каждом угле будет надлом и выемка (фиг. 4). Дополнить эти выемки мы можем только продолжением внешних сторон всех „лент“ до пересечения, что дает для всех таких „ленточных“ линий дробные прибавки, и при том не с линейным дроблением по одной длине (фиг. 5, A), а с косым (фиг. 5, B). Косая же прибавка явно несоизмерима с линейной, так как не однородна с нею. Ведь ясно, что хотя прямые линейные прибавки на концах A и равны по площади косым прибавкам B на фиг. 5, но последние неизотезичны (несоизмеримы) с первыми по своей длине.



Фиг. 4.

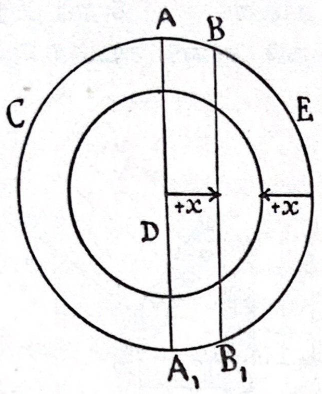
В этом источник и всех вообще несоизмеримостей, получающихся когда мы определяем линейные величины, где допускается дробление только по одному измерению, из величин второй степени, где дробление допустимо по двум, и из величин третьей степени, где оно происходит и по трем измерениям, не говоря уже о математических величинах высших степеней, не укладывающихся графически в трехмерном пространстве. Здесь несоизмеримости есть прямой результат неизотезичности сравниваемых величин, т. е. их неоднородности, хотя бы в концевых элементах.

На этом отсутствии изотезичности основаны все исторические недоразумения и относительно квадратуры круга.



Фиг. 5.

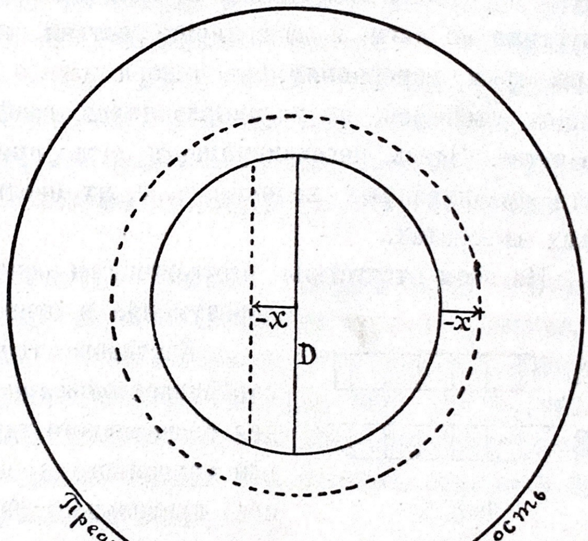
Евклидова геометрия и до сих пор рассматривает *криволинейную* окружность, как предел бесконечного удвоения *прямолинейных* сторон вписанного в нее (или описанного около нее) правильного многоугольника. Но несмотря на то, что при каждом удвоении сторон такого многоугольника, углы между его соприкасающимися сторонами (в противоположность случаю с гипотенузой приведенному на фиг. 2 и 3) приближаются к двум прямым углам, этот многоугольник все-таки никогда не станет тожественным с окружностью. Даже и бесконечно малые (так сказать, точечные) элементы окружности все же заключают в себе *элемент кривизны* (иначе из них никогда не составилась бы окружность). А при бесконечном удвоении сторон вписанного или описанного многоугольника сохраняется совсем другой тезис: *элемент ломаности*, так что и предельные элементы не изотезичны в обоих случаях. Поэтому и привести окружность в точное числовое соотношение с ее прямолинейным диаметром, считаемым в этом случае за единицу меры, нельзя, рассматривая обе эти линии без присутствия в них об'единяющего их элемента — ширины.



Фиг. 6.

Другое дело, если мы будем принимать во внимание этот элемент, т. е. будем приводить в количественное соотношение не сами линии, а площадь кольцевой полосы Ex (фиг. 6) с площадью равно широкой с ней и вписанной в окружность диаметрической полосы AA$_1x$, при всевозможных изменениях их ширины x, допуская для x положительное значение, при откладывании его вправо от идеального диаметра AA$_1$, и внутрь от идеальной окружности E, и отрицательные ($-x$) откладывая влево C от идеального диаметра (до $r = {}^1/_2$D) и снаружи идеальной окружности CE (фиг. 7).

В этом случае обе площади (Dx и Ex), сравниваемые исключительно по своей величине, окажутся однородными, и мы увидим, что их числовое соотношение не будет постоянным, а будет последовательно переходить через всевозможные, как рациональные, так и ирриниональные величины, как и всякая вообще математическая функция.



Фиг. 7.

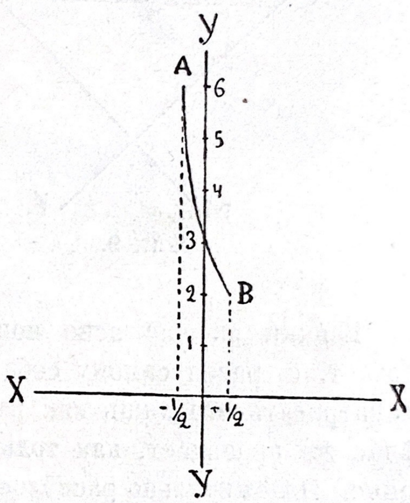
Первым пределом данной функции $\pi^s = f(x)$ будет при положительном значении x отношение всей площади круга к заключенной в нем диаметрической полосе с шириной x равной его радиусу, и очевидно:

$$\text{при } x = +r = +{}^1/_2;\ \pi_s = \frac{\pi r_2}{{}^1/_2 \pi r_2} = 2.$$

Второй предел (фиг. 7) будет:

$$\text{При } x - r = -{}^1/_2;\ \pi_s = \frac{\pi\,(-2\,r)^2 - \pi\,(-r)^2}{{}^1/_2\,\pi\,(-r)^2} = \frac{3}{({}^1/_2)} = 6.$$

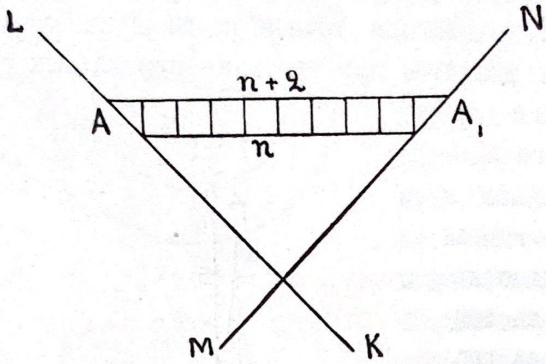
Для промежуточных же кольцеваний между этими пределами, при одних ширинах x, будут получаться рациональные соотношения, при других псевдоиррациональные, т. е. дающие точное соотношение лишь при недоступно малых дробных долях, и при третьих—переходных от одних рациональных соотношений к другим, к соседним,—будут получаться абсолютно иррациональные соотношения в том числе и для $x = 0$, как значения по самой своей природе иррационального. Все это даст особую трансцендентную функцию, выражающуюся графически кривой AB, при нимающей аллотропический вид f $(x\sqrt{-1})$, т. е. выходящей из плоскости чертежа вне расстояний $+{}^1/_2$ d и $-{}^1/_2$ d от начала координат (фиг. 8).



Фиг. 8.

Точно также и указанная нами обычная (за известными исключениями) иррациональность отношений гипотенузы прямоугольных треугольников к их катетам об'ясняется неоднородностью их концевых элементов, т. е. тем, что гипотенуза, как и всякое расстояние AA (фиг. 9), между *наклоненными* друг к другу линейными элементами линий LK и NM не однородна в своих концах с постоянным расстоянием AA (фиг. 10), между параллельными друг другу элементами двух линий LK и NM, хотя бы и говорилось, что как в конце A, так и в конце A_1 дело идет лишь о расстояниях между точками данных линий MN и KL. Даже и в этих „точках" сохраняется *элемент линейного наклона* (фиг. 9), и следовательно, верхние концы всех этих элементарно-линейных точек при их наклоне в 90° всегда на две *единички дальше друг от друга*, чем нижние их же концы. Значит, всегда остается невыясненным, считаем ли мы тут меньшее n, или большее $n + 2$ расстояние. Между тем, как при растояниях между параллельными (фиг. 10) линиями это все равно.

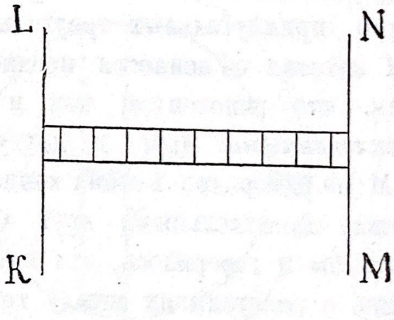
Однако и здесь мы получаем переходы через все ряды рациональных соотношений, если будем представлять и катеты, и гипотенузу как „равноширокие друг с другом полосы", налегающие своими конечными единицами друг на друга, как мы видели в примере с окружностью, или, если примем их за полосы, соприкасающиеся в концах посредством косых срезов, и будем сравнивать не их длины, а их площади. Точно также и все бесконечные непрерывные или непериодические дроби — это не числа, а функции вида $z = f\frac{y}{x}$, где отношение z между числителем y и знаменателем x постепенно переходит от одного предела к другому по мере одновременных возрастаний их числовых величин от 1 до ∞.



Фиг. 9.

Поучительны и софизмы, базирующиеся на возведении математических величин в степени. Простейший из них основан на двойственных результатах возведения линейно представимых величин во вторую степень.

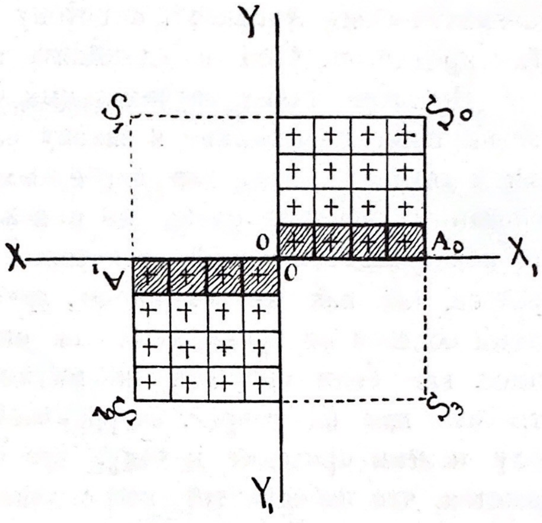
Всякий из нас ясно понимает, что радиус круга остается самим собою, т. е. равен самому себе во всех своих положениях, если мы будем рассматривать его лишь как растояние от центра до окружности, но это сейчас же пропадает, как только мы в нем примем во внимание направление. Положительно расположенный радиус дает в сумме с отрицательно расположенным радиусом алгебраический нуль. Поэтому имеет свою поучительность и общеизвестный софизм: „Если $(-1)^2 = (+1)^2$, то исходя из того основного положения, что извлечение корня *обратно* возведению в степень и потому даст *первоначальную*, а не какую либо *новую* (напр., иноэначную) величину, то мы и здесь по извлечении квадратного корня из обоих частей равенства получаем не $\pm 1 = \mp 1$, а в точности $-1 = +1$, откуда путем перенесения первого члена во вторую часть находим $0 = 2$, а при обратном перенесении — $2 = 0$.



Фиг. 10.

Этот софизм несомненно показывает, что извлечение корней в математике *не вполне обратно* возведению ее величин в соответствующие степени, что кроме простого математического действия здесь также есть и скачек к представлениям о величинах *иного, более сложного тезиса*, т. е. в геометрии к другим ориентировкам линий, или к другой размерности их единиц.

Так, взявши за исходное положение квадрата (фиг. 11) правый верхний квадрат (S0) чертежа мы можем получить из него не одну, а две отрицательные аллотропии: S_1 — полувернув его на оси YY_1, и S_3 — полуповернув на оси XX_1. И из каждой этой аллотропии можем получить таким же образом вторую, положительную S_2, повернув S^1 на оси XX_1 или S_3 на оси YY_1.



Фиг. 11.

Затем есть целый ряд софизмов, основанных на пережитках старинных односторонних представлений. Прежние основные идеи часто продолжают существовать в наших умах много времени послѣ того, как наука перешла уже к новым, более общим представлениям. Таков ряд софизмов, выводимых из формулы тяготения Ньютона, найденной этим великим мыслителем в то время, когда еще не существовало даже в зародыше учения об энергии. Благодаря этому в выводе своей формулы он руководствовался исключительно влиянием друг на друга „инертных масс", а дальнейшее развитие науки, приведшее к установлению понятия об энергии и о размерности физических факторов, создало, при применении их к формуле Ньютона, взятой без дополнительной аналитической обработки, к целому ряду головокружительных выводов.

Действительно, взяв, в общем виде эту формулу для трехмерного пространства

$$F = [K] \frac{M^2}{L^2}$$

и зная из энергетики, что функциональный состав всякой односторонне действующей силы есть

$$F = {}^1/_2 \frac{MV^2}{L}$$

находим, путем подстановки, что Гаусова константа [K] тяготения есть

$$[K] = \frac{MV^2\ L^2}{L\ \ M^2} = \frac{V^2\ L}{M}$$

А приравняв константу [K], как „постоянную величину", посредством соответствующаго подбора меры для определения тяготения, к единице, получаем

$$M = V^2\ L$$

т. е. масса физических тел есть уже не масса, а произведение квадрата, какой до скорости V, на какую то длину L. Как легко раз'ясняется этот исторический софизм, когда мы от представлений об „действующих друг на друга инертных массах“ переходим к современным энергетическим представлениям о природе физических тел, я показал еще в 1908 году во второй части своей книги „Основы Качественного Физико-математического Анализа“, а потому не буду здесь останавливаться над этим предметом, чтоб не удлиннять напрасно своей статьи.

Но кроме таких поучительных софизмов, обнаруживающих большею частью наше невнимание к закону изотетичности математических величин и дающих повод для серьезных размышлений, есть ряд других, основанных исключительно на неясности мысли автора и запутанности его исходных положений, в которых иногда чрезвычайно трудно разобраться, так как не понимаешь, зачем автор говорит то или другое, и каким образом от предыдущего он переходит к последующему. Это то же самое, как если спорщик на митинге вместо того, чтобы определенно ответить вам на вопрос, забрасывает вас фразами, не относящимися к делу и этим приводит к тому, что никто ничего уже не понимает, и кажется, что победил тот, кто сильнее кричитъ.

К какому из этих двух родов софизмов относится предлагаемая Э. Ван-Бейнингеном трисекция (или скорее полисекция) угла?

В данном случае дело идет о таком простом предмете — о делении любого данного угла на несколько частей посредством циркуля и линейки, что всякое удовлетворительное решение вопроса само должно бить в глаза. У автора же не то. Вместо того, чтобы просто показать читателю, хотя бы последовательным рядом чертежей: „если вы хотите разделить угол на три равные части, то возьмите циркуль и линейку, сделайте следующие графические построения и вы получите желаемое“, автор напоминает вам разные аксиомы, хотя и не требующие доказательства, но как вам кажется, совсем не относящиеся к делу, а затем какими то, непонятными для вас, скачками от формулы к формуле доходит до желаемого им вывода.

Здесь все признаки софизма второго рода, т. е. мало интересного с научной точки зрения.

Именно от разбора таких софизмов и открещиваются серьезные математики, так как ни у кого нет охоты терять несколько невозвратных дней над неблагодарной задачей доказать человеку, которому вы не желаете никакого зла, что он ошибся.

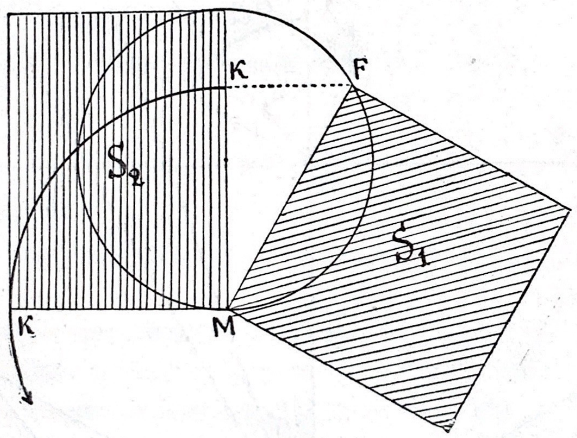
Вот почему и я, исполняя поручение Комиссариата по Народному Просвещению, данное Научному Институту имени Лесгафта, ограничусь только указанием на то, что метод Э. Ван-Бейнингена дает неверные результаты, предоставив самому автору отыскивать причину этого.

Теорема Пигафора „квадрат, построенный на гипотенузе, равен сумме квадратов, построенных на обоих катетах“, приводит, для вписанных в круг углов, к очень интересным результатам. Здесь квадрат, построенный на хорде MF диаметрально вписанного в круг угла KMF (фиг. 12) равен диаметру круга, помноженному на отрезок от вершины этого угла M до места K падения на диаметр перпендикуляра из второго конца F данной хорды, т. е.

$$MF^2 = 2\,r\,MK \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

т. е. что обе заштрихованные на чертеже площади S_1 и S_2 равны при всех величинах угла M.

Возьмем такой вписаный угол M в 30°. Тогда соответствующий ему центральный угол будет $= 60°$, т. е. будет равен одному из шести



Фиг. 12.

центральных углов вписанного в круг правильного шестиугольника со стороной, равной радиусу ($r = 1$).

Не трудно убедиться, что (фиг. 12) для этого случая

$$MK = r + {}^1\!/_2\, r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2)$$

Внеся это в формулу (1) получим:

$$MF^2 = 2\,r\,(r + {}^1\!/_2\, r) = 2\,r^2 + r^2$$

Но, как видно из чертежа 13,

$$2\,r^2 = BH^2.$$

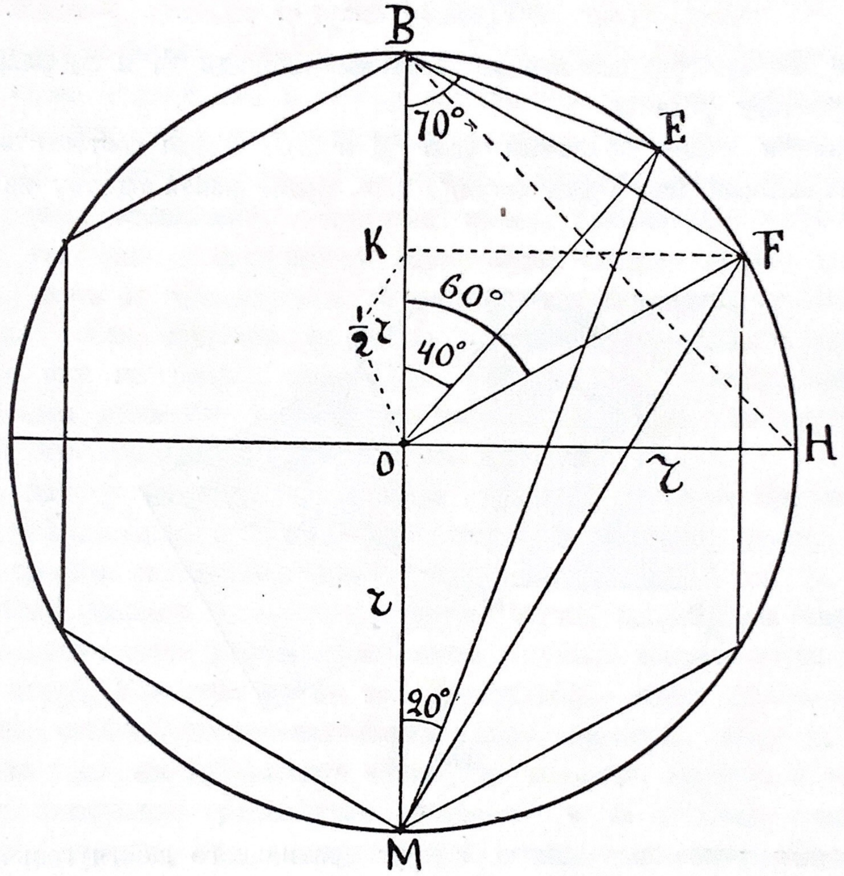
Вставив это в предыдущее равенство (2) имеем,

$$MF^2 = BH^2 + {}^1\!/_2\, BH^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3)$$

Но ясно, что $^1/_3$ центрального угла в 60° есть центральный угол в 20°, а остальные две трети составляют центральный угол в 40°. Значит, соответствующий этим двум третям вписанный угол

$$BME = 20°$$

Из прямоугольного треугольника MBE мы легко увидим, что на



Фиг. 13.

верхний его угол MBE (фиг. 13) остается в этом случае 70°, а, следовательно, при тригонометрическом определении, сторона

$$ME = 2\,r\,.\,\mathrm{Sn}\,70°.$$

Это при $r = 1$ дает

$$ME = 2.0{,}93969\ldots = 1{,}97938\ldots,$$

или, как окончательный результат таких соображений,

$$ME^2 = 3{,}92\ldots \qquad (4)$$

В теории же автора при решении им трисекции (или скорее полисекции) угла, одним из исходных пунктов является *предположение*, выраженное им таким каббалистическим способом (стран. 5, строка 1 сверху):

„□ п. на MF + $^1/_4$ □ п. на BH = □ п. на EM“,

где нет никаких объяснений буквы п.

Догадываясь по смыслу, что это значит „построенный“ и переведя все место на обычный ясный математический язык, имеем такое „*предположение*“ автора

$$MF^2 + {}^1/_4\, BH^2 = EM^2.$$

Или, переставив члены для легкости чтения,

$$ME^2 = MF^2 + {}^1/_4\, BH^2.$$

Вставив сюда вместо MF^2 его значение из формулы (3) получим (как показал Б. Н. Николаев, которому я дал брошюрку автора для предварительного разстмотрения):

$$ME^2 = BH^2 + {}^1/_2\, BH^2 + {}^1/_4\, BH^2$$

Или, видя из чертежа, что

$$BH^2 = r^2 + r^2 = 2\, r^2$$

находим окончательно

$$ME^2 = 2\, r^2 + r^2 + {}^1/_2\, r^2 = 3^1/_2\, r^2 = 3^1/_2.$$

Но мы только что видели (выражение 4), что ME^2 равен на деле иррациональному числу 3,92..., а вовсе не 3 $^1/_2$, как здесь выходит у автора. Очевидно, что это его „*предположение*“ есть софизм.

Значит, не от „косности современных математиков“, как говорит автор, ни у кого из них не было до сих пор охоты разбирать его запутанные выкладки на девяти страницах, а от того, что это явно была неблагодарная работа. По той же причине и я делаю этот разбор лишь по оффициальному поручению Комиссариата Народного Просвещения Научному Институту имени Лесгафта, и не как опровержение идей автора, а только пользуясь этим случаем для того, чтобы высказать некоторые свои мысли о математических софизмах.

Интересным здесь может быть только одно: это посмотреть, при каких величинах углов метод автора дает верные результаты и при каких его результаты расходятся с величинами, получаемыми тригонометрическим определением, и выяснить, каков закон их расхождений. Но для этого необходимо, чтобы автор наглядно показал все нужные построения для полисекции углов по его способу и сам определил все численные величины хорд и дуг получаемых при этом для различных последовательных углов между 0° и 180°.